

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова
Российской академии наук

На правах рукописи



Заболотных Андрей Александрович

Свойства плазменных возбуждений в двумерных электронных системах

01.04.10 – Физика полупроводников

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Волков Владимир Александрович

Москва – 2018

Оглавление

Введение	4
Обзор литературы	11
1. Плазменные колебания в двумерных электронных системах . .	11
2. Краевые плазмоны	19
3. 2D электронные системы в магнитном поле под действием микроволнового излучения	20
4. Параметрический резонанс	21
Глава 1. Магнитоплазмон-поляритоны в двумерной электронной си- стеме с диссипацией	24
1.1. Введение	24
1.2. Спектры магнитоплазмон-поляритонов	26
1.3. Свойства магнитоплазмон-поляритонов	32
1.4. Экранированный магнитоплазмон-поляритон	35
1.5. Выводы к Главе 1	37
Глава 2. Краевые плазмон-поляритоны в двумерной электронной системе с диссипацией	38
2.1. Основные уравнения и метод решения	38
2.2. Анализ дисперсионного уравнения	43
2.3. Обсуждение и выводы к Главе 2	46
Глава 3. Параметрический резонанс в двумерной электронной си- стеме в магнитном поле	50
3.1. Введение	50
3.2. Простейшая модель	53
3.3. Параметрический резонанс и экранировка	58

3.4. Оценки, обсуждение результатов и выводы	64
Заключение	68
Список сокращений и условных обозначений	70
Список литературы	71
Приложение А. Краевые плазмоны в анизотропной 2D электрон- ной системе	82

Введение

Актуальность темы исследования. Исследование двумерных электронных систем на основе полупроводниковых структур является из одной центральных областей физики конденсированного состояния. Важнейшим направлением в физике двумерных систем является изучение коллективных возбуждений. Особый интерес в двумерных электронных системах представляют коллективные колебания электронной плотности – плазменные волны или плазмоны. Плазменные волны в низкоразмерных системах изучаются уже несколько десятилетий [1]. Плазмоны в двумерных электронных системах сильно отличаются от плазменных колебаний в обычных трёхмерных системах. Плазменные колебания в двумерных системах не имеют частотной щели при нулевом волновом векторе [2, 3] и их частота сильно зависит от величины волнового вектора (в случае двумерной системы в вакууме частота зависит от волнового вектора корневым образом; для двумерной системы, вблизи которой расположен металлический затвор – частота линейно зависит от волнового вектора) в отличие от плазмонов в трёхмерных системах, для которых частота слабо зависит от волнового вектора (при малых волновых векторах). Кроме того, частотой двумерных плазменных колебаний можно управлять в широком диапазоне, помещая систему во внешнее магнитное поле или меняя концентрацию носителей заряда в системе, например, с помощью металлического затвора находящегося вблизи системы. В ограниченных двумерных электронных системах возникает новый тип плазменных возбуждений – краевые плазмоны [4–6], которые локализованы вблизи края системы и распространяются вдоль него.

Распространяясь в двумерных электронных системах, плазменные волны затухают из-за конечного времени электронной релаксации. В связи с этим, наиболее важным является исследование свойств плазменных колебаний в чистых двумерных электронных системах, т.е. в системах с большой по-

движностью и проводимостью. Однако при изучении плазменных колебаний в чистых системах часто необходимо учитывать эффекты электромагнитного запаздывания [7, 8], т.е. взаимодействие плазменных волн с электромагнитными волнами. Учёт электромагнитного запаздывания приводит к аномально слабому затуханию плазменных колебаний в двумерной электронной системе при низких частотах, если проводимость системы достаточно большая [8].

Взаимодействие различных возбуждений с электромагнитными волнами обычно называют поляритами. Известно достаточно много разного вида поляритонов; наиболее широко известными, по-видимому, являются поверхностные плазмон-поляритоны, распространяющиеся вдоль границы раздела трехмерного металла и диэлектрика; такие плазмоны получили широкое применение вплоть до создания лазера на поверхностных плазмон-поляритонах [9]. Также существуют экситонные поляритоны, фононные поляритоны и важные для нас двумерные плазмонные поляритоны [10–12]. Свойствами двумерных плазмон-поляритонов, как и свойствами двумерных плазмонов, можно управлять в широком диапазоне, что делает их интересным объектом не только с точки зрения фундаментальных исследований, но и с точки зрения практического применения, например, создания источников и приёмников терагерцового и субтерагерцового излучения [13–17].

Также интересным объектом для исследований являются чистые двумерные электронные системы помещённые во внешнее постоянное магнитное поле, ортогональное плоскости двумерной системы, и находящиеся под действием микроволнового излучения. В продольном фотосопротивлении таких систем наблюдаются осцилляции, являющиеся функцией отношения частоты излучения к циклотронной частоте электронов двумерной системы в магнитном поле [18, 19]. Исследованию и объяснению этих осцилляций (которые часто сокращённо называют MIRO – microwave-induced resistance oscillations) посвящено больше количество экспериментальных и теоретических работ (см. обзор [20]). При увеличении мощности микроволнового из-

лучения в достаточно чистых структурах осцилляции становятся настолько большими, что продольное сопротивление двумерной системы достигает нулевых значений [21, 22]. Недавно, в системах с ещё большей подвижностью был обнаружен новый эффект: появление аномально высокого и узкого пика сопротивления двумерной системы, возникающего, когда частота микроволнового излучения находится вблизи удвоенной циклотронной частоты электронов двумерной системы [23–26].

Цели и задачи диссертационной работы: Исследование влияния электромагнитного запаздывания на спектр и свойства плазменных колебаний в диссипативной двумерной электронной системе, помещённой в постоянное магнитное поле; а также на спектр краевых плазмонов без магнитного поля. Исследование параметрического резонанса плазменных колебаний в двумерной электронной системе в магнитном поле под действием микроволнового излучения с частотой, близкой к удвоенной циклотронной частоте электронов в системе.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Вычисление спектра плазменных колебаний при учёте электромагнитного запаздывания в диссипативной двумерной электронной системе, помещённой во внешнее постоянное магнитное поле, ортогональное плоскости двумерной системы.

2. Вычисление при учёте электромагнитного запаздывания спектра плазменных колебаний, локализованных и распространяющихся вдоль прямолинейного края двумерной электронной системы с диссипацией.

3. Исследование возможности возникновения параметрического резонанса плазменных колебаний в двумерной электронной системе в постоянном магнитном поле под действием микроволнового излучения, частота которого лежит вблизи удвоенной циклотронной частоты.

Научная новизна. В диссертации рассчитана диаграмма, характеризующая типы спектров плазменных волн при учёте электромагнитного запаз-

дывания в диссипативной двумерной электронной системе в магнитном поле и, соответственно, построены и проанализированы все возможные типы спектров. Найден спектр плазменных волн, бегущих вдоль прямолинейного края диссипативной двумерной электронной системы, при учёте электромагнитного запаздывания.

Предложен механизм СВЧ отклика двумерной электронной системы в магнитном поле на удвоенной циклотронной частоте электронов. Механизм основан на возникновении параметрического резонанса плазменных колебаний.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации исследуются спектр и свойства плазменных колебаний в двумерных электронных системах, полученные результаты могут быть использованы при создании источников и приёмников терагерцового излучения [14].

Положения, выносимые на защиту:

1. Универсальная фазовая диаграмма, построенная в безразмерных координатах статическая проводимость – магнитное поле, в рамках модели Друде классифицирует все возможные типы спектров плазмон-поляритонов в двумерной электронной системе, помещённой в перпендикулярное магнитное поле, при учёте конечности времени релаксации электронов в системе.

2. Рассчитанная фазовая диаграмма допускает существование дополнительных ветвей в спектре магнитоплазмон-поляритонов. Кроме того, в трех фазах (из четырёх) магнитоплазмон-поляритон обладает чрезвычайно малым затуханием при малых волновых векторах.

3. Тип спектра краевых плазмон-поляритонов, бегущих вдоль прямолинейной границы двумерной электронной системы, определяется безразмерным параметром, равным отношению статической проводимости системы к скорости света. При достаточно больших значениях этого параметра краевой плазмон-поляритон добротен даже на частотах, меньших темпа друдевской релаксации.

4. Механизм магнитоплазменной неустойчивости, основанный на возникновении параметрического резонанса в двумерной электронной системе в магнитном поле под действием микроволнового излучения, может приводить к отклику системы при частоте излучения, близкой к удвоенной циклотронной частоте электронов в системе.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность представленных в диссертации результатов подтверждается тем, что при расчётах использовались проверенные методы теоретической физики, воспроизводящие известные результаты в предельных случаях и дающие непротиворечивые результаты в различных подходах. Полученные теоретические результаты признаны научной общественностью при обсуждениях на российских и международных научных конференциях, а также подтверждены положительными рецензиями опубликованных статей в научных журналах.

Основные результаты диссертации докладывались на the 22th and 20th International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems (State College, PA, USA, July 31 – August 4, 2017 and Wroclaw, Poland, July 1–5, 2013), 13-ой, 12-ой и 11-ой Российской конференции по физике полупроводников (Екатеринбург, 2–6 октября 2017 г., Ершово, 21–25 сентября 2015 г. и Санкт-Петербург, 16–20 сентября 2013 г.), 21-ом, 19-ом и 17-ом Международном симпозиуме «Нанозфизика и нанозлектроника» (Нижний Новгород 13–16 марта 2017, 10–14 марта 2015 г. и 11–15 марта 2013), the 9th Advanced Research Workshop Fundamentals of Electronic Nanosystems «NanoPeter 2014» (Saint Petersburg, Russia, June 21–27, 2014), 14-ой и 11-ой конференции «Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления» (г. Москва, г. Троицк, 3 июня 2016 г. и 6 июня 2013 г.), the 21st International Symposium «Nanostructures: Physics and Technology» (Saint Petersburg, Russia, June 24–28, 2013), 16-ой, 14-ой и 13-ой Школке-конференции молодых ученых «Проблемы физики твердого тела и высоких давлений» (г. Сочи, 15–25 сентября 2017 г., 11–20 сентября 2015 г. и 10–21

сентября 2014 г.), 14-ой Школе молодых ученых «Актуальные проблемы физики» (Звенигород, 11–15 ноября 2012 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 14 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [27–29], а также 11 статей в сборниках трудов и тезисов конференций [30–40].

Личный вклад автора. Автор принимал участие в постановке задач и обсуждении результатов. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3-х глав, заключения, библиографии и приложения. Диссертация содержит 85 страниц, 19 рисунков. Библиография включает 101 наименование.

Обзор литературы состоит из четырёх разделов. В первом разделе кратко обсуждаются плазменные колебания в трёхмерных системах, затем подробно рассматриваются плазмоны в двумерных электронных системах, в том числе рассматривается влияние электромагнитного запаздывания и магнитного поля на их спектр и свойства. Во втором разделе Обзора приводится минимальная информация о краевых плазмонах. В третьем разделе приводятся работы по микроволновому фотоотклику двумерных систем в магнитном поле. В четвёртом разделе описывается явление параметрического резонанса на примере уравнения Матье.

Первая глава состоит из пяти разделов и посвящена исследованию спектров магнитоплазмон-поляритонов в двумерной электронной системе с диссипацией. В разделе 1.1 выводится дисперсионное уравнение для плазмон-поляритонов в магнитном поле, далее в разделе 1.2 анализируются спектры магнитоплазмон-поляритонов, в следующем разделе 1.3 кратко рассмот-

рена их структура полей. В разделе 1.4 рассмотрено дисперсионное уравнение для экранированного плазмон-поляритона, и в заключительном разделе 1.5 приводятся выводы.

Во **второй главе**, состоящей из трех разделов, вычисляется и анализируется спектр плазмона, распространяющегося вдоль прямолинейного края двумерной электронной системы, при учёте электромагнитного запаздывания. В разделе 2.1 описывается метод решения и выводится дисперсионное уравнение. В следующем разделе 2.2 анализируется спектр краевого плазмон-поляритона, а также распределение полей, плотности тока и заряда от координаты. В заключительном разделе 2.3 обсуждаются полученные результаты и приводятся выводы.

Третья глава состоит из четырех разделов и посвящена параметрическому резонансу в двумерной электронной системе, помещённой магнитное поле, ортогональное плоскости двумерной системы. В разделе 3.1 приведена экспериментальная мотивация и подход, который будет использован для рассмотрения параметрического резонанса в двумерной системе. В разделе 3.2 рассмотрена простейшая модель появления параметрического резонанса. В следующем разделе 3.3 приводится более реалистичная модель, а также приближенно учитывается экранировка внешнего поля электронами двумерной системы. В заключительном разделе 3.4 приводятся оценки и выводы.

В **Заключении** сформулированы основные результаты работы.

Формулы и рисунки в диссертации нумеруются по главам в стиле №главы. №формулы (в Обзоре литературы №главы отсутствует), нумерация литературы и сокращения единые для всего текста. Список сокращений и условных обозначений приведён после заключения, кроме того, в каждой главе при первом упоминании приводится расшифровка сокращения.

Обзор литературы

1. Плазменные колебания в двумерных электронных системах

Двумерные электронные системы (2D ЭС) – это системы, в которых электроны могут двигаться свободно только в двух направлениях, по третьему направлению они находятся в потенциальной яме и их движение является закованнованным, причём все электроны занимают нижний уровень размерного квантования.

Далее везде под двумерными электронными системами будут пониматься системы на основе кремниевых МДП-структур или GaAs квантовых ям и гетеропереходов.

В 2D ЭС есть электроны, которые могут свободно двигаться в двух направлениях, следовательно, в таких системах возможны плазменные колебания или плазмоны, т.е. коллективные возбуждения заряженных частиц.

Но прежде чем переходить к двумерным системам, кратко напомним свойства плазменных колебаний в трёхмерных электронных системах. В вырожденных ($k_B T \ll E_F$, где T – температура электронов, E_F – энергия Ферми, $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана) трёхмерных электронных системах в длинноволновом пределе $q \rightarrow 0$, где q – волновой вектор плазменного колебания, частота плазмона является константой и определяется выражением [41]:

$$\omega_{3D}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{3D}}{m}, \quad (1)$$

где e , m – заряд и эффективная масса электрона, n_{3D} – трёхмерная концентрация электронов в системе. Величина ω_{3D} при плотностях электронов, характерных для металлов, составляет от 5 до 30 электрон-вольт.

При увеличении волнового вектора частота начинает квадратично зави-

сеть от его величины [41]:

$$\omega_{3Dpl}^2(q) = \omega_{3D}^2 + \frac{3}{5}v_F^2q^2, \quad (2)$$

где q — модуль волнового вектора, v_F — скорость электронов на поверхности Ферми. При ещё больших волновых векторах $q \gtrsim \omega_{3D}/v_F$, плазмоны испытывают бесстолкновительное затухание Ландау.

В 2D ЭС частота плазменных колебаний даже в длинноволновом пределе ($q \rightarrow 0$) зависит от волнового вектора; конкретный же вид спектра зависит от наличия вблизи 2D системы металлических затворов или слоёв с разной диэлектрической проницаемостью.

В общем случае закон дисперсии 2D плазмонов в бесконечной 2D ЭС определяется из нулей эффективной продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(q, \omega) = 0$ [42]. В простейшем случае 2D ЭС, помещённой в среду с постоянной диэлектрической проницаемостью \varkappa , эффективная проницаемость имеет вид:

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 + \frac{2\pi\sigma(\omega)q}{-i\omega\varkappa}, \quad (3)$$

где $\sigma(\omega)$ — динамическая 2D проводимость системы, имеющая размерность скорости в гауссовых единицах, q — модуль волнового вектора плазмона.

В простейшем случае модели Друде тензор проводимости 2D ЭС, помещённой в постоянное внешнее магнитное поле \mathbf{B} , ортогональное плоскости 2D ЭС, определяется выражениями:

$$\sigma_{xx}(\omega) = \sigma_0 \frac{(1 - i\omega\tau)}{(1 - i\omega\tau)^2 + \omega_c^2\tau^2}, \quad \sigma_{xy}(\omega) = \sigma_0 \frac{-\omega_c\tau}{(1 - i\omega\tau)^2 + \omega_c^2\tau^2}, \quad (4)$$

где $\sigma_0 = e^2n_0\tau/m$ — статическая проводимость в отсутствие магнитного поля, n_0 — 2D концентрация электронов в системе, $e > 0$ и m — модуль заряда и эффективная масса электрона, τ — феноменологическое время электронной релаксации, $\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота электрона в магнитном поле \mathbf{B} , c — скорость света в вакууме. Формулы Друде хорошо описывают

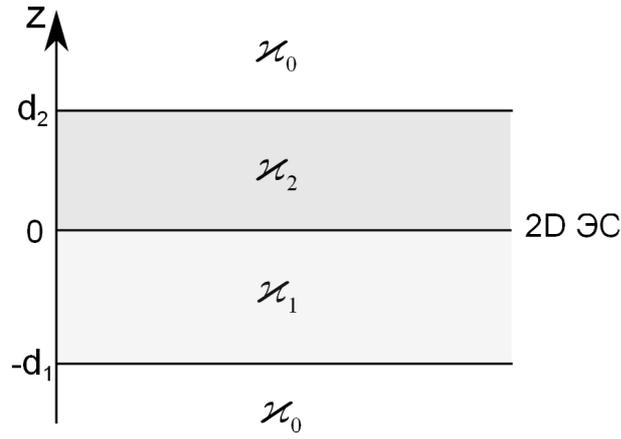


Рис. 1. Схематическое изображение многослойного диэлектрического окружения двумерной электронной системы.

проводимость и сопротивление 2D ЭС по крайней мере до частот порядка десятка гигагерц [43].

