

© 1994 г. Ю. В. Андреев, Ю. Л. Бельский, А. С. Дмитриев

ЗАПИСЬ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСТОЙЧИВЫХ ЦИКЛОВ ДВУМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Исследуется возможность записи и восстановления информации на предельных циклах двумерных и многомерных отображений. С этой целью вводятся кусочно-линейные отображения, обобщающие на двумерный и многомерный случай одномерные отображения с записью информации, предложенные в [1, 2]. Рассматриваются вопросы об информативной емкости таких отображений и о бассейнах притяжения предельных циклов с записанной информацией.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с обнаружением факта использования хаотических режимов при обработке информации живыми системами [1—3] возникает вопрос о возможности записи информации в динамических системах на сложных аттракторах, таких, как предельные циклы, торы и странные аттракторы. Он является ключевым в проблеме использования сложной динамики и хаоса для обработки информации. Действительно, только после решения вопроса о записи информации в динамической системе может идти речь об ее обработке. В [4, 5] был предложен метод записи информации с использованием предельных циклов одномерных динамических систем — одномерных отображений единичного отрезка в себя. Информационная емкость этого метода определяется разрядностью используемой в ЭВМ арифметики и достигает 100 кбайт уже при использовании одинарной точности вычислений (восемь десятичных значащих цифр). Применение двойной точности расширяет возможности метода и потенциально увеличивает емкость записи до 10^3 — 10^4 Гбайт.

Другим направлением расширения емкости записи является использование отображений двумерных и более высокой размерности. Кроме высокой информационной емкости такие отображения могут иметь ряд дополнительных полезных свойств.

В данной статье вводятся и изучаются двумерные и многомерные отображения, являющиеся прямым обобщением одномерных кусочно-линейных отображений, изучавшихся в [4—7].

1. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ЗАДАНЫМИ УСТОЙЧИВЫМИ ЦИКЛАМИ

Будем, как и в случае записи информации на одномерном отображении, представлять информацию в виде информационного блока (стринга), состоящего из n элементов:

$$(1) \quad a_1 a_2 \dots a_n,$$

где a_i — элементы некоторого алфавита A^N из N элементов. В случае записи этого информационного блока на втором уровне он представляется в виде пар элементов:

$$(2) \quad (a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_n, a_1).$$

Предполагается, что среди пар (2) нет совпадающих. Если в (2) все же присутствуют совпадающие пары, от них можно избавиться за счет расширения алфавита [6, 7].

Рассмотрим возможность записи информационного блока (1) на двумерное отображение квадрата $[0,1] \times [0,1]$ плоскости XY в себя. С этой целью поставим каждому j -му элементу алфавита A^N в соответствие полуинтервалы на осях x и y :

$$(3) \quad I_j^x = \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right), \quad I_j^y = \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right), \quad j = \overline{1, N}$$

и центральные точки этих полуинтервалов $\frac{j-0,5}{N} \in I_j^{x,y}$. При этом паре элементов (a_i, a_{i+1}) последовательности (2) ставится в соответствие квадрат:

$$(4) \quad I_{m_i}^x \times I_{m_{i+1}}^y = \left[\frac{m_i-1}{N}, \frac{m_i}{N} \right) \times \left[\frac{m_{i+1}-1}{N}, \frac{m_{i+1}}{N} \right),$$

где m_i — номер следования элемента a_i в алфавите. Далее будем называть такие квадраты информативными. Информационному блоку (1) в этом случае можно сопоставить цикл периода n , состоящий из последовательности точек:

$$(5) \quad ((m_1 - 0,5)/N, (m_2 - 0,5)/N), ((m_2 - 0,5)/N, (m_3 - 0,5)/N) \dots, ((m_{n-1} - 0,5)/N, (m_n - 0,5)/N), ((m_n - 0,5)/N, (m_1 - 0,5)/N).$$

Задача заключается в том, чтобы построить двумерное отображение, которое имеет предельный цикл, проходящий через последовательность точек (5).

Заметим, что y — координата i -й точки цикла (5) и x — координата $i+1$ -й точки цикла отвечают одному и тому же элементу a_{m_i} алфавита A^N . Поэтому будем искать двумерное отображение в виде

$$(6) \quad (x_{i+1}, y_{i+1}) = \vec{g}(x_i, y_i) = (y_i, f(x_i, y_i)).$$

Зададим вид функции $f(x, y)$ так, чтобы отображение (6) имело единственный устойчивый предельный цикл (5), соответствующий последовательности (2).

С этой целью для точек (x, y) , принадлежащих информативному квадрату $I_{m_{i-1}}^x \times I_{m_i}^y$ (напомним, что такой квадрат отвечает паре элементов (a_{i-1}, a_i)), определим функцию $f(x, y)$ таким образом, чтобы в пространстве XYZ она задавала плоскость $P_{\text{инф}}$, проходящую через точки:

$$A = \left(\frac{m_{i-1}-1}{N}, \frac{m_i-1}{N}, \frac{m_{i+1}-0,5(1+\Delta)}{N} \right),$$

$$B = \left(\frac{m_{i-1}-1}{N}, \frac{m_i}{N}, \frac{m_{i+1}-0,5(1+\Delta)}{N} \right) \text{ и}$$

$$C = \left(\frac{m_{i-1}}{N}, \frac{m_i}{N}, \frac{m_{i+1}-0,5(1+\Delta)}{N} \right).$$

При этом $f(x, y)$ задается выражением

$$(7) \quad f(x, y) = \Delta \left(x - \frac{m_{i-1}-1}{N} \right) + \frac{m_{i+1}-0,5(1+\Delta)}{N}.$$

В формуле (7) отсутствует явная зависимость функции $f(x, y)$ от y , поскольку данная функция постоянна по y в пределах информативного квадрата.

Величина Δ определяет угол наклона плоскости $P_{\text{инф}}$ к плоскости XY (рис. 1, а) и, как будет показано далее, устойчивость предельного цикла.

Пусть в последовательности (2) нет пары, состоящей из a_j - и a_i -го элементов

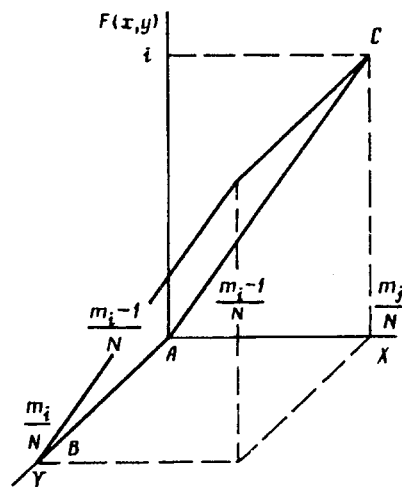
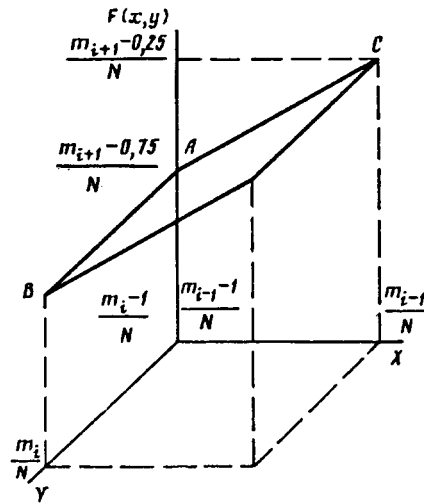


Рис. 1. Расположение плоскости, задаваемой функцией $f(x, y)$, для информативного (а) и неинформативного (б) квадрата

алфавита A^N , тогда для точек (x, y) , лежащих внутри квадрата $I_{m_j}^x \times I_{m_i}^y$, определим $f(x, y)$ так, чтобы она задавала плоскость $P_{\text{неинф}}$, проходящую через точки

$$A = \left(\frac{m_i - 1}{N}, \frac{m_i - 1}{N}, 0 \right), \quad B = \left(\frac{m_j - 1}{N}, \frac{m_i}{N}, 0 \right),$$