После подстановки формул Друде (для нулевого магнитного поля) в выражение для эффективной диэлектрической проницаемости (3), получим закон дисперсии $\omega_p(q)$. В случае чистой 2D ЭС, когда $\tau \rightarrow \infty$, без магнитного поля получаем:

$$\omega_p(q) = \left(\frac{2\pi n_0 e^2 q}{m\kappa} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Для того, чтобы получить спектр плазмона в магнитном поле (спектр магнитоплазмона), нужно в формуле (3) вместо проводимости $\sigma(\omega)$ подставить продольную проводимость $\sigma_{xx}(\omega)$; в чистом пределе ($\tau \rightarrow \infty$) получится следующее выражение для частоты магнитоплазмона ω_{mp} :

$$\omega_{mp}(q) = \sqrt{\omega_p^2(q) + \omega_c^2}. \quad (6)$$

В реальных структурах 2D ЭС обычно находится в диэлектрическом окружении, см. рис. 1:

$$\kappa(z) = \begin{cases} \kappa_0, & z > d_2, z < -d_1 \\ \kappa_2, & 0 < z < d_2 \\ \kappa_1, & -d_1 < z < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Чтобы получить выражение для $\varepsilon(q)$ в такой системе, нужно диэлектрическую проницаемость \varkappa в выражении (3) заменить на функцию

$$\varkappa(q) = \frac{\varkappa_1 \varkappa_1 \tanh qd_1 + \varkappa_0}{2 \varkappa_1 + \varkappa_0 \tanh qd_1} + \frac{\varkappa_2 \varkappa_2 \tanh qd_2 + \varkappa_0}{2 \varkappa_2 + \varkappa_0 \tanh qd_2}. \quad (8)$$

Рассмотрим важный случай так называемой экранированной 2D ЭС, т.е. когда вблизи 2D ЭС находятся металлические затворы. Для моделирования двух затворов положим в формулах (7) и (8) $d_1 = d_2 = d$, $\varkappa_1 = \varkappa_2$, $\varkappa_0 \rightarrow \infty$. В длинноволновом пределе $qd \ll 1$ получаем линейную зависимость частоты плазмона от волнового вектора:

$$\omega_{gated2}(q) = q \sqrt{\frac{2\pi n_0 e^2 d}{m \varkappa}}. \quad (9)$$

В случае одного металлического затвора, который находится на расстоянии d от плоскости 2D ЭС получаем [3]:

$$\omega_{gated}(q) = qV_{gated} = q \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2 d}{m \varkappa}}, \quad (10)$$

где V_{gated} часто называют скоростью экранированных плазмонов.

Теперь перейдём к обсуждению влияния электромагнитного запаздывания на спектр плазмона. Плазмоны при учёте электромагнитного запаздывания обычно называют плазмон-поляритонами. Вообще говоря, при учёте электромагнитного запаздывания в спектре существуют ТЕ и ТМ плазменные моды. ТЕ волна имеет 2 магнитные компоненты и одну электрическую, причём электрическая компонента ортогональна волновому вектору. ТМ волна имеет 2 электрических и одну магнитную компоненту, магнитная компонента ортогональна волновому вектору. Пока будем обсуждать только ТМ-моду, т.к. именно она в пределе, когда запаздыванием можно пренебречь, соответствует обычному плазмону, который обсуждался выше.

Спектр ТМ-моды плазмон-поляритона в чистой системе ($\tau \rightarrow \infty$) в отсутствие внешнего магнитного поля был получен уже в пионерской работе

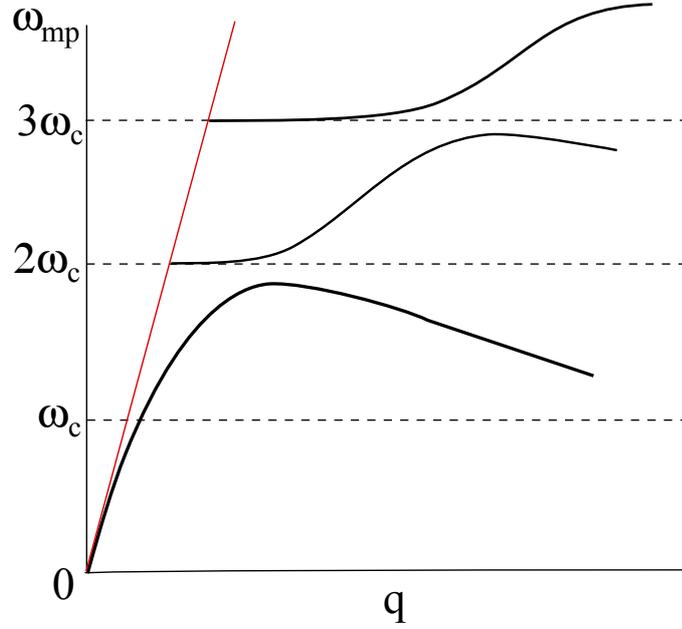


Рис. 2. Схематичное изображение спектра магнитоплазмон-поляритонов в чистом пределе [44]. Красным обозначен двумерный световой конус $\omega = cq/\sqrt{\kappa}$.

[2], дисперсионное уравнение выглядит следующим образом:

$$1 + \frac{2\pi\sigma(\omega)\beta}{-i\omega\kappa} = 0, \quad (11)$$

где $\beta = \sqrt{q^2 - \kappa\omega^2/c^2}$. Дисперсионное уравнение похоже на уравнение для обычного плазмона, следующее из зануления $\varepsilon(q, \omega)$ в формуле (3), с точностью до замены q на β .

Дисперсионное уравнение для плазмон-поляритонов в магнитном поле было получено в работе [44] (см. также дисперсионное уравнение в [45] для 2D ЭС с анизотропией проводимости):

$$\left(1 + \frac{2\pi\sigma_{xx}(\omega)\beta}{-i\omega\kappa}\right) \left(1 - \frac{2\pi\sigma_{xx}(\omega)i\omega}{c^2\beta}\right) = -\frac{4\pi^2}{c^2\kappa}\sigma_{xy}^2(\omega), \quad (12)$$

где считалось, что 2D ЭС помещена в однородную среду с постоянной диэлектрической проницаемостью κ . В работе [44] это уравнение было проанализировано в чистом пределе, проводимости σ_{xx} и σ_{xy} вычислялись в рамках приближения хаотических фаз. Полученный спектр схематично представлен на рис. 2. Отметим главные особенности. При малых волновых векторах зависимость $\omega_{mp}(q)$ прижимается снизу к «двумерному свету» $\omega = cq/\sqrt{\kappa}$.

Кроме того, в спектре появляются частотные щели в окрестности частот $2\omega_c$, $3\omega_c$ и т.д. Появление щелей связано с перепутыванием циклотронного движения и движения плазменной волны; щели расположены при достаточно больших волновых векторах $qR_c \gtrsim 1$, где $R_c = v_F/\omega_c$ – циклотронный радиус электрона в магнитном поле. Щели в спектре иногда называют бернштейновскими, по имени ученого, нашедшего спектр колебаний в трехмерной невырожденной плазме [46]. Бернштейновские моды изучались в теоретически [44, 47–49] и экспериментально [50–54], в том числе в режиме квантового эффекта Холла [55, 56].

Перейдем к рассмотрению 2D ЭС с конечным временем релаксации электрона τ . В этом случае частота плазмона, найденная из равенства нулю эффективной продольной диэлектрической проницаемости (3), становится комплексной величиной. Действительная часть частоты ω' или $Re\omega$ соответствует колебаниям плазмона, мнимая часть ω'' или $Im\omega$ – затуханию плазмона со временем. В рамках формулы Друде для проводимости (4) без магнитного поля и при пренебрежении электромагнитным запаздыванием получаем следующее выражение для частоты плазмона:

$$\omega_{bulk}(q) = \omega' + i\omega'' = \sqrt{\omega_p^2(q) - 1/4\tau^2} - i/2\tau. \quad (13)$$

При достаточно малых волновых векторах q , когда $2\omega_p(q) < 1/\tau$ частота плазмона является чисто мнимой, т.е. плазмона как колебания не существует. При увеличении q действительная часть становится отличной от нуля.

Влияние электромагнитного запаздывания на спектр и свойства 2D плазмонов в системе с конечным временем релаксации электронов τ в рамках модели Друде без внешнего магнитного поля было исследовано в работе Фалько и Хмельницкого [8]. Формально, было рассмотрено дисперсионное уравнение (12) с подстановкой (4) при магнитном поле равном нулю. В этом случае спектр состоит из ТЕ и ТМ мод. В работе [8] было показано, что ТЕ-мода является чисто релаксационной, т.е. мода этого типа затухает без осцилля-

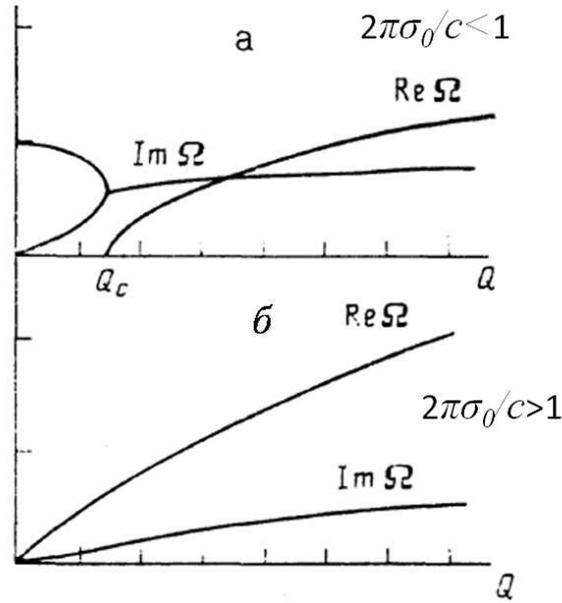


Рис. 3. Изображение спектра плазмон-поляритонов при разной проводимости 2D ЭС σ_0 : а) $2\pi\sigma_0/c < 1$, б) $2\pi\sigma_0/c > 1$. Рисунок взят из работы [8]. 2D ЭС находится в вакууме: $\kappa = 1$. По вертикальной оси отложена безразмерная частота плазмон-поляритона $\Omega = \omega\tau$, где τ – время релаксации импульса электрона; по горизонтальной оси отложен безразмерный волновой вектор $Q = qct$.

ций. Однако ТМ-мода проявляет неожиданные свойства. Спектр ТМ-моды представлен на рис. 3. Видно, что характерный вид спектра сильно зависит от величины безразмерной проводимости $\tilde{\sigma} = 2\pi\sigma_0/c$ (σ_0 – статическая удельная проводимость 2D ЭС, имеющая в системе единиц СГС размерность скорости); для простоты рассматривается 2D ЭС, помещенная в вакуум: $\kappa = 1$. Если проводимость 2D ЭС «мала» $\tilde{\sigma} < 1$, см. рис. 3а, то запаздывание качественно не влияет на вид спектра. При малых волновых векторах плазмон затухает, условие $\omega' \geq \omega''$ выполняется с конечных значений ω' и волнового вектора q . Однако при «большой» проводимости 2D системы $\tilde{\sigma} > 1$ спектр плазмон-поляритонов сильно изменяется, см. рис. 3б. Видно, что при такой проводимости системы плазмон-поляритон добротен, т. е. $\omega' \gtrsim \omega''$, при любых волновых векторах q и частотах ω' , даже при частотах $\omega' < 1/\tau$. Действи-

тельно, в длинноволновом пределе $q \rightarrow 0$ спектр имеет асимптотику [8]:

$$\omega = \frac{\tilde{\sigma}cq}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 - 1}} - i\tau \left(\frac{\tilde{\sigma}cq}{\tilde{\sigma}^2 - 1} \right)^2. \quad (14)$$

Из асимптотики видно, что $\omega' \propto q$, $\omega'' \propto q^2$, поэтому при малых q плазмон-поляритон добротный: $\omega' \gg \omega''$. Пороговое значение удельной проводимости $c/(2\pi)$ соответствует удельному сопротивлению 188 Ом/□. Для характерной концентрации электронов в 2D ЭС $n_0 = 3 \cdot 10^{11}$ см⁻² значение пороговой проводимости соответствует подвижности $\mu \approx 10^5$ см²/(В·с). Такая подвижность вполне достижима, например, в 2D ЭС на основе квантовых ям GaAs/AlGaAs.

Групповая скорость плазмон-поляритонов направлена вдоль плоскости 2D ЭС и при $\omega' \gg \omega''$ определяется формулой [8]:

$$V_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} \frac{1}{1 + (\partial(Im\beta)/\partial q)^2}. \quad (15)$$

Отметим появление второго множителя в этой формуле, который связан с движением вдоль оси, перпендикулярной плоскости 2D ЭС: по мере распространения вдоль плоскости 2D ЭС, плазмон-поляритон «прижимается» к 2D ЭС.

При распространении плазмон-поляритона энергия переносится в двух направлениях: вдоль 2D ЭС и к ней. Появление нормальной компоненты вектора Пойтинга связано с переносом энергии к 2D ЭС, в которой происходит диссипация за счёт конечного τ . При $\tilde{\sigma} > 1$ угол θ между вектором Пойтинга и нормалью к плоскости 2D ЭС определяется следующей формулой:

$$\cos\theta = \frac{c}{2\pi\sigma_0}. \quad (16)$$

При $\sigma_0 \gg c/2\pi$ энергия практически полностью переносится вдоль 2D ЭС.

Отметим, что плазмон-поляритоны также исследовались в двухслойной диссипативной ЭС [57], в диссипативной 2D ЭС с учётом подложки конечной толщины [58], а также в 2D ЭС, находящейся на границе раздела сред с

разной величиной диэлектрической проницаемости, помещённой в магнитное поле [59, 60].

2. Краевые плазмоны

Как известно, в 2D ЭС с границей существует краевой плазмон (если 2D ЭС находится в магнитном поле, то краевой магнитоплазмон), который локализован вблизи границы и распространяется вдоль неё [4–6, 61–71]. Для случая прямолинейной границы 2D ЭС закон дисперсии краевого плазмона в квазистатическом пределе $\omega_{edge}(q)$ похож на закон дисперсии объёмного плазмона (плазмона в системе без границы) (13):

$$\omega_{edge}(q) = \sqrt{\alpha^2 \omega_p^2(q) - 1/4\tau^2} - i/2\tau, \quad (17)$$

где q – волновой вектор вдоль границы, константа $\alpha \approx 0.906$ согласно точному решению задачи [5], $\alpha = \sqrt{2/3} \approx 0.816$ согласно приближённому решению [6], т.е. частота краевого плазмона составляет примерно 90% от частоты объёмного с тем же q . При $\omega'\tau \ll 1$ краевой плазмон сильно затухает, как и объёмный плазмон в квазистатическом пределе.

Длина локализации краевого плазмона вглубь образца составляет примерно $(0.57 \cdot q)^{-1}$ [65], т.е. по порядку величины совпадает с длиной волны краевого плазмона.

В последнее время идёт активное экспериментальное исследование плазмонов в ограниченных 2D ЭС в условиях, когда важны эффекты электромагнитного запаздывания [10, 11, 72–78]. Однако, существует недостаток теоретических работ по спектрам плазмон-поляритонов в ограниченных 2D ЭС.

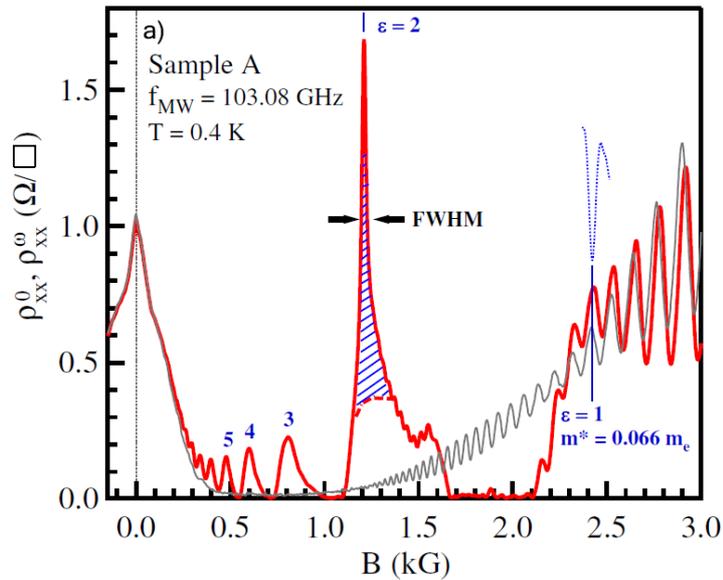


Рис. 4. Сопротивление 2D ЭС как функция магнитного поля: красная линия – при микроволновом облучении, серая – без облучения. Синим заштрихован пик на удвоенной циклотронной частоте. Рисунок взят из работы [23].

3. 2D электронные системы в магнитном поле под действием микроволнового излучения

Исследования микроволнового отклика двумерной электронной системы с очень высокой подвижностью электронов при низких температурах в магнитном поле вызывают большой интерес (см., например, обзор [20]). Известно, что статическое сопротивление 2D ЭС в перпендикулярном магнитном поле меняется уже при небольшой мощности микроволновой накачки: оно осциллирует при изменении магнитного поля с периодом, определяемым отношением частоты облучения Ω к циклотронной частоте электронов в 2D ЭС ω_c [18, 19]. При увеличении мощности облучения минимумы осцилляций углубляются, достигая нулевых значений [21, 22].

Недавно в системах с ещё большей подвижностью был обнаружен новый эффект [23–26]: появление дополнительного аномально высокого и узкого пика сопротивления 2D ЭС, возникающего, когда частота микроволнового излучения Ω находится вблизи $2\omega_c$, см. рис. 4. Происхождение этого эффекта

неясно. В данной диссертации будет предложен возможный механизм, объясняющий появления данного пика в фотосопротивлении. Отметим также, что без внешнего излучения в структурах отмечался эффект сильно чувствительного к температуре гигантского отрицательного магнетосопротивления [79] (giant negative magnetoresistance – GNMR).

4. Параметрический резонанс

Параметрическими обычно называют системы, параметры которых периодически изменяются во времени и (или) в пространстве.

Простейшая параметрическая система – математический маятник с изменяющейся со временем длиной нити или перемещающейся точкой подвеса. Математический анализ такого рода параметрических систем приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых периодически зависят от времени.

Параметрический резонанс как правило возникает, когда характерная частота изменения параметров системы того же порядка, что и характерные собственные частоты. Параметрический резонанс характеризуется появлением экспоненциально быстро нарастающих со временем колебаний на собственной частоте (или частотах) системы.

Рассмотрим условия возникновения параметрического резонанса на примере уравнения Матье, которым описываются колебания маятника с изменяющейся собственной частотой ω_i :

$$\ddot{y}(t) + y(t)\omega_i^2(1 + a \cos \Omega t) = 0, \quad (18)$$

где точка обозначает производную по времени, постоянная a мала: $a \ll 1$ ($a > 0$), Ω – частота изменения параметра системы, в данном случае – собственной частоты.