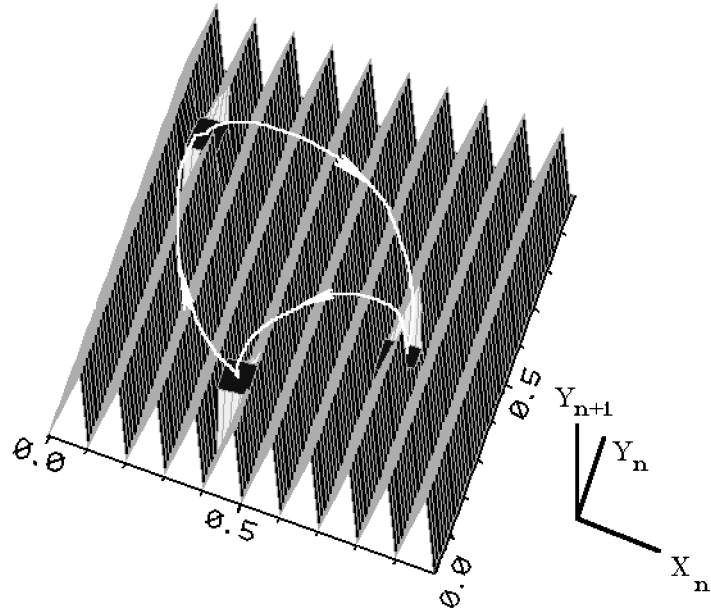
$$C = \left(\frac{m_j}{N}, \frac{m_i}{N}, 1 \right).$$

При этом $f(x, y)$ задается выражением:

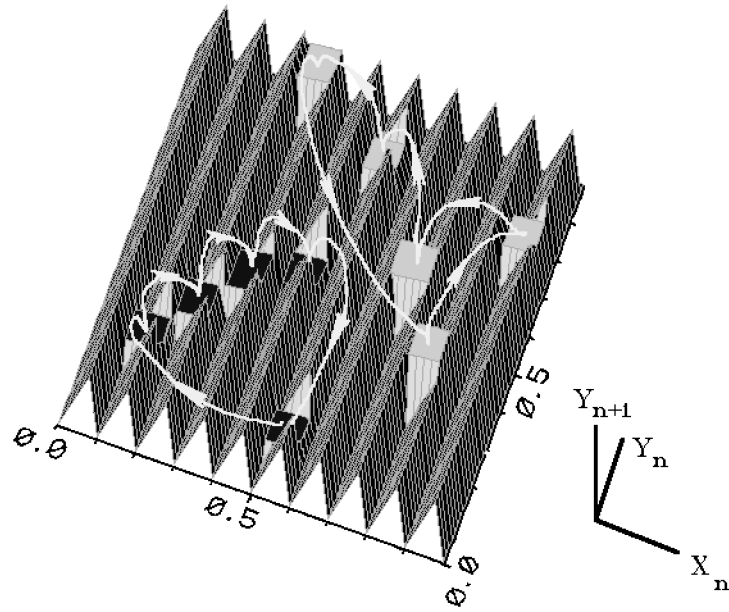
$$(8) \quad f(x, y) = N \left(x - \frac{m_j - 1}{N} \right).$$

Расположение плоскости $P_{\text{неинф}}$ для случая неинформативного квадрата показано на рис. 1, б.

Отображение (б) полностью определено заданием функции $f(x, y)$ в ин-



a



б

Рис. 2. График функции $f(x, y)$ при записи на двумерное отображение информационного блока 174 (*a*); двух информационных блоков 12345 и 97583 (*б*)

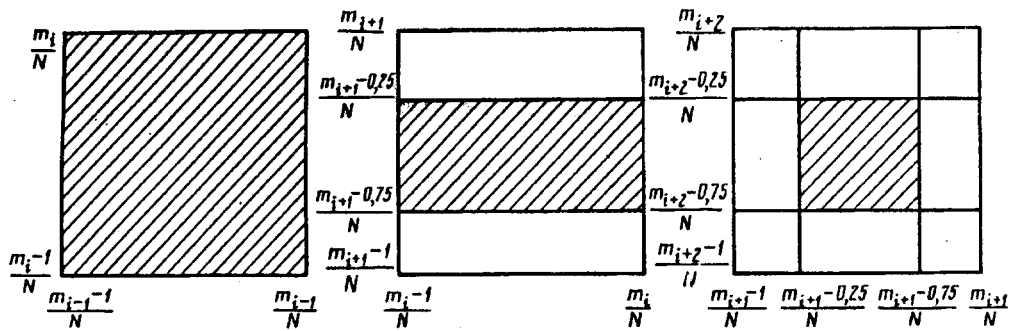


Рис. 3. Сжимающее действие двумерного отображения; исходный информативный квадрат (а); исходный квадрат сжимается в вертикальном направлении (б); полученный прямоугольник сжимается в горизонтальном направлении (в)

формативных квадратах формулой (7), а в остальных точках единичного квадрата формулой (8).

По построению (б) отображает единичный квадрат в себя и имеет предельный цикл (5) длины n . Рассмотрим условия устойчивости этого цикла. Пусть (x_0, y_0) начальные условия для итерирования. Применим отображение $\vec{g}(x, y)$ n раз:

$$(x_n, y_n) = \vec{g}^n(x_0, y_0),$$

$\vec{g}^n(x, y)$ будем рассматривать как новое отображение, как и отображение $\vec{g}(x, y)$, оно кусочно-линейное. Если точка (x_0, y_0) является точкой цикла периода n отображения $\vec{g}(x, y)$, то она является неподвижной точкой для отображения $\vec{g}^n(x, y)$. Число таких неподвижных точек в нем равно n . Устойчивому циклу в исходном отображении соответствуют устойчивые неподвижные точки в отображении $\vec{g}^n(x, y)$ и наоборот. Поэтому для того чтобы выяснить условия устойчивости цикла периода n для исходного отображения, достаточно рассмотреть условия устойчивости соответствующих неподвижных точек для отображения $\vec{g}^n(x, y)$.

Устойчивость этих неподвижных точек определяется собственными значениями якобиана отображения $\vec{g}^n(x, y)$ в этих точках. Эти же собственные значения являются мультипликаторами цикла периода n для отображения $\vec{g}(x, y)$.

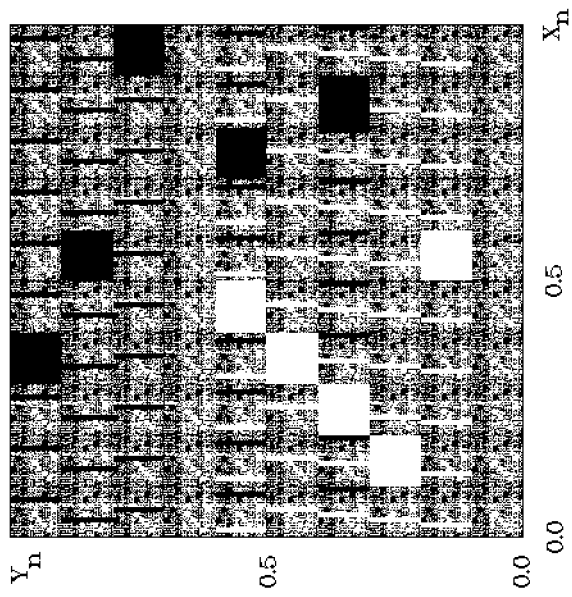
Якобиан отображения $\vec{g}^n(x, y)$ в неподвижной точке представляет собой произведение якобианов отображения (б) для n точек цикла, т. е. n -ю степень матрицы:

$$(9) \quad \frac{\partial (x_{m+1}, y_{m+1})}{\partial (x_m, y_m)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