Оказывается, что параметрический резонанс может возникать, если Ω

находится вблизи $2\omega_i/N$, где N – любое целое число [80].

Рассмотрим более подробно основной параметрический резонанс, возникающий когда Ω находится вблизи $2\omega_i$. Для описания этого резонанса решение уравнения (18) можно искать в виде:

$$y(t) = B(t) \sin(\Omega t/2) + C(t) \cos(\Omega t/2), \quad (19)$$

где $B(t)$, $C(t)$ – медленные функции времени: $\dot{B} \ll \Omega B$, $\dot{C} \ll \Omega C$. Такой вид решения не является точным, в действительности функция $y(t)$ должна содержать ещё гармоники $3\Omega/2$, $5\Omega/2$ и т.д. Однако они будут более высокого порядка малости по a , и в первом приближении ими можно пренебречь [80].

Подставляем решение в виде (19) в уравнение Матье (18) и приравняем коэффициенты при гармониках к нулю, оставляя только члены, линейные по a . Получаем

$$\begin{aligned} \sin(\Omega t/2) : \quad & -\dot{C}\Omega - B\Omega^2/4 + B\omega_i^2 - B\omega_i^2 a/2 = 0, \\ \cos(\Omega t/2) : \quad & \dot{B}\Omega - C\Omega^2/4 + C\omega_i^2 + C\omega_i^2 a/2 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где считали, что $\dot{B}(t)$ порядка $a\omega_i B(t)$, то же для $C(t)$; вторые производные $B(t)$ и $C(t)$ имеют малость a^2 , поэтому ими пренебрегаем.

Ищем решение для $B(t)$ и $C(t)$ в виде $\exp(st)$, находим

$$s = \pm \frac{1}{2\Omega} \sqrt{a^2\omega_i^4 - (4\omega_i^2 - \Omega^2)^2/4}. \quad (21)$$

Таким образом видно, что появляются экспоненциально нарастающие во времени решения, если выполнено условие $2a\omega_i^2 > |4\omega_i^2 - \Omega^2|$. Разность $|2\omega_i - \Omega|$ называют расстройкой резонанса. Видно, что при нулевой расстройке ($\Omega = 2\omega_i$) параметрический резонанс возникает при сколь угодно малом a . Однако, эта ситуация меняется при наличии в системе трения. Если добавить в левую часть уравнения (18) слагаемое $\gamma\dot{y}(t)$, описывающее вязкое трение, то выражение для s примет следующий вид:

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2\Omega} \sqrt{a^2\omega_i^4 - (4\omega_i^2 - \Omega^2)^2/4}. \quad (22)$$

Условие возникновения параметрического резонанса станет следующим:

$$a^2\omega_i^4 \geq \gamma^2\Omega^2 + (4\omega_i^2 - \Omega^2)^2/4. \quad (23)$$

Таким образом, при наличии трения (и нулевой расстройке) параметрический резонанс развивается при величине a , большей $\gamma\Omega/\omega_i^2 = 2\gamma/\omega_i$. Если $a < 2\gamma/\omega_i$, то колебания затухают, см. формулу (22).

В конце отметим, что параметрический резонанс в различных низкоразмерных системах изучался, например, в работах [81–84].

Глава 1

Магнитоплазмон-поляритоны в двумерной электронной системе с диссипацией

В этой главе получены и проанализированы спектр и основные свойства магнитоплазмон-поляритонов в двумерной (2D) электронной системе (ЭС) с диссипацией, т.е. с конечным временем релаксации электронов τ . В разделе 1.1 выводится дисперсионное уравнение для плазмон-поляритонов в магнитном поле, далее в разделе 1.2 анализируются спектры магнитоплазмон-поляритонов, в следующем разделе 1.3 кратко рассмотрены структура полей, скорость и поглощение магнитоплазмон-поляритонов. В разделе 1.4 рассмотрено дисперсионное уравнение для экранированного плазмон-поляритона, и в заключительном разделе 1.5 приводятся выводы.

1.1. Введение

Дисперсионное уравнение для 2D магнитоплазмон-поляритонов хорошо известно [44, 45], однако для более последовательного изложения приведем здесь его вывод.

Пусть 2D ЭС расположена в плоскости $z = 0$, магнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль оси z .

Запишем уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mu_m\mathbf{j}\delta(z) + \frac{\varkappa\mu_m}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

где \varkappa , μ_m — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно, далее будем считать $\mu_m = 1$; $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$ — двумерная плотность электрического тока; поперёк 2D системы ток не течет, т.е. $j_z = 0$.

Ищем решения для полей плазмона $\mathbf{E}(x, y, z)$, $\mathbf{B}(x, y, z)$ и плотности тока

$\mathbf{j}(x, y)$ в виде волны, бегущей вдоль 2D системы $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t)$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, причем будем считать, что направление вектора \mathbf{q} совпадает с направлением оси x : $\mathbf{q} = (q, 0)$.

После преобразований уравнений (1.1), получим следующие уравнения для связи полей и токов:

$$-\frac{d^2 E_y(z)}{dz^2} + \beta^2 E_y(z) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_y \delta(z), \quad \frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} - \beta^2 E_x(z) = -\frac{4\pi\beta^2}{i\omega\kappa} j_x \delta(z), \quad (1.2)$$

где $\beta = \sqrt{q^2 - \kappa\omega^2/c^2}$, знак корня выбираем так, чтобы $\text{Re}\beta \geq 0$.

Решаем эти два дифференциальных уравнения, используя граничные условия на бесконечности по z : $E_{x,y}(z)|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0$. Получаем решения

$$E_y(z) = \frac{2\pi i\omega}{c^2\beta} j_y \exp(-\beta|z|), \quad E_x(z) = -\frac{2\pi\beta}{i\omega\kappa} j_x \exp(-\beta|z|). \quad (1.3)$$

Чтобы найти дисперсионное уравнение, подставим в уравнения (1.3) значение $z = 0$:

$$E_y(0) = \frac{2\pi i\omega}{c^2\beta} j_y, \quad E_x(0) = \frac{2\pi\beta}{i\omega\kappa} j_x. \quad (1.4)$$

Осталось наложить связь на токи j_x, j_y и электрические поля $E_x(0), E_y(0)$ в 2D ЭС, т.е. записать материальные уравнения. В простейшем случае, т.е. без внешнего магнитного поля, в отсутствие анизотропии в 2D системе и т.п., имеем $j_{x,y} = \sigma E_{x,y}$, где σ — проводимость 2D ЭС, которая в общем случае может зависеть от частоты ω и волнового вектора \mathbf{q} . После подстановки такой связи между токами и полями, первое уравнение (1.4) дает дисперсионное уравнение так называемой ТЕ волны, второе уравнение (1.4) — ТМ волны; таким образом, ТМ и ТЕ волны «отделяются». ТЕ волна имеет 2 магнитные компоненты и одну электрическую (H_x, E_y, H_z), причём электрическая компонента ортогональна волновому вектору. ТМ волна имеет 2 электрических и одну магнитную компоненту (E_x, H_y, E_z), магнитная компонента ортогональна волновому вектору. ТМ волна, без учета электромагнитного запаздывания и в отсутствие диссипации, соответствует обычному 2D плазмону с корневым законом дисперсии (5).

При наличии внешнего магнитного поля, ортогонального 2D ЭС, связь между токами и электрическими полями становится сложнее: $\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}$, где $\hat{\sigma}$ — тензор проводимости, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ — продольная проводимость 2D ЭС, $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ — поперечная проводимость 2D ЭС. После подстановки такой связи в уравнения (1.4), получаем следующее дисперсионное уравнение для магнитоплазмон-поляритонов:

$$\left(1 - \frac{2\pi\sigma_{xx}i\omega}{c^2\beta}\right) \left(1 + \frac{2\pi\sigma_{xx}\beta}{-i\omega\kappa}\right) = -\frac{4\pi^2}{c^2\kappa}\sigma_{xy}^2. \quad (1.5)$$

Обсудим структуру этого уравнения. Приравнивая к нулю первую скобку, получаем дисперсионное уравнение для ТЕ волны, приравнивая к нулю вторую скобку — уравнение для ТМ волны. Правая часть уравнения (1.5) «перемешивает» ТЕ и ТМ волны. Для того, чтобы правая часть была отлична от нуля, нужно, чтобы одновременно было учтено электромагнитное запаздывание (конечность скорости света) и ненулевое внешнее магнитное поле ($\sigma_{xy} \neq 0$).

1.2. Спектры магнитоплазмон-поляритонов

Будем искать спектр в длинноволновом пределе, т.е. когда модуль волнового вектора плазмона q много меньше волнового вектора k_F , соответствующего импульсу Ферми, т.к. именно в этом пределе влияние электромагнитного запаздывания на спектр 2D магнитоплазмонов наиболее сильное. Будем пользоваться классическими формулами Друде для компонент тензора проводимости в магнитном поле (4):

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \frac{(1 - i\omega\tau)}{(1 - i\omega\tau)^2 + \omega_c^2\tau^2}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_0 \frac{-\omega_c\tau}{(1 - i\omega\tau)^2 + \omega_c^2\tau^2}, \quad (1.6)$$

где $\sigma_0 = e^2 n_0 \tau / m$ — статическая проводимость в отсутствие магнитного поля, $\omega_c = eB / mc$ — циклотронная частота электрона в магнитном поле \mathbf{B} , $e > 0$, τ — феноменологическое время электронной релаксации.

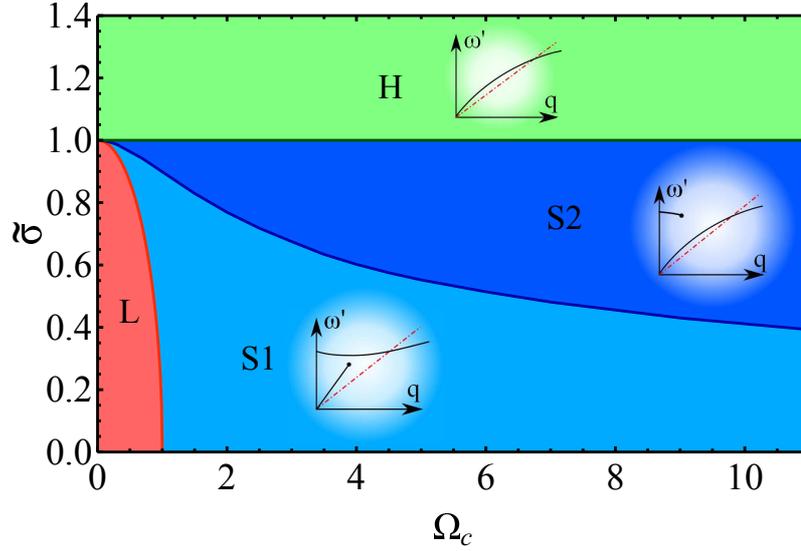


Рис. 1.1. «Фазовая» диаграмма для спектров магнитоплазмон-поляритонов. По осям отложены безразмерная циклотронная частота $\Omega_c = \omega_c \tau$ и безразмерная проводимость 2D ЭС $\tilde{\sigma} = 2\pi\sigma_0/(c\sqrt{\varkappa})$. Характерный вид спектра в соответствующей области схематично представлен на вставках (красный штрих-пунктир — световой конус $\omega = cq/\sqrt{\varkappa}$); более подробно спектры изображены на рис. 1.2–1.5. Граница раздела областей L и S1 определяется уравнением $\Omega_c^2 + \tilde{\sigma}^2 = 1$, граница S2–H определяется условием $\tilde{\sigma} = 1$, граница S1–S2 построена численно, она имеет асимптотики $\tilde{\sigma} \rightarrow 1 - \Omega_c^2/6$ при $\Omega_c \ll 1$, $\tilde{\sigma} \propto 1/\sqrt{\Omega_c}$ при $\Omega_c \gg 1$.

Как было показано в работе [8], характерный вид спектра плазмон-поляритонов (без магнитного поля, при $\varkappa = 1$) зависит от соотношения $2\pi\sigma_0/c$. В нашем же случае магнитоплазмон-поляритонов, помимо параметра безразмерной проводимости $\tilde{\sigma} = 2\pi\sigma_0/(\sqrt{\varkappa}c)$, нужен параметр, отвечающий за магнитное поле. В качестве такого параметра была выбрана циклотронная частота, обезразмеренная на время релаксации электрона в системе: $\Omega_c = \omega_c \tau$. Таким образом, вид спектра магнитоплазмон-поляритонов управляется двумя параметрами: $\tilde{\sigma}$ и Ω_c . Для большей наглядности была построена «фазовая» диаграмма в координатах $(\Omega_c, \tilde{\sigma})$, см. рис. 1.1, на которой были выделены 4 области, отвечающие характерным видам спектра магнитоплазмон-поляритонов. Разберём спектры во всех четырех областях. Спектры построены в координатах (k, Ω) , где $\Omega = \omega \tau$ – безразмерная частота магнитоплазмон-поляритона, $k = q\sigma\tau/\sqrt{\varkappa}$ – безразмерный волновой вектор.

Область L определяется условием $\Omega_c^2 + \tilde{\sigma}^2 < 1$, т.е. малые проводимости

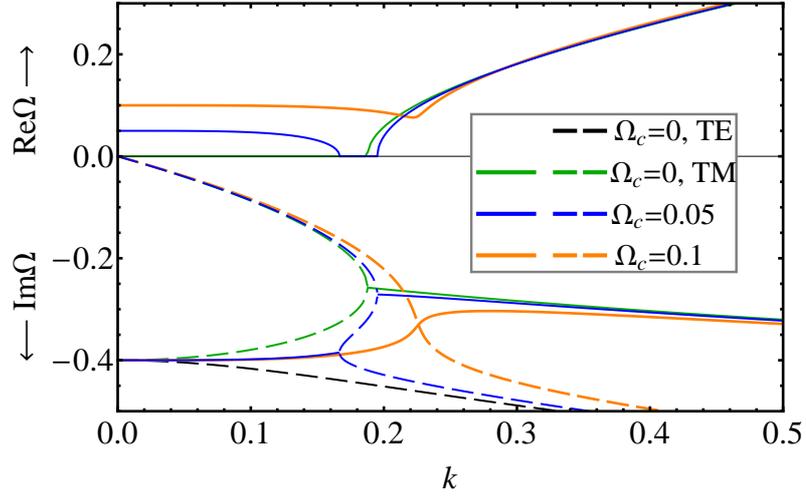


Рис. 1.2. Спектр магнитоплазмон-поляритонов в области L ($\Omega_c^2 + \tilde{\sigma}^2 < 1$, см. рис. 1.1) при проводимости $\tilde{\sigma} = 0.6$. По вертикальной оси вверх от нуля отложена действительная часть $Re\Omega(k)$ безразмерной частоты магнитоплазмон-поляритона $\Omega = \omega\tau$, вниз от нуля отложена мнимая часть частоты $Im\Omega(k)$. По горизонтальной оси отложен безразмерный волновой вектор $k = qct/\sqrt{\kappa}$. Сплошные линии для $Re\Omega$ и $Im\Omega$ соответствуют друг другу, пунктирные линии для $Im\Omega$ соответствуют модам с $Re\Omega = 0$, т.е. чисто релаксационным модам. Разным цветам соответствуют графики, построенные для разных величин магнитного поля, которое определяется с помощью безразмерной циклотронной частоты $\Omega_c = \tau eB/mc$: $\Omega_c = 0$ (черный и зеленый), $\Omega_c = 0.05$ (синий) и $\Omega_c = 0.1$ (оранжевый).

и магнитные поля. Спектры для $\tilde{\sigma} = 0.6$ при различных магнитных полях представлены на рис. 1.2. В отсутствие магнитного поля спектр представляет из себя ТМ и ТЕ моды, обозначенные на рис. 1.2 черной и зелёной линиями соответственно. Данные спектры были подробно проанализированы в работе [8]. ТЕ мода является чисто релаксационной при всех k , ТМ мода чисто релаксационная при величине волнового вектора меньше порогового значения.

В ненулевом магнитном поле ТЕ и ТМ моды «перемешиваются». Одна ветвь в спектре при малых k остаётся чисто релаксационной (см. оранжевый пунктир на рис. 1.2) и имеет асимптотику при $k \rightarrow 0$:

$$\Omega(k) = -ik \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 + 1}{\sqrt{(\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 + 1)^2 - 4\tilde{\sigma}^2}}} - \frac{1}{2} \quad (1.7)$$

Асимптотика другой ветви при $k \rightarrow 0$:

$$\Omega(k) = \Omega_c - i(1 - \tilde{\sigma}) + \frac{-\tilde{\sigma}(\tilde{\sigma} - i\Omega_c)}{8\Omega_c(\Omega_c - i(1 - \tilde{\sigma}))^4} k^4, \quad (1.8)$$

т.е. при $k = 0$ эта ветвь имеет действительную часть частоты Ω_c , мнимую часть $1 - \tilde{\sigma}$. При увеличении волнового вектора эта ветка может становиться чисто релаксационной (см. синюю сплошную ветвь на рис. 1.2), если магнитное поле не очень большое.

При $k \rightarrow \infty$ одна ветвь имеет чисто релаксационную асимптотику $\Omega \rightarrow -i$, другая стремится к спектру обычного 2D магнитоплазмона:

$$\Omega(k) = \sqrt{\Omega_c^2 + \tilde{\sigma}k - 1/4} - i/2. \quad (1.9)$$

Области S1 и S2 определяются условиями $\Omega_c^2 + \tilde{\sigma}^2 > 1$ и $\tilde{\sigma} < 1$, т.е. достаточно сильное магнитное поле и не очень большая проводимость 2D ЭС. В этой области, помимо двух ветвей в спектре магнитоплазмон-поляритонов, которые были в фазе L, появляется дополнительная ветвь. Рассмотрим спектр в области параметров S1 (разница спектров в областях S1 и S2 будет обсуждена ниже).