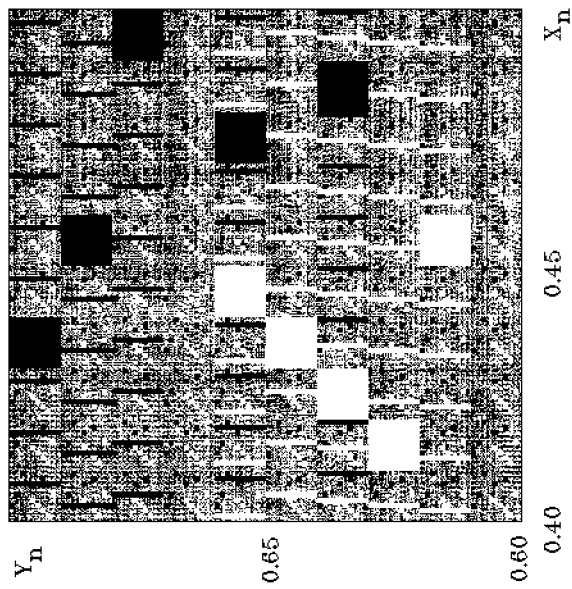
Якобиан (9) имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\Delta}$, а n -я степень матрицы (9) — собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm \Delta^{n/2}$, которые и являются мультипликаторами цикла (5). Поскольку мультипликаторы при $|\Delta| < 1$ лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга, то цикл (5) является устойчивым циклом отображения (б) при $|\Delta| < 1$.

2. БАСЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ЦИКЛОВ

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется построить двумерное отображение с устойчивым циклом, отвечающим последовательности цифр 174. Предполагается, что в качестве алфавита в данном случае используются десятичные цифры от 0 до 9. Таким образом, алфавит содержит 10 элементов. Информационный блок 174 представляется в виде последовательности пар: (1, 7) (7, 4) (4, 1). Каждой паре согласно правилу, описанному в предыдущем разделе, ставится в соответствие



a



b

Рис. 4. Фрактальная структура бассейнов притяжения циклов двумерного отображения с функцией $f(x, y)$, изображенной на рис. 2, б. Квадрат, изображенный на рис. 4, б, подобен квадрату, изображенному на рис. 4, а

информативный квадрат с длиной стороны $\frac{1}{N}$, для точек которого функция $f(x, y)$ определяется выражением (7). В остальных точках единичного квадрата $f(x, y)$ задается формулой (8).

На рис. 2, а показан вид функции $f(x, y)$ при записи на двумерное отображение (б) информационного блока 174. Цикл проходит через точки (0,15, 0,75), (0,75, 0,45), (0,45, 0,15), лежащие в центрах соответствующих информативных квадратов.

Рисунок 3 иллюстрирует сжимающие свойства отображения для начальных условий, заданных в пределах информативного квадрата. Таким образом, при итерировании отображения с начальными условиями внутри информативного квадрата траектория притягивается к устойчивому циклу.

В силу метода построения отображения в нем отсутствуют устойчивые предельные циклы, не связанные с информативными квадратами. Если при этом в системе нет также других аттракторов (например странных), то при любых начальных условиях траектория системы в процессе итерирования в конце концов попадает на один из информативных квадратов и притягивается к устойчивому циклу.

Следующий пример относится к одновременной записи двух блоков информации. При этом каждому блоку информации соответствует свой предельный цикл. На рис. 2, б показан вид функции $f(x, y)$ при записи двух информационных блоков 12345 и 97583.

Рассмотрим теперь структуру бассейнов притяжения устойчивых циклов при записи двух блоков информации. Бассейн притяжения аттракторов даже в простейшем случае, когда аттракторами являются устойчивые положения равновесия, могут быть фрактальными [9]. При этом фрактал может обладать свойством «самоподобия» или «самоаффинности» [9]. В то время как преобразование подобия сжимает или растягивает геометрическую фигуру по всем направлениям в одинаковом отношении, аффинное преобразование сжимает или растягивает фигуру в направлении базисных векторов с разными коэффициентами.