Спектр представлен на рис. 1.3. Ветвь спектра, обозначенная оранжевой линией «2», соответствует сплошной оранжевой линии в фазе L (см. рис. 1.2) и имеет такую же асимптотику (1.8) при $k \rightarrow 0$. Далее, в спектре в области S1 есть чисто релаксационная ветвь, обозначенная зелёным на рис. 1.3, она имеет асимптотику (1.7) при $k \rightarrow 0$ и качественно ведёт себя как оранжевый пунктир на рис. 1.2. И, кроме того, в спектре присутствует новая ветвь, обозначенная «1» на рис. 1.3. При $k \rightarrow 0$ эта ветвь имеет асимптотику

$$\Omega(k) = k \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 + 1}{\sqrt{(\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 + 1)^2 - 4\tilde{\sigma}^2}}} - ik^2 \tilde{\sigma}^2 \frac{\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 - 1}{((\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 + 1)^2 - 4\tilde{\sigma}^2)^{3/2}}, \quad (1.10)$$

т.е. является добротной при сколь угодно малых k (т.к. $Re\Omega \propto k$, $Im\Omega \propto k^2$), и следовательно, сколь угодно малых частотах. Ветвь «1» имеет точку окон-

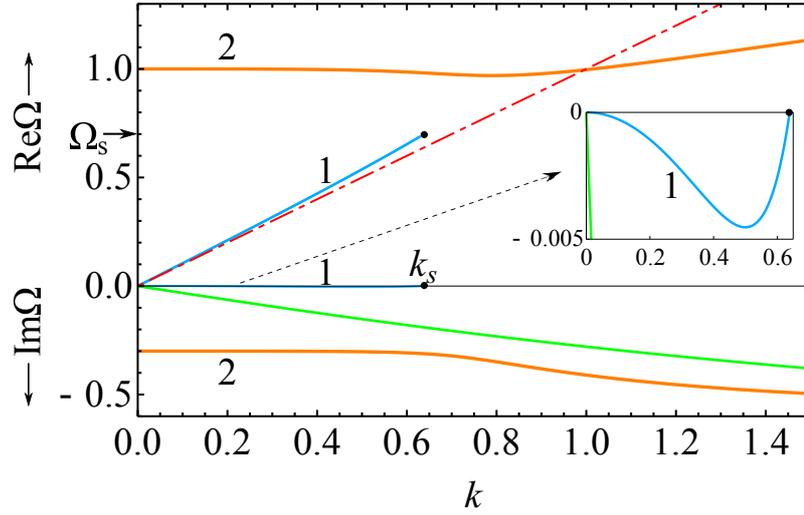


Рис. 1.3. Спектр магнитоплазмон-поляритона в фазе S1 (см. рис. 1.1) для параметров системы $\tilde{\sigma} = 0.7$ и $\Omega_c = 1$. Обозначения осей те же, что и на рис. 1.2. Для данных параметров системы спектр магнитоплазмон-поляритона состоит из трёх ветвей. Ветвь, изображенная зелёным, является чисто релаксационной ($Re\Omega = 0$). Бесщелевая ветвь «1» имеет точку окончания (k_s, Ω_s) , в которой мнимая часть частоты обращается в нуль $Im\Omega_s = 0$; значения k_s и Ω_s определяются формулами (1.11). Отметим, что формально решение дисперсионного уравнения (1.5) для этой ветки существует и при больших волновых векторах k , но это решение имеет $Re\beta < 0$, что отвечает нарастанию амплитуды магнитоплазмон-поляритона в пространстве вдоль оси z ; такие решения не рассматриваются. Ветвь «2» имеет щель Ω_c при $k = 0$, при больших k она соответствует обычному магнитоплазмону (1.9). Красный штрих пунктир соответствует световому конусу $\Omega = k$. На вставке: увеличенная часть графика для $Im\Omega$.

чания (k_s, Ω_s) , в которой мнимая часть частоты обращается в нуль. Положение этой точки определяется формулами

$$\Omega_s^2 = \tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 - 1, \quad k_s^2 = \frac{2(\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 - 1)}{1 + \sqrt{1/(1 - \tilde{\sigma}^2)}}. \quad (1.11)$$

Отметим, что формально решение дисперсионного уравнения (1.5) существует и при $k > k_s$, однако для него $Im\Omega > 0$, а $Re\beta < 0$, т.е. амплитуда полей магнитоплазмон-поляритона нарастает как во времени, так и в пространстве при удалении от плоскости 2D ЭС. Такое решение мы не рассматриваем, т.к. оно не удовлетворяет условию спадания поля в обе стороны по z . Точка (k_s, Ω_s) находится на ветви «1» в фазе S1. Однако, при увеличении магнит-

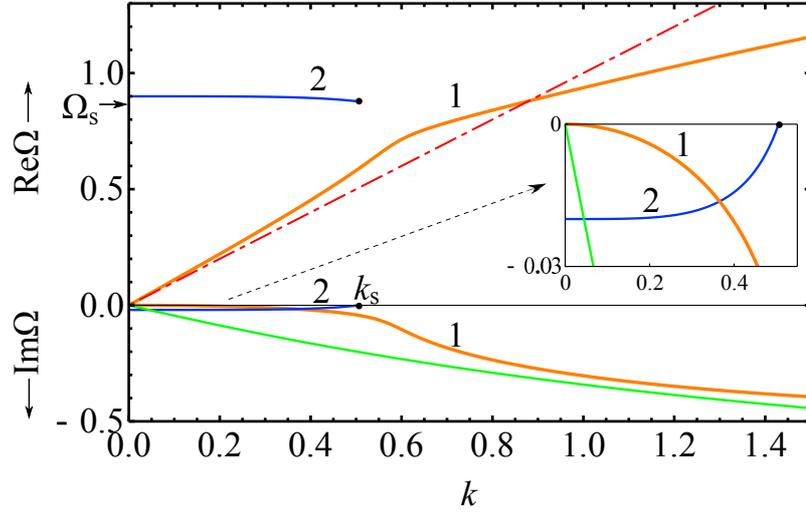


Рис. 1.4. Спектр магнитоплазмон-поляритона для области S2 (см. рис. 1.1) для параметров системы $\tilde{\sigma} = 0.98$ и $\Omega_c = 0.9$. Обозначения те же, что и на рис. 1.3. Точка окончания (k_s, Ω_s) находится на ветке «2». На вставке изображена увеличенная часть графика для $Im\Omega$.

ного поля или проводимости 2D ЭС, ветви «1» и «2» сближаются, и точка (k_s, Ω_s) «переходит» на вторую ветвь, и мы попадаем в область параметров S2 (см. рис. 1.1).

Спектр магнитоплазмон-поляритонов для области параметров S2 представлен на рис. 1.4. Теперь точка окончания (k_s, Ω_s) находится на ветке «2». При малых волновых векторах k ветви «1» и «2» имеют асимптотики (1.10) и (1.8) соответственно. При больших значениях k ветвь «1» имеет асимптотику обычного 2D магнитоплазмона (1.9).

По мере увеличения проводимости $\tilde{\sigma}$ до единицы, точка окончания ветки «2» (k_s, Ω_s) стремится к вертикальной оси, т.к. $k_s \rightarrow 0$ при $\tilde{\sigma} \rightarrow 1 - 0$, см. формулу (1.11). При переходе через значение $\tilde{\sigma} = 1$ ветвь «2» пропадает и мы переходим к фазе Н.

Спектр магнитоплазмон-поляритонов в области Н представлен на рис. 1.5. В спектре две ветви, одна из них чисто релаксационная (изображена пунктиром на рис. 1.5). Без магнитного поля эта ветвь соответствует ТЕ моде. Вторая ветвь изображена на рис. 1.5 сплошными линиями. Без магнитного поля она соответствует ТМ моде, при наличии магнитного поля она соот-

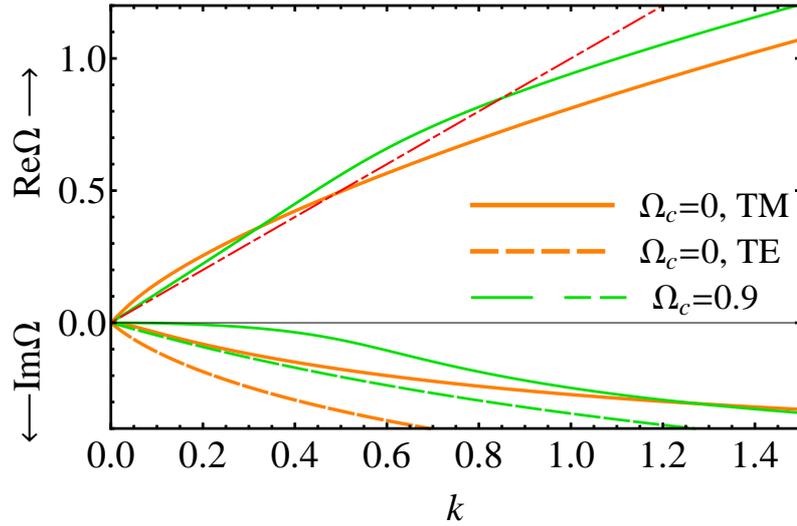


Рис. 1.5. Спектр магнитоплазмон-поляритонов для безразмерной проводимости системы $\tilde{\sigma} = 1.2$ и различных магнитных полей (область Н на рис. 1.1). Обозначения осей те же, что и на рис. 1.2. Оранжевый и зелёный цвета соответствуют нулевому $\Omega_c = 0$ и ненулевому $\Omega_c = 0.9$ магнитным полям ($\Omega_c = \tau|e|B/mc$). Сплошная и пунктирная линии обозначают две ветви в спектре. В нулевом магнитном поле сплошной линией изображена ТМ мода, пунктирной – ТЕ. Красным штрих-пунктиром изображён двумерный световой конус $\Omega = k$.

ветствует ветке «1» из фазы S2. При $k \rightarrow 0$ для этой ветки выполняется асимптотика (1.10), для релаксационной — асимптотика (1.7). При $k \rightarrow \infty$ для релаксационной ветки имеет место асимптотика $\Omega \rightarrow -i$, другая ветвь имеет асимптотику обычного магнитоплазмона (1.9).

1.3. Свойства магнитоплазмон-поляритонов

У всех рассмотренных магнитоплазмон-поляритонов поля убывают при удалении от плоскости $z = 0$, в которой находится 2D ЭС, по закону $\exp(-\beta|z|)$ с $Re\beta > 0$, за исключением точки (k_s, Ω_s) , в которой $Re\beta = 0$, т.е. поля плазмона становятся полностью делокализованы, их амплитуда не спадает при удалении от плоскости 2D ЭС, см. рис. 1.6.

Мнимая часть β связана с z -компонентой фазовой скорости. Оказывается, что фазовая скорость имеет компоненту, направленную к 2D ЭС (фронт магнитоплазмон-поляритона частично движется вниз для $z > 0$, вверх – для

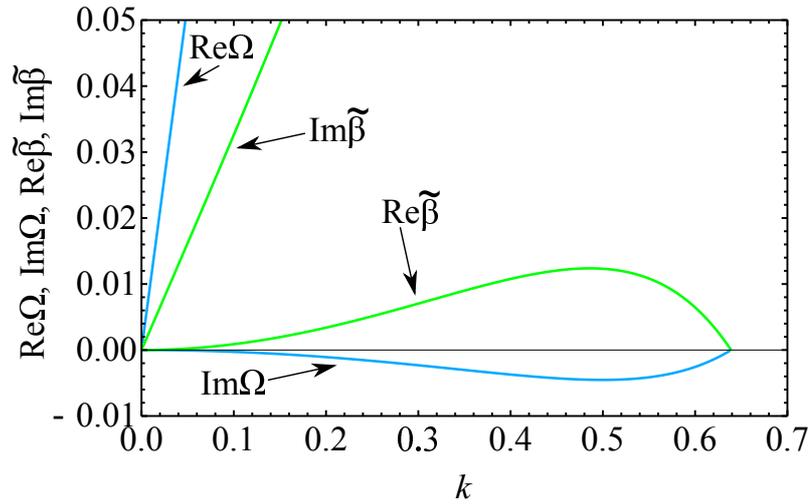


Рис. 1.6. Спектр ветки «1» магнитоплазмон-поляритона для параметров $\tilde{\sigma} = 0.7$ и $\Omega_c = 1$ (фаза S1) изображен голубым. Зелёным изображены действительная и мнимая части безразмерной β : $\tilde{\beta} = \beta \tau c / \sqrt{\kappa}$. Действительная часть β отвечает за локализацию магнито-плазмон-поляритона в направлении z , мнимая часть – за фазовую скорость. Т.к. $Im\beta > 0$, то фазовая скорость направлена к плоскости 2D ЭС. В точке (k_s, Ω_s) $Re\beta = 0$, т.е. магнито-плазмон-поляритон становится делокализованным.

$z < 0$).

Групповую скорость для магнитоплазмон-поляритонов нельзя вычислять по обычной формуле $\partial\omega/\partial q$, т.к. ω является комплексной, но, что более важно, магнитоплазмон-поляритон не является плоской волной. Его волной фронт состоит из двух полуплоскостей (в областях $z > 0$ и $z < 0$, см. [8]); для случая таких волн (если бы не было затухания), групповая скорость определяется формулой [8]:

$$V_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} \frac{1}{1 + (\partial(Im\beta)/\partial q)^2}. \quad (1.12)$$

Видно, что есть дополнительный множитель, связанный с $Im\beta$. Отметим, что наличие $Im\beta \neq 0$ для случая магнитоплазмон-поляритонов как раз связано с ненулевой мнимой частью частоты магнитоплазмон-поляритона $Im\Omega \neq 0$, т.е. с затуханием. Если нет затухания ($Im\Omega = 0$), то второй множитель в формуле (1.12) становится единичным (волновой фронт магнитоплазмон-поляритона становится плоским) и получаем обычную формулу для групповой скорости.

Обсудим также направление вектора Пойтинга \mathbf{N} и скорости переноса энергии $\mathbf{V} = \mathbf{N}/w$, где w – плотность энергии магнитоплазмон-поляритона.

При конечной диссипации в 2D ЭС ($\tau \neq \infty$) вектор Пойтинга имеет ненулевую компоненту, направленную к 2D ЭС, т.к. именно в 2D ЭС происходит выделение энергии. Также вектор Пойтинга имеет компоненту, направленную вдоль волнового вектора магнитоплазмон-поляритона q , что соответствует переносу энергии вдоль 2D ЭС. Таким образом энергия переносится к 2D ЭС и вдоль неё. Конечно же, это означает, что энергия подводится к 2D системе. В рассмотренном случае бесконечной системы энергия подводится из пространства около 2D ЭС, т.е. считается, что в начальный момент времени было создано распределение полей, соответствующее плазмон-поляритону, а значит в пространстве около 2D ЭС была ненулевая плотность энергии; со временем энергия «движется» к 2D ЭС, в которой происходит диссипация, и плазмон-поляритон затухает. В реальном образце энергия должна подводиться от источников тока, напряжения, внешней возбуждающей электромагнитной волны или т.п. в зависимости от конкретной реализации.

Выражения для (усреднённой) скорости переноса энергии в точке окончания (k_s, Ω_s) для $z > 0$ имеют вид (волновой вектор q направлен вдоль оси x):

$$V_x^{av} = \frac{c}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\tilde{\sigma}^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\tilde{\sigma}^2}}}, \quad V_z^{av} = -\frac{c}{\sqrt{\varkappa}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\tilde{\sigma}^2}}{1+\sqrt{1-\tilde{\sigma}^2}}}, \quad V_y^{av} = 0, \quad (1.13)$$

V_z^{av} меняет знак для $z < 0$. Полная скорость $V^{av} = \sqrt{(V_x^{av})^2 + (V_z^{av})^2} = c/\sqrt{\varkappa}$.

Обсудим также поляризацию магнитоплазмон-поляритона, т.е. соотношение между E_x и E_y . Введем комплексный коэффициент поляризации $\delta = E_x/E_y$ ($E_{x,y}$ – комплексные). Выражение для δ через Ω и k выглядит следующим образом:

$$\delta(k, \Omega) = \frac{1 - i\Omega}{-\Omega_c} \left(\frac{(k^2 - 2\Omega^2)((1 - i\Omega)^2 + \Omega_c^2)}{\Omega^2((1 - i\Omega)^2 + \Omega_c^2 + \tilde{\sigma}^2)} + 1 \right). \quad (1.14)$$

Например, в случае $\tilde{\sigma} < 1$ для точки $\Omega = \Omega_c - i(1 - \tilde{\sigma})$, $k = 0$ получаем

$\delta = -i$, что соответствует активной циркулярной поляризации. Для точки (k_s, Ω_s) введём $\delta(k_s, \Omega_s) = |\delta_s| \exp(i\psi)$ и получим

$$|\delta_s| = \frac{1 - \sqrt{1 - \tilde{\sigma}^2}}{1 + \sqrt{1 - \tilde{\sigma}^2}}, \quad \tan \psi = \frac{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 - 1}}{\sqrt{1 - \tilde{\sigma}^2}}, \quad (1.15)$$

что соответствует смешанной поляризации.

Рассмотрим также кратко поглощение электромагнитной волны 2D системой. Пусть на 2D ЭС под углом падает плоская электромагнитная волна, причём вектор напряжённости электрического поля перпендикулярен плоскости падения. Используя известные формулы для коэффициентов отражения, прохождения и поглощения (см., например, работу [85]), можно найти поглощение электромагнитной волны в 2D ЭС в зависимости от частоты волны Ω и, например, величины волнового вектора в плоскости 2D ЭС $k_p = \Omega \sin \theta / c$, где θ – угол падения, отсчитанный от нормали. Результат представлен на рис. 1.7. Параметры построения те же, что и при построении спектра в фазе S1 рис. 1.3: $\Omega_c = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.7$. Также на рис. 1.7 нанесена ветка «1» спектра магнитоплазмон-поляритонов. Из рисунка видно, что есть, по крайней мере качественное, соответствие между максимумом в поглощаемой мощности (светлая область на рис. 1.7) и положением ветки «1».

1.4. Экранированный магнитоплазмон-поляритон

Рассмотрим кратко магнитоплазмон-поляритоны в 2D ЭС, на расстоянии d от которой находится идеально проводящий металлический затвор. В этом случае говорят об экранированных плазмонах [3]. Затвор будем моделировать металлом с бесконечной проводимостью. Рассмотрим случай $\beta d \ll 1$, который, как правило, имеет место на эксперименте, т.к. $\beta = \sqrt{q^2 - \kappa\omega^2/c^2}$ порядка обратной длины волны света, обратного характерного размера системы или меньше. В этом пределе дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\left(1 - \frac{4\pi i\omega\sigma_{xx}d}{c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi\sigma_{xx}\beta^2 d}{-i\omega\kappa}\right) = -\frac{(4\pi\sigma_{xy}\beta d)^2}{c^2\kappa}. \quad (1.16)$$

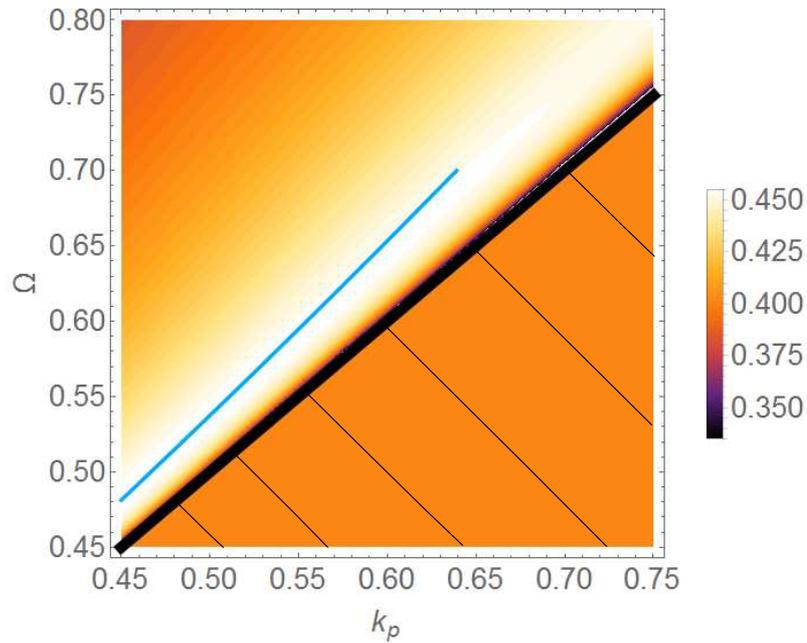


Рис. 1.7. Поглощение внешней электромагнитной волны в 2D ЭС в относительных единицах. По вертикальной оси отложена частота электромагнитной волны, обезразмеренная умножением на τ , по горизонтальной оси – величина волнового вектора волны в плоскости 2D ЭС, обезразмеренная на $\tau c/\sqrt{\varkappa}$. Информативной является только часть графика выше прямой $\Omega = k_p$. Параметры построения те же, что и для спектра в фазе S1, см. рис. 1.3: $\Omega_c = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.7$, сплошной линией (на фоне светлой области) изображена ветка «1» спектра магнитоплазмон-поляритона, эта ветка имеет точку окончания $\Omega_s = 0.7$, $k_s \approx 0.639$. Максимум поглощения (светлая область), по крайней мере качественно, соответствует спектру магнитоплазмон-поляритона.

После подстановки формул Друде (4) в это дисперсионное уравнение, можно получить спектры. Анализ показал, что спектры управляются параметром $V_{gated}^2 \kappa / c^2$, где $V_{gated} = \sqrt{4\pi e^2 n d / m \kappa}$ – скорость экранированных плазмонов (10) [3]. В реальных системах параметр $V_{gated}^2 \kappa / c^2$ всегда много меньше единицы. В этом пределе, высокочастотных при малых волновых векторах мод в спектре экранированных магнитоплазмон-поляритонов не возникает. Качественно спектр похож на спектр обычного экранированного магнито-плазмона, который (при $\tau \rightarrow \infty$) описывается формулой (6), в которой частоту плазмона $\omega_p(q)$ нужно заменить на частоту экранированного плазмона $\omega_{gated}(q)$ (10). Таким образом, электромагнитное запаздывание не оказывает существенного влияния на спектр экранированного магнитоплазмона в приближениях, обозначенных выше.

1.5. Выводы к Главе 1

В рамках классического подхода найдены и проанализированы спектры плазмон-поляритонов в диссипативной 2D ЭС, помещённой во внешнее постоянное магнитное поле, ортогональное плоскости 2D ЭС. Характерный вид спектров можно классифицировать с помощью двух безразмерных параметров: безразмерной проводимости $\tilde{\sigma} = 2\pi\sigma_0 / c\sqrt{\kappa}$ и безразмерной циклотронной частоты $\Omega_c = \omega_c \tau$. При условиях $\Omega_c^2 + \tilde{\sigma}^2 > 1$ и $\tilde{\sigma} < 1$ в спектре плазмон-поляритонов появляется дополнительная ветвь. Также получено, что наличие внешнего магнитного поля «смягчает» условия появления незатухающих при $q \rightarrow 0$ плазмон-поляритонов: вместо условия $\tilde{\sigma} > 1$, которое было без магнитного поля [8], достаточно выполнить условие $\tilde{\sigma}^2 + \Omega_c^2 > 1$.

Глава 2

Краевые плазмон-поляритоны в двумерной электронной системе с диссипацией

В этой главе вычисляется и анализируется спектр плазмона, распространяющегося вдоль прямолинейного края двумерной электронной системы при учёте электромагнитного запаздывания. Задача решается приближённым методом [6]. В разделе 2.1 приводится метод решения и вывод дисперсионного уравнения. В разделе 2.2 анализируется полученное дисперсионное уравнение, а также зависимости потенциалов, плотности тока и заряда от координат. В заключительном разделе 2.3 кратко обсуждаются полученные результаты и приводятся выводы.

2.1. Основные уравнения и метод решения

Рассмотрим 2D ЭС помещённую в вакуум ($\varepsilon = 1$), лежащую в полуплоскости $z = 0$, $x > 0$; граница 2D системы совпадает с осью y . Будем моделировать границу резким скачком концентрации электронов до нуля при $x < 0$.

Нашей задачей будет найти спектр краевого плазмон-поляритона в длинноволновом пределе $q \ll k_F$ (где $\hbar k_F$ — импульс Ферми), т.к. именно в этом случае влияние запаздывания наиболее сильно (т.е. когда длина волны плазмона порядка длины волны света при той же частоте). Поэтому для вывода спектра будем использовать уравнения Максвелла и классическое уравнение для средней скорости электронов (уравнение Эйлера).

Уравнение для средней скорости электронов $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ в линейном приближении можно записать в виде (см., например, [6, 86])

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}/\tau = -s^2 \nabla n/n_0 - e\mathbf{E}/m, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A}/c$ — среднее поле, наведённое электронами, $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ — вектор-потенциал в плоскости 2D ЭС, n — возмущенная 2D концентрация, первое слагаемое в правой части уравнения (2.1) описывает давление, s по порядку величины равно скорости Ферми v_F , $s^2 = 3v_F^2/4$ согласно работе [86].

Уравнения Максвелла для скалярного и векторного потенциалов φ , $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ и A_z в калибровке Лоренца имеют вид

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{A} \\ A_z \end{pmatrix} = 4\pi \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j}/c \\ 0 \end{pmatrix} \delta(z), \quad (2.2)$$

$$\text{div}\mathbf{A} + \partial_z A_z + \partial_t\varphi/c = 0,$$

где $\text{div} = (\partial_x, \partial_y)$ — двумерная дивергенция, $\rho = -en$ — возмущённая электронная плотность, \mathbf{j} — 2D плотность тока, текущего в 2D ЭС. Отметим, что из уравнений (2.2) следует уравнение непрерывности $\partial_t\rho + \text{div}\mathbf{j} = 0$.

Если бы 2D ЭС не имела границы, то уравнения (2.1) и (2.2) давали бы спектры 2D плазмонных ТЕ и ТМ мод [8]; обычному плазмону со спектром (5) соответствует ТМ мода при больших (вдали от световой ветки) волновых векторах. В ограниченной 2D ЭС, ТЕ и ТМ моды «перемешиваются» на границе.

Будем искать решения в виде волны, бегущей вдоль границы 2D ЭС $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, z) \exp(iq_y y - i\omega t)$, $\varphi = \varphi(x, z) \exp(iq_y y - i\omega t)$; $\mathbf{A}(x, z)$, $\varphi(x, z)$ должны спадать при удалении от границы. $A_z = 0$, т.к. нет токов поперёк 2D ЭС. Компоненту вектор-потенциала A_y можно исключить с помощью уравнения калибровки. Поэтому сконцентрируемся на уравнениях для $\varphi(x, z)$ и $A_x(x, z)$:

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2 - \beta^2) \begin{pmatrix} \varphi(x, z) \\ A_x(x, z) \end{pmatrix} = 4\pi e \begin{pmatrix} n(x) \\ \frac{n_0 v_x(x)}{c} \end{pmatrix} \delta(z), \quad (2.3)$$

где мы линеаризовали плотность тока $\mathbf{j} = -en_0\mathbf{v}$, $\beta = \sqrt{q_y^2 - \omega^2/c^2}$; $v_x(x) = 0$ и $n(x) = 0$ при $x < 0$.

Система уравнений (2.3) сводится методом функций Грина к системе интегральных уравнений. Полученную систему уравнений можно пытаться решить методом Винера-Хопфа (см., например, [5]). Однако решение, полученное таким образом (если его вообще удастся получить в явном виде), очень громоздкое и с трудом поддается анализу. Поэтому для получения спектра плазмонов в ограниченных системах часто используют приближённые методы, одним из которых является метод упрощения ядра в интегральном уравнении для $\varphi(x, z)$ (и $A_x(x, z)$), который мы и будем использовать.

Для вычисления закона дисперсии плазмонов в 2D ЭС метод упрощения ядра интегрального уравнения, по-видимому, впервые был применён в работе [6]. В этой работе был вычислен спектр краевого плазмона и магнитоплазмона в геометрии полубесконечной 2D системы с прямолинейной границей в квазистатическом пределе. В случае краевого плазмона (без внешнего магнитного поля) полученный спектр хорошо согласуется со спектром краевого плазмона, полученным из точного решения [5], отличие состоит лишь в величине константы α (см. формулу (17)). Поэтому можно надеяться, что и для спектра краевого плазмон-поляритона этот метод также даст разумные результаты. Упомянем, что этот метод использовался для нахождения спектра плазмона в полосе [87], спектра краевого магнитоплазмона на границе двух двумерных слоёв [88], спектров краевых плазмонов в графене [89] и топологических системах [90, 91].

Суть метода состоит в следующем. Рассмотрим первое уравнение системы (2.3) (второе рассматривается аналогично) при $z = 0$, т. е. в плоскости 2D ЭС, и перейдём к интегральному уравнению относительно x :

$$\varphi(x, z = 0) = -2e \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\beta|x - x'|)n(x')dx', \quad (2.4)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка, которая имеет асимптотики $K_0(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \exp(-|x|)$ при $x \rightarrow \infty$, $K_0(x) = \ln(2/x) - \gamma$ при

$x \rightarrow 0$, где $\gamma \approx 0.577$ – постоянная Эйлера-Маскерони. Метод состоит в замене ядра $K_0(x)$ на более простое ядро $L_0(x)$ так, чтобы у них совпадали площади под графиками функций и вторые моменты (более подробно см. [6] и ссылки внутри). Оказывается, что для ядра $K_0(x)$ в качестве приближённого ядра можно взять $L_0(x) = \pi \exp(-\sqrt{2}\beta x)/\sqrt{2}$. После замены ядра K_0 на L_0 в интегральном уравнении (2.4), получаем, что, т. к. $L_0(x)$ является функцией Грина оператора $(-\partial_x^2 + 2\beta^2)/(2\pi\beta)$, то для $\varphi(x, 0)$ и $A_x(x, 0)$ можно перейти к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 - 2\beta^2)\varphi(x, 0) = 4\pi\beta en(x), \\ (\partial_x^2 - 2\beta^2)A_x(x, 0) = 4\pi\beta en_0 v_x(x)/c, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $n(x)$ и $v_x(x)$ равны нулю при $x < 0$ и отличны от нуля при $x > 0$. Таким образом, вместо интегральных уравнений (2.3) мы получили простые дифференциальные уравнения (2.5).

После подстановки концентрации n из уравнения непрерывности и тока \mathbf{j} из уравнения (2.1) в уравнения (2.5), при $x > 0$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} s^2\varphi''''(x) + (\omega\tilde{\omega} - 2\omega_{p\beta}^2 - 2\beta^2 s^2 - s^2 q_y^2)\varphi''(x) \\ + 2\beta^2(\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega} + s^2 q_y^2)\varphi(x) = 0, \\ A_x''(x) - 2(\beta^2 + \omega_{p\beta}^2 \omega/(\tilde{\omega}c^2))A_x(x) = \\ (2\omega_{p\beta}^2 \varphi'(x) + 2\beta^2 s^2 \varphi'(x) - s^2 \varphi'''(x))/(-i\tilde{\omega}c), \end{cases} \quad (2.6)$$

где введены обозначения $\tilde{\omega} = \omega + i/\tau$, $\omega_{p\beta}^2 = 2\pi e^2 n_0 \beta/m$, штрих обозначает производную по x ; значения $\varphi(x)$ и $A_x(x)$ берутся при $z = 0$. Отметим, что в уравнение для $\varphi(x)$ не вошли компоненты вектор-потенциала. При $x < 0$ имеем, очевидно, простую систему уравнений

$$\begin{cases} (\partial_x^2 - 2\beta^2)\varphi(x) = 0, \\ (\partial_x^2 - 2\beta^2)A_x(x) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Обсудим граничные условия для систем уравнений (2.6) и (2.7). Во-первых, будем искать локализованные вблизи границы решения, т. е. падающие

при $x \rightarrow \pm\infty$. Во-вторых, будем считать, что $\varphi(x)$, $A_x(x)$ и их первые производные непрерывны при $x = 0$, это следует из уравнений (2.5) и отсутствия дельта-образных (а также более сингулярных) зарядов и токов на границе [92]. Наконец, в-третьих, нормальная к границе компонента тока (или скорости) должна обращаться в нуль на границе $v_x(x=0) = 0$.

Теперь переходим к решению систем уравнений (2.6) и (2.7). Решаем сначала уравнения для $\varphi(x)$, получаем:

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{\sqrt{2}\beta x}, \quad x < 0; \quad (2.8)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1 e^{-\lambda_1 x} + \varphi_2 e^{-\lambda_2 x}, \quad x > 0; \quad (2.9)$$

где $\varphi_{0,1,2}$ — константы. При условиях малости s и q_y : $s/c \ll 1$, $|\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}| \gg s^2 q_y^2$, $|2\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}| \gg s^2 |q_y^2 + 2\beta^2|$ имеем:

$$\lambda_1^2 = 2\beta^2 \frac{\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}}{2\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}}, \quad \lambda_2^2 = \frac{2\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}}{s^2}, \quad (2.10)$$

знак $\lambda_{1,2}$ определяется из условия $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$.

Подставляем полученное решение для $\varphi(x)$ при $x > 0$ в правую часть второго уравнения системы (2.6). Решив уравнение для $A_x(x)$, находим:

$$A_x(x) = A_0 e^{\sqrt{2}\beta x}, \quad x < 0; \quad (2.11)$$

$$A_x(x) = A_1 e^{-\lambda_1 x} + A_2 e^{-\lambda_2 x} + A_3 e^{-\gamma x}, \quad x > 0; \quad (2.12)$$

где $A_{0,1,2,3}$ — константы, $\gamma^2 = 2(\beta^2 + \omega_{p\beta}^2 \omega / (\tilde{\omega} c^2))$ и $\text{Re}\gamma > 0$. Константы $A_{1,2}$ однозначно связаны с $\varphi_{1,2}$:

$$A_{1,2} = \varphi_{1,2} \frac{\lambda_{1,2}(2\omega_{p\beta}^2 + 2\beta^2 s^2 - s^2 \lambda_{1,2}^2)}{i\tilde{\omega} c (\lambda_{1,2}^2 - \gamma^2)}. \quad (2.13)$$

Получаем 5 неизвестных констант ($\varphi_{0,1,2}$ и $A_{0,3}$), а также 5 граничных условий в нуле (непрерывность $\varphi(x)$, $A_x(x)$ и их производных, а также зануление тока на границе). Подставляя выражения для $\varphi(x)$ и $A_x(x)$ в граничные условия, можно получить дисперсионное уравнение. При условии, что $\omega\tilde{\omega}$ одного

порядка с $2\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}$, а также условий, использованных при упрощении корней $\lambda_{1,2}$, находим дисперсионное уравнение для краевых плазмон-поляритонов:

$$\omega\tilde{\omega} = D [2\omega_{p\beta}^2(1 - \delta) - \omega\tilde{\omega}], \text{ где } D = \sqrt{\frac{\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}}{2\omega_{p\beta}^2 - \omega\tilde{\omega}}}, \quad (2.14)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{1 + \omega_{p\beta}^2\omega/(c^2\tilde{\omega}\beta^2)} - 1}{D + \sqrt{1 + \omega_{p\beta}^2\omega/(c^2\tilde{\omega}\beta^2)}}.$$

В квазистатическом пределе ($c \rightarrow \infty$) коэффициент $\delta \rightarrow 0$, и мы переходим к известному дисперсионному уравнению для краевых плазмонов [6]. Однако, чтобы получить дисперсионное уравнение (2.14) недостаточно просто заменить q_y на $\sqrt{q_y^2 - \omega^2/c^2}$ в дисперсионном уравнении без запаздывания [6].

2.2. Анализ дисперсионного уравнения

Дисперсионное уравнение (2.14) позволяет найти спектр краевых плазмон-поляритонов. Проанализируем сначала спектр в чистом ($\tau \rightarrow \infty$) пределе. При $q_y \rightarrow 0$ зависимость частоты краевого плазмон-поляритона ω имеет асимптотику $\omega = cq_y$, при этом длина локализации, которая определяется корнем λ_1 и составляет $1/Re\lambda_1$, стремится к бесконечности. При малых, но конечных q_y , зависимость $\omega(q_y)$ для краевого плазмон-поляритона идёт ниже cq_y , длина локализации становится конечной. При $q_y \rightarrow \infty$ эффектами запаздывания можно пренебречь и получаем обычную зависимость для частоты краевого плазмона $\omega = \alpha\sqrt{2\pi e^2 n_0 q_y / m}$, где $\alpha = \sqrt{2/3}$ [6]. Длина локализации составляет $1/Re\lambda_1 \approx \sqrt{2}/q_y$, т.е. по порядку величины совпадает с длиной волны краевого плазмон-поляритона.