На рис. 4 показаны бассейны притяжения циклов отображения (б) с функцией $f(x, y)$, изображенной на рис. 2, б. Черным цветом выделены точки единичного квадрата, из которых траектория притягивается к циклу, соответствующему информационному блоку 97583. Белые зоны — это точки единичного квадрата, из которых траектория притягивается к циклу, соответствующему информационному блоку 12345. Из рис. 4 видно, что области бассейнов притяжения обладают свойством подобия. Например, структура бассейнов притяжения в квадрате $[0,4, 0,5] \times [0,6, 0,7]$ (рис. 4, б) подобна структуре бассейнов притяжения во всем единичном квадрате $[0,1] \times [0,1]$ (рис. 4, а) с коэффициентом $\frac{1}{10}$. Кроме того, единичный квадрат с помощью аффинного преобразования, состоящего в зеркальном отражении относительно диагонали (0, 0)—(1,1), и сжатия по оси x в 10 раз можно преобразовать в прямоугольник $[0, 0,1] \times [0, 1]$.

3. ЗАПИСЬ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим применение описанного метода к записи и восстановлению изображений. Пусть имеется изображение в нескольких оттенках серого цвета. Вначале осуществляется переход от исходного изображения к паттерну размером $m \times n$ ячеек. Каждая из ячеек закрашивается в оттенок серого цвета, выбираемый из заданной палитры, и наиболее близкий к оттенку, доминирующему в ячейке. Палитра из N оттенков серого цвета в данном случае является первоначальным алфавитом, а процедура закрашивания ячеек — разложением изображения по элементам алфавита. На следующем шаге происходит формирование информационного блока, при котором осуществляется переход от паттерна к одномерной последовательности длины $m \times n$. При этом можно использовать, например,



Рис. 5. Графическая информация, записываемая на двумерное отображение

преобразование «телевизионного» типа — считывание паттерна построчно сверху вниз. Начало информационного блока помечается специальным символом (меткой), который необходим для однозначного преобразования цикла обратно в паттерн.

Рассмотрим в качестве примера записи графической информации на двумерное отображение запись нескольких черно-белых фотографий (рис. 5).

Процедура исключения одинаковых пар в информационном блоке [6—8] приводит в этом случае к расширению числа элементов алфавита с 17 (16 оттенков серого цвета плюс метка в начале снимка) до 3799 элементов. При этом размер стороны информативного квадрата двумерного отображения равен $2,63 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, длина стороны квадрата достаточно велика, чтобы проводить расчеты по итерированию отображения при использовании одинарной точности вычислений на компьютере типа РС АТ (восемь десятичных разрядов).

Отметим, что в случае использования двумерных отображений для записи информации обе переменные отображения находятся в равных условиях с точки зрения ширины интервала, нахождение начальных условий в котором гарантирует стягивание траектории к устойчивому предельному циклу.

4. О ВОЗМОЖНОСТИ ЗАПИСИ ИНФОРМАЦИИ НА МНОГОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Рассмотрим обобщение метода построения отображения, изложенного в разд. 1, на q -мерные отображения. Для этого из последовательности (1) образуем последовательность вида

$$(10) \quad (a_1, a_2, \dots, a_n), (a_2, a_3, \dots, a_{q+1}), \dots, \\ a_n, a_1, \dots, a_{q-1}).$$

Будем полагать, что в последовательности (10) нет совпадающих элементов. Если

они есть, то, как и в двумерном случае, исключаем их, расширяя алфавит [6, 7].