Теперь перейдём к спектрам в 2D ЭС с конечным τ . Напомним, что в этом случае частота краевого плазмон-поляритона является комплексной величиной $\omega = \omega' + i\omega''$, мнимая часть частоты соответствует затуханию

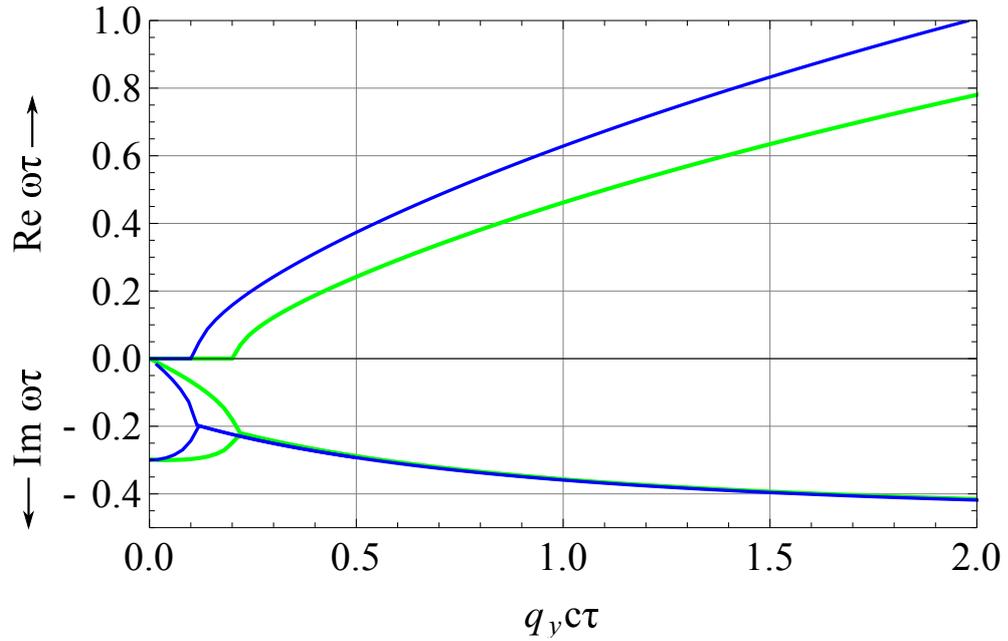


Рис. 2.1. Спектры плазмон-поляритонов при безразмерной проводимости 2D системы $\tilde{\sigma} = 2\pi e^2 n_0 \tau / (mc) = 0.7$. Зелёным обозначен спектр краевого плазмон-поляритона, синим — объёмного с тем же q_y при $q_x = 0$. По вертикальной оси отложены действительная (верхняя часть графика) и мнимая (нижняя часть) части комплексной частоты плазмон-поляритонов, обезразмеренные на время релаксации электрона τ .

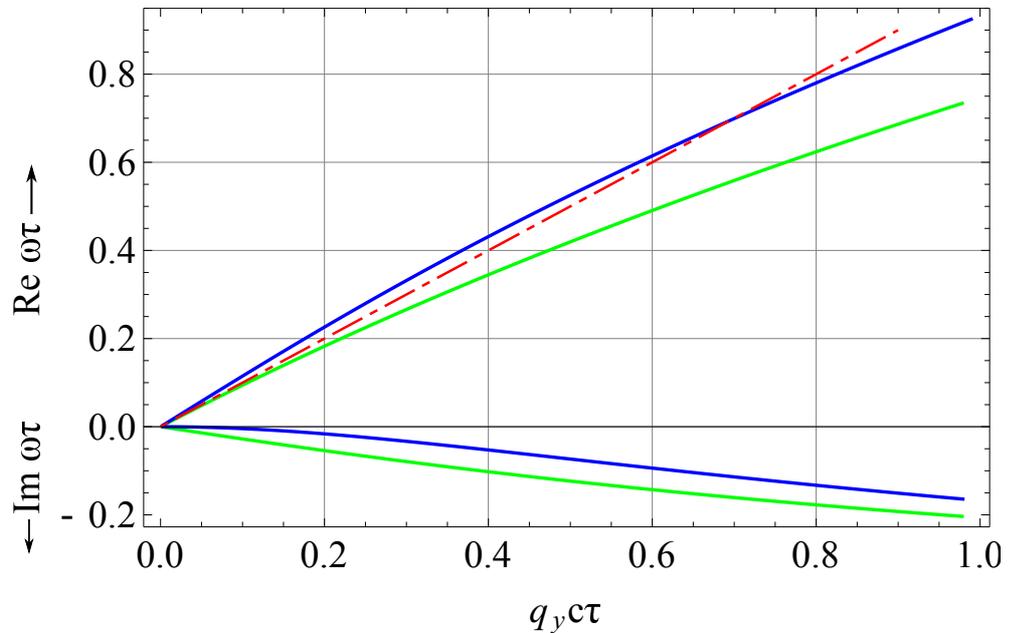


Рис. 2.2. Спектры плазмон-поляритонов при проводимости 2D системы $\tilde{\sigma} = 2$. Обозначения см. на рис. 2.1. Красным штрих-пунктиром обозначен закон дисперсии «одномерного света» $\omega = cq_y$.

плазмона со временем. Рассмотрим сначала 2D ЭС с малой проводимостью: $\tilde{\sigma} = 2\pi\sigma_0/c < 1$ (рис. 2.1). В этом случае при малых волновых векторах спектр краевого плазмон-поляритона чисто релаксационный: $\omega\tau = -i(1 - \tilde{\sigma})$ или $\omega = 0$ при $q_y = 0$. При больших волновых векторах получаем обычный спектр (17) с $\alpha = \sqrt{2/3}$.

При стремлении $\tilde{\sigma}$ к единице снизу, область чистой релаксации сжимается, и при $\tilde{\sigma} = 1$ исчезает.

Характерный вид спектров краевого и объёмного плазмон-поляритонов в случае $\tilde{\sigma} > 1$ представлен на рис. 2.2. В нуле спектр краевого плазмон-поляритона имеет линейную асимптотику и для ω' , и для ω'' , в отличие от объёмного плазмон-поляритона, у которого $\omega' \propto q$, $\omega'' \propto q^2$ при $q \rightarrow 0$ (14). Для описания асимптотики краевого плазмон-поляритона в нуле введём комплексную скорость v : $\omega = vq_y$. График зависимости $v(\tilde{\sigma})$ представлен на рис. 2.3. Зависимость $v(\tilde{\sigma})$ имеет асимптотики:

$$v/c = \begin{cases} \sqrt[4]{3}(1-i)/(2\sqrt[4]{\tilde{\sigma}^2-1}), & \tilde{\sigma} \rightarrow 1+0; \\ 1 - (1+i\sqrt{3})/(4\sqrt[3]{4\tilde{\sigma}^{2/3}}), & \tilde{\sigma} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

Действительная часть скорости $Re v$ больше скорости света c при $1 < \tilde{\sigma} < \tilde{\sigma}_c$, где $\tilde{\sigma}_c \approx 1.57$ (см. рис. 2.3). При $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$, т.е. в чистом пределе, действительная часть скорости v стремится к c снизу, мнимая часть скорости стремится к нулю. $Re v > Im v$ при любой $\tilde{\sigma} > 1$, а значит краевой плазмон-поляритон добротный ($\omega' > \omega''$) при сколь угодно малых q_y и, следовательно, частотах ω' .

Характерная длина локализации поля краевого плазмон-поляритона определяется корнем λ_1 и составляет $1/Re\lambda_1$. При больших значениях q_y (вдали от светового конуса) $Re\lambda_1 \approx q_y/\sqrt{2}$. При $q_y \rightarrow 0$ имеем: $\lambda_1 = q_y$ при $\tilde{\sigma} \rightarrow 1+0$; $\lambda_1 \propto 1/\sqrt[3]{\tilde{\sigma}}$ при $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$. Таким образом, при малых q_y , чем больше проводимость, тем больше область локализации плазмона. При больших q_y область локализации не зависит от проводимости и составляет порядка q_y^{-1} . Харак-

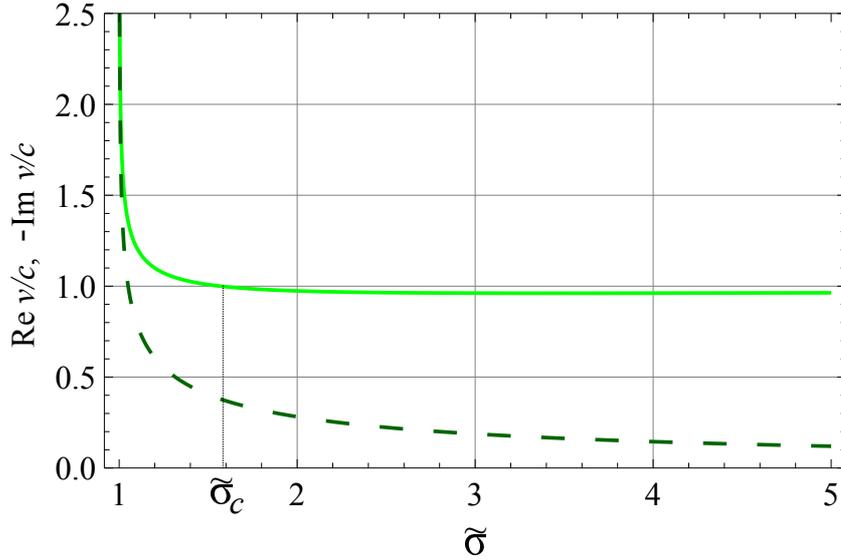


Рис. 2.3. Зависимости действительной $\text{Re } v$ (сплошная линия) и мнимой $\text{Im } v$ (пунктир) частей скорости краевого плазмон-поляритона v при $q_y \rightarrow 0$ от безразмерной проводимости $\tilde{\sigma} > 1$.

терные виды зависимостей $\varphi(x)$ и $A_x(x)$, а также плотности заряда $\rho(x)$ и тока $j_x(x)$, от координаты x , приведены на рис. 2.4 и 2.5. Параметры указаны в подписи к рис. 2.4.

Обсудим теперь пространственное распределение заряда. Одна часть заряда сосредоточена на короткой длине $1/\text{Re}\lambda_2$ (см. вставку на рис. 2.5а), другая — на большой длине $1/\text{Re}\lambda_1$. Оценим количество заряда, сконцентрированное на обеих длинах. Оказывается, что при больших волновых векторах q_y (когда эффекты запаздывания незначительны), на обеих длинах находится примерно одинаковое количество заряда. При $q_y \rightarrow 0$ и $\tilde{\sigma} \rightarrow 1 + 0$ основной заряд расположен на большой длине $1/\text{Re}\lambda_1$. При $q_y \rightarrow 0$ и $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ на длине $1/\text{Re}\lambda_1$ находится примерно 30% всего заряда.

2.3. Обсуждение и выводы к Главе 2

Отметим, что дисперсионное уравнение для краевого плазмон-поляритона в рассматриваемом длинноволновом пределе не зависит от скорости s и может быть получено при формальном предельном переходе $s \rightarrow 0$. Одна-

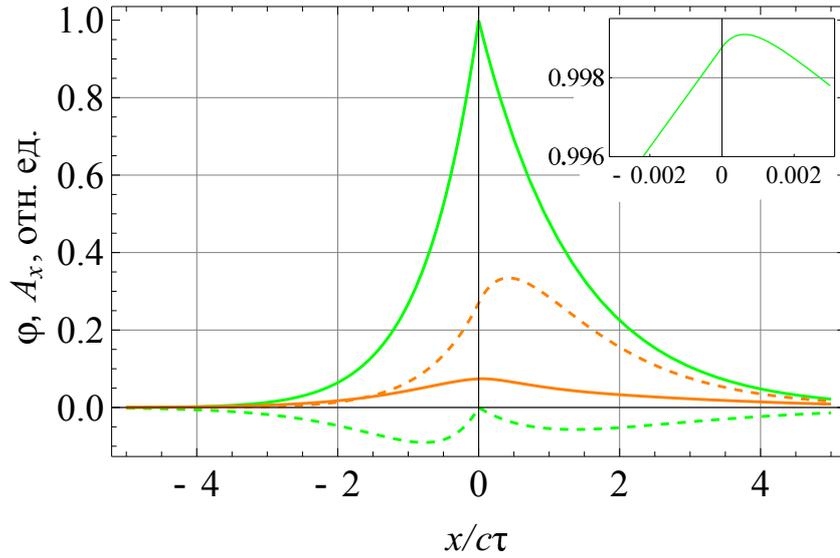


Рис. 2.4. Зависимости комплексных амплитуд потенциала $\varphi(x, z = 0)$ (зелёный) и вектор-потенциала $A_x(x, z = 0)$ (оранжевый) в относительных единицах (полагали $\varphi_1 = 1$) от координаты x , обезразмеренной на ct ; 2D ЭС находится в области $x > 0$. Сплошной линией обозначена действительная часть φ и A_x , пунктиром — мнимая. На вставке — увеличенная часть графика $\varphi(x)$ вблизи нуля. Графики построены для $\tilde{\sigma} = 2$, $q_y ct = 1.2$, $\omega\tau \approx 0.86 - i0.23$ (см. рис. 2.2). Для отношения c/s было взято характерное значение 10^3 . Характерная длина локализации $1/Re\lambda_1 \approx 1.4ct$.

ко в исходных уравнениях (2.1) и (2.6) нельзя положить $s = 0$, т.к. тогда не удастся удовлетворить условию непрерывности производной потенциала φ на границе. Из графиков распределения заряда видно, что часть заряда локализована на короткой длине $1/Re\lambda_2 \propto s$, которая стремится к нулю при $s \rightarrow 0$; при этом полный заряд, который на ней локализован, не стремится к нулю. Таким образом, формально в пределе $s \rightarrow 0$ на границе образуется δ -образный заряд. И в этом смысле, естественно, что не удаётся выполнить условие непрерывности производной потенциала, т.к. в первом уравнении (2.5) справа стоит концентрация $n(x)$, которая содержит δ -образную часть в пределе $s \rightarrow 0$, а само уравнение (2.5) является уравнением второго порядка; следовательно, получаем разрыв $\varphi'(x)$. Однако, если не интересоваться поправками в дисперсионном уравнении, связанными с конечностью s (которые малы в длинноволновом пределе), а также поведением потенциалов, плотности заряда и тока на расстояниях порядка $1/Re\lambda_2$ от границы разде-

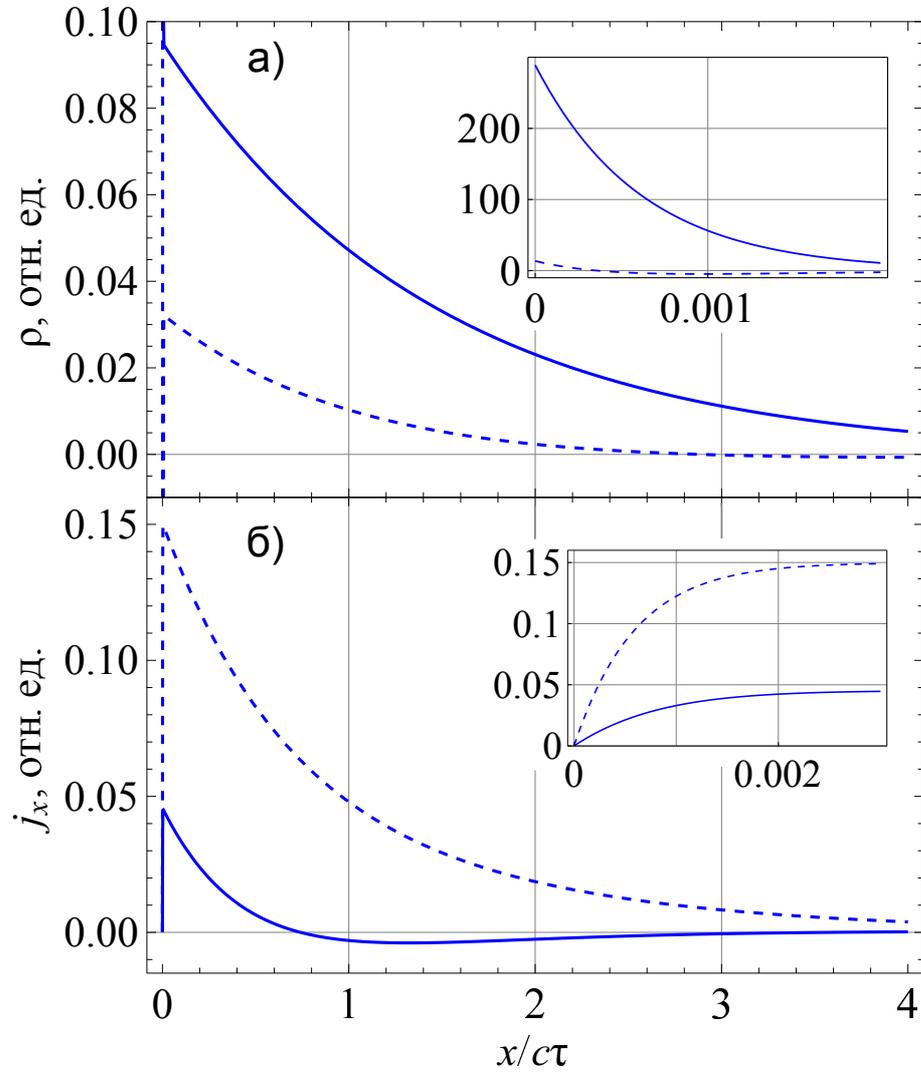


Рис. 2.5. Зависимости комплексных амплитуд плотности заряда $\rho(x)$ (а) и тока $j_x(x)$ (б) в относительных единицах (ρ обезразмеренно φ_1/ct , j_x — на φ_1/τ) от координаты x , обезразмеренной на ct . Сплошной линией обозначена действительная часть ρ и j_x , пунктиром — мнимая. На вставках — увеличенные части графиков при x вблизи нуля. Графики построены для тех же параметров, что и на рис. 2.4.

ла, то при решении задачи, можно допустить наличие δ -образного заряда на границе и, соответственно, разрыв $\varphi'(x)$ на границе. Величина δ -образного заряда на границе и величина разрыва $\varphi'(x)$ связаны первым из уравнений (2.5). Такой подход сильно упрощает вычисления, т.к. в правой части уравнения (2.1) остаётся только одно слагаемое, и позволяет, например, вычислить спектр краевого плазмон-поляритона в магнитном поле или краевого плазмона в анизотропной 2D ЭС (см. Приложение А). Также такой подход может быть, по-видимому, использован для вычисления спектров плазмонов в более сложных геометриях.

Конечно, всё вышесказанное является следствием применения приближённого метода при нахождении спектра, т.к. уравнения (2.5) являются следствием применения приближенного метода. При точном решении задачи, δ -образный заряд на краю 2D ЭС, по-видимому, не образуется [92].

Выводы. В рамках классического подхода рассмотрено влияние электромагнитного запаздывания на спектр плазмонов, локализованных и распространяющихся вдоль прямолинейного края 2D ЭС с конечным временем релаксации электронов τ . Проанализировано пространственное распределение потенциалов, плотности заряда и тока. Задача решалась приближённым методом [6]. Получено, что при условии $2\pi\sigma_0 > c$, где σ_0 – статическая проводимость, краевой плазмон-поляритон добротен (действительная часть частоты краевого плазмон-поляритона не меньше мнимой части частоты $Re\omega \geq Im\omega$) при любых величинах волнового вектора вдоль границы q_y и, соответственно, при любых частотах, даже при частотах меньших $1/\tau$.

Глава 3

Параметрический резонанс в двумерной электронной системе в магнитном поле

Данная глава посвящена параметрическому резонансу в двумерной (2D) электронной системе (ЭС), находящейся под действием микроволнового излучения и помещённой в постоянное магнитное поле ортогональное плоскости 2D ЭС. В разделе 3.1 приводится экспериментальная мотивация, в следующем разделе 3.2 рассматривается простейшая модель появления параметрического резонанса. В разделе 3.3 приводится более реалистичная модель описания параметрического резонанса, а также приближенно учитывается экранировка внешнего поля электронами 2D ЭС. В разделе 3.4 обсуждается полученный результат и приведены выводы.

3.1. Введение

Мотивацией для рассмотрения параметрического резонанса в 2D системе являются эксперименты по микроволновому фотоотклику чистых (с подвижностью $\mu \gtrsim 10^7 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$) 2D ЭС в постоянном внешнем магнитном поле, ортогональном плоскости 2D ЭС [23–26]. В этих экспериментах был обнаружен узкий и высокий пик в фотосопротивлении при частоте микроволнового излучения Ω равной удвоенной циклотронной частоте электронов в 2D ЭС $2\omega_c$. Важно, что этот пик отличается от обычных пиков в фотосопротивлении, соответствующих магнитоосцилляциям сопротивления индуцированным микроволновым излучением (MIRO - microwave-induced resistance oscillations) [18–20].

Идея объяснения появления пика в фотосопротивлении состоит в том, что для 2D ЭС, помещённой постоянно в ортогональное магнитное поле,

циклотронная частота электронов ω_c имеет смысл собственной частоты системы: при пренебрежении столкновениями с примесями электроны двигаются по круговым орбитам с частотой ω_c . Под действием внешнего переменного электрического поля у электронов появляется дополнительное движение с частотой Ω . Если электрическое поле однородно, то эти два движения независимы. Однако, если электрическое поле неоднородно, то эти движения перепутываются и может возникать параметрический резонанс. Известно, что основной (наиболее сильный) параметрический резонанс проявляется в случае, когда частота внешнего возмущения равна удвоенной собственной частоте системы [80]. Поэтому при Ω вблизи $2\omega_c$ в 2D ЭС в магнитном поле возможно появление параметрического резонанса, при котором происходит экспоненциальное нарастание амплитуды гидродинамической скорости электронов во времени, что ведёт к неустойчивости системы; неустойчивость системы приводит к разогреву и, соответственно, пику в сопротивлении.

Пусть 2D ЭС находится в плоскости $z = 0$, постоянное внешнее магнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль оси z . Обычно в экспериментах [23–26] длина волны микроволнового излучения больше или порядка размеров образца, поэтому внешнее излучение падает также на границы образца и металлические контакты, которые сильно модифицируют микроволновое поле. В итоге полное электрическое поле, действующее на электроны внутри образца, является суперпозицией поля внешней электромагнитной волны и поля, наведённого контактами или краями образца и, следовательно, является неоднородным [93]. Для простоты, ограничимся рассмотрением случая, когда это поле направлено вдоль оси x и зависит только от координаты x : $E(x, t) = E_0(x) \cos \Omega t$. Действием магнитной компоненты падающего микроволнового излучения будем пренебрегать.

Отклик системы на электрическое поле будем находить в рамках нелинейного уравнения гидродинамики (уравнения Эйлера) на среднюю скорость

электронов $\mathbf{V}(x, t)$:

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}}{\tau} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(x, t) - \frac{e}{mc} [\mathbf{V}, \mathbf{B}], \quad (3.1)$$

где $e > 0$, m – модуль заряда и эффективная масса электрона, τ – феноменологическое время релаксации электронов, которое считаем большим: $\omega_c \tau \gg 1$, $\Omega \tau \gg 1$, т.к. 2D ЭС на эксперименте имеет большую подвижность. Нелинейный член $(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V}$ в левой части уравнения (3.1) играет для нас ключевую роль. Его можно интерпретировать как мгновенный и локальный доплеровский сдвиг частоты возбуждений, которые описываются уравнением (3.1). Вывод уравнения (3.1) с нелинейным слагаемым $(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V}$ из уравнения на функцию распределения электронов изложен, например, в [94]. При выводе уравнения (3.1) предполагалось, что частота соударений электронов друг с другом намного превосходит частоты соударений электронов с рассеивающими центрами, отвечающими за обмен энергией и импульсом. Кроме того, в уравнении (3.1) пренебрежено слагаемым типа давления (это слагаемое даёт существенный вклад если электрическое поле неоднородно на длинах меньше циклотронного радиуса, в нашем случае будут рассматриваться более плавные поля, см. также оценки ниже). Отметим, что уравнение (3.1) с нелинейным слагаемым $(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V}$ часто используется для описания динамики электронов в 2D ЭС, см., например, [13, 95–98].

Т.к. нет зависимости от координаты y , то исключим $V_y(x, t)$ из уравнения (3.1), получим уравнение на $V_x(x, t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{V}_x + \omega_c^2 V_x + 2\dot{V}_x/\tau + V_x/\tau^2 + 2V_x \dot{V}_x' + \dot{V}_x V_x' + 2V_x V_x'/\tau \\ + V_x^2 V_x'' + V_x (V_x')^2 + e\dot{E}/m + eE/(m\tau) + V_x eE'/m = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где точка обозначает производную по времени, штрих – производную по координате x .

Из уравнений (3.1) и (3.2) видно, что если действующее на электроны поле однородно (нет зависимости от координаты x), то решение для скоро-

сти также однородно, нелинейные слагаемые не дают вклада, и получаем обычные формулы Друде (4) для подвижности (связи скорости и электрического поля). Однако, как уже было отмечено выше, электрическое поле, действующее на электроны в 2D ЭС, неоднородно. И это является ключевым фактором, именно величиной неоднородности будет определяться параметрический резонанс.

3.2. Простейшая модель

Рассмотрим модель, на примере которой разберём подход и основные свойства параметрического резонанса в 2D ЭС в магнитном поле. Т.к. ключевым является неоднородность поля $E(x, t)$, то в рамках простейшей модели рассмотрим линейную зависимость поля от координаты $E(x, t) = \alpha x \cos \Omega t$. В этом случае ищем V_x также в линейном виде $V_x(x, t) = W(t)x$.

Введём безразмерные переменные $w(t) = W(t)/\omega_c$, $a = e\alpha/(m\omega_c^2)$, $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_c$, $\tilde{\tau} = \tau\omega_c$, безразмерное время $\tilde{t} = \omega_c t$ и подставим их в уравнение (3.2). Получим уравнение:

$$\ddot{w} + w + 2\dot{w}/\tilde{\tau} + w/\tilde{\tau}^2 + 3\dot{w}w + 2w^2/\tilde{\tau} + w^3 + wa \cos \tilde{\Omega}\tilde{t} = a\tilde{\Omega} \sin \tilde{\Omega}\tilde{t} - a \cos \tilde{\Omega}\tilde{t}/\tilde{\tau}. \quad (3.3)$$

Безразмерный параметр a характеризует неоднородность поля:

$$a = \frac{e\alpha}{m\omega_c^2} = \frac{eE'_0}{m\omega_c^2}. \quad (3.4)$$

Будем считать этот параметр малым, т.к. уже при малых значениях a возможно появления параметрического резонанса; кроме того, для частот, соответствующих эксперименту, и при разумных неоднородностях поля, этот параметр, по-видимому, действительно мал.

Построим решение уравнения (3.3) используя малый параметр $a \ll 1$. Т.к. a стоит в правой части уравнения (3.3), то будем считать, что $w \sim \dot{w} \sim \ddot{w} \sim a$, т.е. w и производные по времени одного порядка с a . Для простоты рассмотрим пока чистый предел $\tau \rightarrow \infty$.

Оставим в уравнении (3.3) члены первого и второго порядка малости, далее будет понятно, почему нужно оставлять второй порядок малости по a . Получим уравнение

$$\ddot{w} + w + 3\dot{w}w + wa \cos \tilde{\Omega}t = a\tilde{\Omega} \sin \tilde{\Omega}t. \quad (3.5)$$

Решение уравнений такого типа можно искать в виде колебаний на частоте правой части (и вообще говоря, кратных частотах), например, методом итераций. Однако, в нашем случае Ω находится вблизи $2\omega_c$ ($\tilde{\Omega}$ вблизи 2), и поэтому возможна раскачка колебаний на частоте $\Omega/2$, которая практически совпадает с собственной, точно так же как это происходит при параметрическом резонансе в колебательной системе (см. [80] и раздел 4 Обзора литературы). Поэтому ищем решение в виде:

$$w(t) = B_1(\tilde{t}) \sin \frac{\tilde{\Omega}t}{2} + C_1(\tilde{t}) \cos \frac{\tilde{\Omega}t}{2} + B_2(\tilde{t}) \sin \tilde{\Omega}t + C_2(\tilde{t}) \cos \tilde{\Omega}t, \quad (3.6)$$

где коэффициенты $B_{1,2}(\tilde{t})$, $C_{1,2}(\tilde{t})$ медленные функции времени: $\dot{B}_{1,2} \ll \tilde{\Omega}B_{1,2}$, $\dot{C}_{1,2} \ll \tilde{\Omega}C_{1,2}$. Будем считать, что $\dot{B}_{1,2} \sim aB_{1,2}$, $\dot{C}_{1,2} \sim aC_{1,2}$.

Подставляем выражение (3.6) в уравнение (3.5) и приравниваем коэффициенты при различных гармониках:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\tilde{\Omega}t}{2} : \quad & -\tilde{\Omega}\dot{C}_1 - B_1\tilde{\Omega}^2/4 + B_1 - aB_1/2 - 3B_1B_2\tilde{\Omega}/4 - 3C_1C_2\tilde{\Omega}/4 = 0, \\ \cos \frac{\tilde{\Omega}t}{2} : \quad & \tilde{\Omega}\dot{B}_1 - C_1\tilde{\Omega}^2/4 + C_1 + aC_1/2 - 3B_1C_2\tilde{\Omega}/4 + 3C_1B_2\tilde{\Omega}/4 = 0, \\ \sin \tilde{\Omega}t : \quad & B_2 - B_2\tilde{\Omega}^2 = a\tilde{\Omega}, \\ \cos \tilde{\Omega}t : \quad & C_2 - C_2\tilde{\Omega}^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где в последних двух уравнениях оставили величины порядка a ; в первых же двух уравнениях члены порядка a (второе и третье слагаемые) имеют коэффициент $\tilde{\Omega}^2/4 - 1$, который может обращаться в нуль. Именно поэтому в первых двух уравнениях (3.7) нужно оставлять члены порядка a^2 , соответственно, нужно оставлять члены a^2 при переходе от уравнения (3.3) к

уравнению (3.5). Подчеркнём ещё раз, что это напрямую связано с тем, что Ω находится вблизи $2\omega_c$, т.е. с рассмотрением основного параметрического резонанса.

Решаем далее систему уравнений (3.7), находим (в нижнем порядке по a):

$$B_2 = \frac{a\tilde{\Omega}}{1 - \tilde{\Omega}^2}, \quad C_2 = 0. \quad (3.8)$$

Подставляем полученные B_2 и C_2 в систему (3.7), при этом считаем, что разница $\tilde{\Omega} - 2$ меньше или порядка a , поэтому пренебрегаем отклонением $\tilde{\Omega}$ от 2 в выражении для B_2 .

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -\tilde{\Omega}\dot{C}_1 + B_1(-\tilde{\Omega}^2/4 + 1 + a/2) = 0, \\ \tilde{\Omega}\dot{B}_1 + C_1(-\tilde{\Omega}^2/4 + 1 - a/2) = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

Решаем эту систему, получаем $B_1(t) = D_1 \exp(st) + D_2 \exp(-st)$, где $D_{1,2}$ – произвольные константы, которые находятся из начальных условий, s – инкремент нарастания решения, который определяется формулой:

$$s = \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \sqrt{a^2 - (\tilde{\Omega}^2 - 4)^2/4}. \quad (3.10)$$

Таким образом решения нарастают во времени экспоненциально, т.е. возникает параметрический резонанс, при условии $2a > |\tilde{\Omega}^2 - 4|$. Разность $\tilde{\Omega} - 2$ (или $\Omega - 2\omega_c$) обычно называют расстройкой. Видно, что при нулевой расстройке резонанс возникает при сколь угодно малой величине a (это будет не так при учёте затухания – конечного τ).

Окончательное решение уравнения (3.5) в нижнем порядке по a записывается в виде:

$$\begin{aligned} w(t) = & -\frac{2a}{3} \sin \tilde{\Omega}t + D_1 e^{st} \left(\sin \frac{\tilde{\Omega}t}{2} - \frac{2s}{-\tilde{\Omega}^2/4 + 1 - a/2} \cos \frac{\tilde{\Omega}t}{2} \right) \\ & + D_2 e^{-st} \left(\sin \frac{\tilde{\Omega}t}{2} - \frac{2s}{-\tilde{\Omega}^2/4 + 1 + a/2} \cos \frac{\tilde{\Omega}t}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

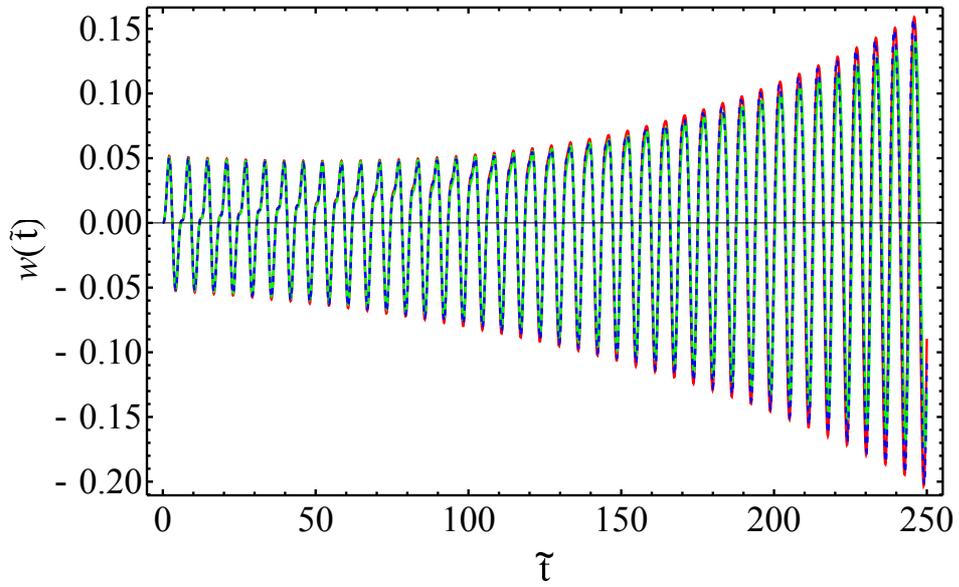


Рис. 3.1. Графики $w(\tilde{t})$: приближённое аналитическое (3.11) (красный) и численное решение уравнений (3.5) (зелёный) и (3.3) при $\tau \rightarrow \infty$ (синий пунктир). Использовались параметры $a = 0.03$, расстройка отсутствует $\Omega - 2\omega_c = 0$, начальные условия $w(0) = w'(0) = 0$. Из графиков видно хорошее совпадение аналитического и численного решений.

Качественно решение состоит из вынужденных колебаний (1-ое слагаемое) и «почти собственных» колебаний на частоте $\Omega/2 \approx \omega_c$ (2-ое и 3-е слагаемые), которые определены с точностью до произвольных коэффициентов $D_{1,2}$.

Сравним полученное аналитическое решение (3.11) с численными решениями уравнения (3.5) и уравнения (3.3) при $\tau \rightarrow \infty$ (последние два уравнения отличаются наличием слагаемого w^3). Зададим нулевые начальные условия $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, а также нулевую расстройку $\tilde{\Omega} = 2$. В этом случае $D_1 = D_2 = 2a/3$. На рис. 3.1 изображены полученные графики. Видно хорошее совпадение аналитики (3.11) и численных расчётов при малых $w(t)$. Когда $w(t)$ становится сравнимо с единицей, численный расчёт показывает, что решение уравнения (3.3) (при $\tau \rightarrow \infty$) стремится к бесконечности за конечное время, т.е. кубичное слагаемое w^3 , становясь сравнимым с другими слагаемыми уравнения (3.3), не стабилизирует решение, а наоборот, приводит к ещё более сильной неустойчивости (по крайней мере, в рамках простейшей модели).

Отметим ещё две особенности решения уравнения (3.5). Во-первых, от нелинейного члена $3w\dot{w}$ вклад в конечную систему (3.7) устроен как произведение «вынужденного» решения с частотой $\tilde{\Omega}$ на «собственные» с частотой $\tilde{\Omega}/2$, это видно в двух последних слагаемых в первых двух уравнениях системы (3.7); т.е. можно было сначала найти обычное вынужденное решение (3.8) из линеаризованного уравнения (3.5), а затем подставлять его в нелинейное слагаемое $3w\dot{w}$: сначала в w (при этом в \dot{w} подставляется «собственное» на частоте $\tilde{\Omega}/2$), затем в \dot{w} . Во-вторых, можно было сразу искать решения для медленных коэффициентов $B_{1,2}$ через инкремент s : $\dot{B}_{1,2} = sB_{1,2}$, где $s \sim a \ll 1$.