Поставим вектору, состоящему из элементов алфавита $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+q-1})$, в соответствие q -мерный куб:

$$(11) \quad I_{m_i} \times I_{m_{i+1}} \times \dots \times I_{m_{i+q-1}} = \left[\frac{m_i - 1}{N}, \frac{m_i}{N} \right) \times \left[\frac{m_{i+1} - 1}{N}, \frac{m_{i+1}}{N} \right) \times \dots \times \left[\frac{m_{i+q-1} - 1}{N}, \frac{m_{i+q-1}}{N} \right) .$$

Цикл длины n , на котором записывается информация, будет состоять из точек:

$$(12) \quad ((m_1 - 0,5)/N, (m_2 - 0,5)/N, \dots, (m_q - 0,5)/N), \\ ((m_2 - 0,5)/N, (m_3 - 0,5)/N, \dots, (m_{q+1} - 0,5)/N), \\ \dots ((m_n - 0,5)/N, (m_1 - 0,5)/N, \dots, (m_{q-1} - 0,5)/N).$$

Отображение, имеющее данный устойчивый цикл, будем искать в следующем виде:

$$(13) \quad x_{i+1}^{(1)} = x_i^{(2)}, \\ x_{i+1}^{(2)} = x_i^{(3)}, \\ \dots \\ x_{i+1}^{(q)} = f(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(q)}).$$

Функция $f(\vec{X}_i)$, где $\vec{X}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(q)})$, при принадлежности точки X_i «информативному» кубу (11) определяется выражением:

$$(14) \quad f(\vec{X}_i) = \Delta \left(x_i^{(1)} - \frac{m_i}{N} \right) + \frac{m_{i+q} - 0,5}{N},$$

а если X_m лежит в «неинформативной» области q -мерного единичного куба, то

$$(15) \quad f(\vec{X}_i) = \frac{x_i^{(1)} - \frac{m_i}{N}}{\frac{1}{N}}.$$

По аналогии с двумерным случаем величина Δ определяет устойчивость цикла, поскольку его мультипликаторы равны:

$$\lambda_i = (-1 \cdot \Delta^{1/q})^n, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отметим, что функция $f(x, y)$, заданная формулами (7) и (8), определяет 2-мерную поверхность в 3-мерном пространстве (x, y, y_{i+1}) (рис. 2), а $f(\vec{X})$, задаваемая формулами (14) и (15), определяет q -мерную гиперповерхность в $(q+1)$ -мерном пространстве $(\vec{X}, x_{i+1}^{(q)})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ряд явлений и закономерностей в поведении систем со сложной динамикой могут быть применены к анализу и обработке информации [4–8]. При этом ключом к проблеме использования сложной динамики и хаоса для обработки информации является практическая реализация записи больших объемов информации на аттракторах динамических систем.

В связи с этим следует отметить, что предложенные в работе двумерные и

многомерные кусочно-линейные отображения обладают потенциально неограниченной информационной емкостью для записи и восстановления информации.

Реальные возможности в этом случае также весьма значительны и определяются такими факторами, как объем памяти и быстродействие физических носителей информации (оперативная память ЭВМ, жесткие диски и т. д.), а также скоростью записи информации на аттракторы динамических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код 93—012—730).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babloyants A., Nicolis G., Salazar M. // *Phys. Lett. A.* 1985. V. 111. P. 152.
2. Scarda C. A., Freeman W. J. // *Behavioral and Brain Sci.* 1987. V. 10. P. 161.
3. Nicolis J. S., Tsuda I. // *Bull. of Math. Biol.* 1985. V. 47. № 3. P. 343.
4. Дммприев А. С. // *РЭ.* 1991. Т. 36. № 1. С. 101.
5. Dmitriev A. S., Panas A. I., Starkov S. O. // *Phys. Lett. A.* 1991. V. 155. № 8, 9. P. 494.
6. Andreyev Yu. V., Belsky Yu. L., Dmitriev A. S. // *Int. Seminar Nonlinear Circuits and Systems. Reports. Moscow, 1992.* P. 51.
7. Andreyev Yu. V., Dmitriev A. S., Chua L. O., Wu C. W. // *Bifurcation and Chaos.* 1992. V. 2. № 3.
8. Дммприев А. С. // *РЭ.* 1993. Т. 38. № 1. С. 1.
9. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature.* N. Y.: Freeman. 1982.

Поступила в редакцию
30.06.93