Теперь обсудим случай конечного затухания. Будем считать, что величина затухания одного порядка или меньше a : $\tilde{\tau}^{-1} = (\omega_c\tau)^{-1} \lesssim a$. В этом случае в уравнении (3.3) оставляем только слагаемое $2\dot{w}/\tilde{\tau} \sim a^2$. Оно даёт вклад $-C_1\tilde{\Omega}/\tilde{\tau}$ и $B_1\tilde{\Omega}/\tilde{\tau}$ в первое и второе уравнения системы (3.7) соответственно. Ищем решение для $B_1(t)$ в виде экспонент $\exp(st)$, находим:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\tilde{\tau}} \pm \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \sqrt{a^2 - (\tilde{\Omega}^2 - 4)^2/4}; \quad (3.12)$$

по сравнению с формулой (3.10) появилось дополнительное слагаемое $-1/\tilde{\tau}$. Для появления экспоненциально нарастающих решений теперь необходимо выполнить следующее условие:

$$a > \sqrt{(\tilde{\Omega}^2 - 4)^2/4 + 16/\tilde{\tau}^2}, \quad (3.13)$$

т.е. даже при нулевой расстройке есть порог на величину неоднородности поля: $a > 4/\tilde{\tau}$. Отметим, что полностью аналогичная ситуация имеет место при рассмотрении уравнения Матъе (18).

Таким образом, в простейшей модели линейной зависимости переменного электрического поля от координаты, получено, что если производная поля достаточно большая (по сравнению с разностью частоты электрического поля и удвоенной циклотронной частоты, а также по сравнению с затуханием),

то возможно появление параметрического резонанса, который характеризуется экспоненциальным нарастанием амплитуды гидродинамической скорости электронов во времени.

3.3. Параметрический резонанс и экранировка

Рассмотрим параметрический резонанс электронов, который создаётся электрическим полем $E_0(x) \cos \Omega t$, пока не уточняя зависимость поля от координаты x , но считая неоднородность не очень большой, более подробно, см. ниже.

Вернёмся к уравнению (3.2), но рассмотрим пока чистый предел $\tau \rightarrow \infty$, в этом случае уравнение (3.2) запишется следующим образом:

$$\ddot{V}_x + \omega_c^2 V_x + 2V_x \dot{V}_x' + \dot{V}_x V_x' + V_x^2 V_x'' + V_x (V_x')^2 + V_x e E' / m = -e \dot{E} / m. \quad (3.14)$$

Будем искать слабо неоднородные решения, а именно, будем считать, что $|V_x' / \omega_c| \ll 1$. В этом случае кубичные слагаемые (5-ое и 6-ое слагаемые в левой части уравнения (3.14)) малы по сравнению с квадратичными слагаемыми: $V_x V_x'^2 \ll \omega_c V_x V_x' \sim \dot{V}_x V_x'$, $V_x^2 V_x'' \ll \omega_c V_x V_x' \sim \dot{V}_x V_x'$, где считалось, что $\dot{V}_x \sim \omega_c V_x$.

Представим скорость в виде $V_x(x, t) = V_0(x, t) + V(x, t)$, где скорость $V_0(x, t)$ определяется линеаризованным уравнением (3.2), т.е. обычной формулой Друде для подвижности:

$$V_0(x, t) = \frac{e \Omega E_0(x)}{m(-\Omega^2 + \omega_c^2)} \sin \Omega t = V_{0x} \sin \Omega t. \quad (3.15)$$

$V_0(x, t)$ – вынужденное решение линеаризованного уравнения (3.14), а $V(x, t)$ – добавка за счёт нелинейных слагаемых. Мы выделили вынужденное решение, т.к. из решения уравнения (3.2) или (3.14) в простейшей модели было видно, что в параметрический резонанс дают вклад слагаемые вида $V \cdot V_0$ (они имеют частоту вблизи $\Omega/2$).

Подставим $V_x(x, t) = V_0(x, t) + V(x, t)$ в уравнение (3.14) с пренебрежёнными кубическими слагаемыми, получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \ddot{V} + \omega_c^2 V + \dot{V}_0 V'_0 + \dot{V} V'_0 + \dot{V}_0 V' + \dot{V} V' + \\ & 2(V_0 \dot{V}'_0 + V_0 \dot{V}' + V \dot{V}'_0 + V \dot{V}') + V_0 e E' / m + V e E' / m = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Как и в простейшей модели, ищем решение в виде

$$V(x, t) = \exp[s(x)t] \cdot [C(x) \cos(\Omega t/2) + B(x) \sin(\Omega t/2)],$$

где инкремент s мал: $s \ll \omega_c, \Omega$; производные коэффициентов $C(x)$, $B(x)$ также малы: $B', C' \ll \omega_c$. После подстановки приравниваем коэффициенты при гармониках $\sin(\Omega t/2)$, $\cos(\Omega t/2)$, получаем

$$\begin{aligned} \sin \frac{\Omega t}{2} : & \quad -B\Omega^2/4 - sC\Omega + \omega_c^2 B + V'_0 \Omega B/4 - \frac{e}{2m} E'_0 B - V'_0 \Omega B = 0, \\ \cos \frac{\Omega t}{2} : & \quad -C\Omega^2/4 + sB\Omega + \omega_c^2 C - V'_0 \Omega C/4 + V'_0 \Omega C + \frac{e}{2m} E'_0 C = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь пренебрежено слагаемыми, содержащими s' : $V_0 B s t s' \ll \omega_c B V'_0 s t \sim \omega_c B V'_0$, при этом предполагалось, что $st \lesssim 1$, т.е. рассматривается только начальная стадия развития неустойчивости, пока амплитуда не сильно возросла. Также отметим, что слагаемые, содержащие $B'(x)$ и $C'(x)$ (в нулевом и первом порядке по малым параметрам $|V'/\omega_c|$, $|V'_0/\omega_c|$) не входят в полученную выше систему уравнений.

Решаем эту систему, находим выражение для инкремента:

$$s_{1,2} = \pm \frac{1}{2\Omega} \sqrt{\left(\frac{e}{m} E'_0\right)^2 - \frac{(\Omega^2 - 4\omega_c^2)^2}{4}}, \quad (3.18)$$

т.е. если в какой-то точке x выполняется условие $|eE'_0/m| > |\Omega^2 - 4\omega_c^2|/2$, то вблизи этой точки скорость V_x начинает экспоненциально нарастать во времени. Как и в простейшей модели, при нулевой расстройке $|\Omega - 2\omega_c| = 0$, параметрический резонанс возникает при сколь угодно малой величине неоднородности электрического поля $E_0(x)$.

Учтём конечное затухание, считая его малым $\tau\omega_c \gg 1$. В этом случае в уравнении (3.2) нужно учесть наибольшее слагаемое, связанное с τ , $2\dot{V}_x/\tau$. Это слагаемое, как и в случае простейшей модели, даст добавки $-\Omega C/\tau$, $\Omega B/\tau$ в первое и второе уравнение системы (3.17) соответственно. Тогда условие наступления параметрического резонанса станет следующим:

$$\left(\frac{eE'_0}{m}\right)^2 > \frac{4\Omega^2}{\tau^2} + \frac{(\Omega^2 - 4\omega_c^2)^2}{4}. \quad (3.19)$$

При нулевой расстройке получаем $|eE'_0/m| > 2\Omega/\tau$.

Теперь в самом простом приближении учтём экранировку электрического поля электронами 2D ЭС. Это нужно делать, т.к. вообще говоря, переменное электрическое поле $E_0(x)$ экранируется 2D электронной плазмой. Будем считать, что поле $E_0(x)$, которое наводится контактами (или краями 2D ЭС), экранируется бесконечной 2D ЭС и будем использовать теорию линейного отклика. Конечно же, это является приближением, 2D ЭС в реальности всегда ограничена, однако нас в данном случае интересует только качественный анализ влияния экранировки.

В рамках теории линейного отклика полное электрическое поле (с учётом самосогласованного поля электронов), действующее в системе, $E_{tot}(x, t) = E_{tot}(x) \cos \Omega t$ связано с внешним неоднородным полем $E_0(x)$ при помощи эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(q, \omega)$:

$$E_{tot}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \frac{E_0(q)}{\varepsilon(q, \Omega)}, \quad (3.20)$$

где $E_0(q)$ – фурье-компонента исходного электрического поля $E_0(x)$.

В рамках приближения хаотических фаз, в чистой системе (время релаксации электронов τ стремится к бесконечности), при условиях $q \ll k_F$ и $\hbar\omega_c \ll 2\pi^2 k_B T \ll E_F$, где $\hbar k_F$ и E_F – импульс и энергия Ферми, T – температура, эффективная диэлектрическая проницаемость определяется формулой

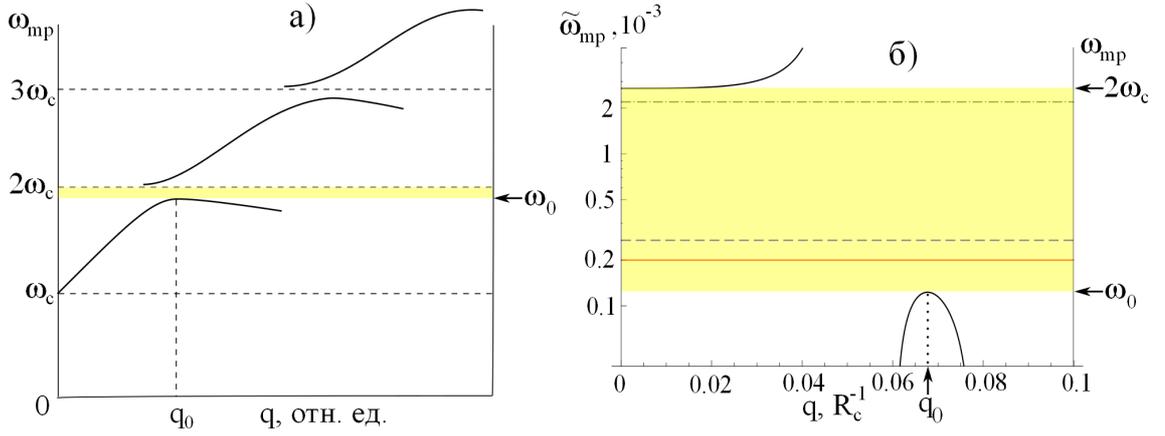


Рис. 3.2. Спектр магнитоплазмонов (бернштейновских мод). Если частота внешнего электрического поля Ω попадает в одну из частотных щелей в спектре (щель вблизи $2\omega_c$ заштрихована), то возможно усиление поля. а) Схематичное изображение бернштейновских мод, ω_0 и q_0 соответствуют частоте и волновому вектору нижнего края щели вблизи $2\omega_c$. б) Дисперсия бернштейновской моды вблизи $2\omega_c$ в логарифмическом масштабе по частоте, $\tilde{\omega}_{mp} = \omega_{mp}/\omega_c - 1.9973$. Различные линии соответствуют различным значениям Ω : $\Omega/\omega_c = 1.9995$ (штрих-пунктир), $\Omega/\omega_c = 1.99757$ (пунктир), $\Omega/\omega_c = 1.9975$ (сплошная линия). Параметры 2D ЭС указаны в тексте.

[44, 99, 100]:

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 + \frac{2m}{\pi\hbar^2} V_{ee}(q) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2 \omega_c^2 J_p^2(qR_c)}{p^2 \omega_c^2 - \omega^2}, \quad (3.21)$$

где $V_{ee}(q) = 2\pi e^2/\kappa|q|$ – фурье-компонента кулоновского потенциала для электронов в 2D ЭС, $J_p(qR_c)$ – функция Бесселя 1-го рода порядка p . Спектр магнитоплазмонов, определяемый из условия $\varepsilon(q, \omega) = 0$ (также иногда называемый спектром бернштейновских мод), схематично представлен на рис. 3.2. Важно, что в спектре присутствуют частотные щели вблизи частот $N\omega_c$, где $N \geq 2$ – целое число. В нашем случае частота внешнего поля Ω лежит как раз вблизи $2\omega_c$, где важно учесть экранировку, т.к. при попадании частоты внешнего поля Ω в щель спектра, внешнее поле будет усиливаться, если частота Ω стремится к нижнему краю щели, на котором (конечно же, при нужном значении волнового вектора q , соответствующего нижнему краю щели) эффективная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(q, \omega)$ (3.21) обращается в нуль.

Оценим частоту ω_0 нижнего края щели вблизи $2\omega_c$, его положение q_0 и величину щели $\Delta_0 = 2\omega_c - \omega_0$. В нижнем порядке по малому параметру $qR_c \ll 1$ получаем

$$q_0 R_c \approx 4.5 a_B / R_c,$$

где $a_B = \hbar^2 \kappa / m e^2$ – эффективный боровский радиус. Для частоты $\omega_c / 2\pi = 100$ ГГц и типичных параметров квантовых ям на основе GaAs ($\kappa = 7$ – средняя диэлектрическая проницаемость, $m = 0.067m_0$, $n_s = 3 \cdot 10^{11}$ см⁻²) было получено $a_B \approx 5.5$ нм, $B \approx 0.24$ Тл, $R_c \approx 0.37$ мкм и $q_0 R_c \approx 0.067 \ll 1$, т.е. параметр $q_0 R_c$ действительно много меньше единицы.

В тех же приближениях величину щели можно оценить как

$$\frac{\Delta_0}{2\pi} \approx \frac{11.4 a_B^2}{2\pi R_c^2} \omega_c \approx 0.24 \left[\frac{\omega_c / 2\pi}{100 \text{ ГГц}} \right]^3 [\text{ГГц}]. \quad (3.22)$$

Из уравнений (3.20), (3.21) качественно оценим вклад в полное поле от усиления за счёт попадания в щель вблизи $2\omega_c$. Поле $E_0(x)$ неоднородно, т.е. имеет пространственную фурье гармонику q_0 . Если частота поля Ω стремится к нижнему краю щели ω_0 , то амплитуда гармоники q_0 в полном поле $E_{tot}(x)$ стремится к бесконечности, поэтому, для оценок, будем считать, что полное экранированное поле определяется гармоникой q_0 : $E_{tot}(x) \sim \cos(q_0 x) / \varepsilon(q_0, \Omega)$ при $\Omega \rightarrow \omega_0 + 0$. Ещё раз отметим, что полное поле усиливается за счёт $\varepsilon(q_0, \Omega) \rightarrow 0$. Полное поле было рассчитано для характерных параметров 2D ЭС, которые перечислены выше, результат представлен на рис. 3.3б. Далее будем подразумевать, что Ω лежит вблизи ω_0 , где поле усилено. Таким образом, с учётом линейной экранировки, полное электрическое поле, которое стоит в уравнении для гидродинамической скорости электронов (3.1), является полем $E_{tot}(x) \cos \Omega t$. И именно это поле, вообще говоря, вызывает параметрический резонанс. Считая поле $E_{tot}(x)$ достаточно плавным, можно проделать те же вычисления, что и для случая без экранировки и получить формально то же условие для появления параметрического резонанса (3.19), только поле $E_0(x)$ нужно заменить на полное поле $E_{tot}(x)$.

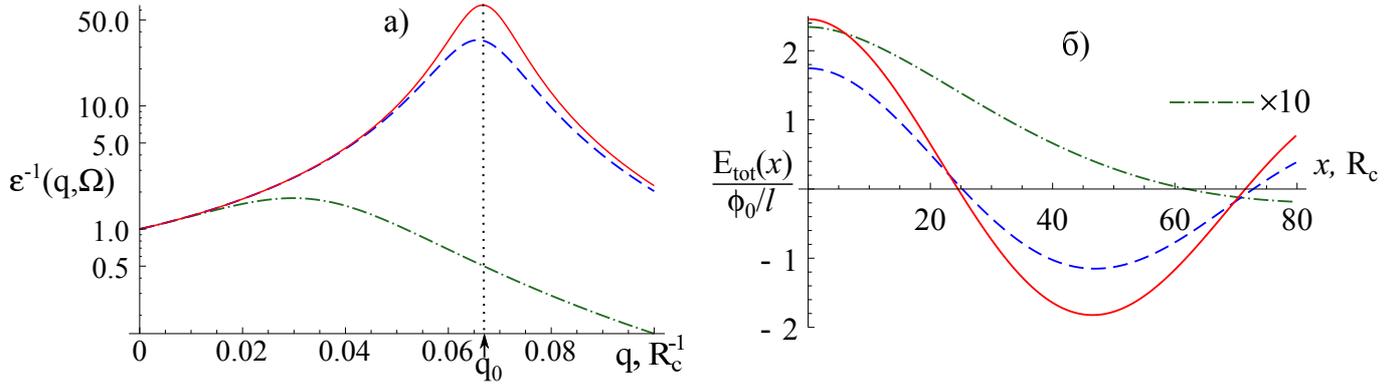


Рис. 3.3. а) Обратная эффективная диэлектрическая проницаемость $1/\varepsilon(q, \Omega)$, описывающая усиление внешнего электрического поля за счёт попадания частоты в щель бернштейнских мод: $2\omega_c > \Omega > \omega_0$. б) Амплитуда полного (с учётом экранировки) электрического поля в зависимости от координаты x . Использовалось модельное поле $E_0(x) = \phi_0/\sqrt{l^2 + x^2}$, наведённое краем металлического контакта (подробнее см. в тексте). Линии соответствуют тем же значениям Ω , что и на рис. 3.2б.

Отметим, однако, что если частота поля Ω находится вблизи $2\omega_c$ и поле имеет пространственную гармонику q_0 , то для вычисления вынужденных решений, вообще говоря, нельзя пользоваться простыми формулами Друде (3.15), нужно учесть следующее слагаемое по параметру qR_c [44]. Для продольной подвижности (или проводимости) имеем:

$$\mu = -i\Omega \frac{e}{m} \left(\frac{1}{\omega_c^2 - \Omega^2} + \frac{(qR_c)^2}{4(4\omega_c^2 - \Omega^2)} \right). \quad (3.23)$$

Оценим первое и второе слагаемые в скобках, считая, что частота внешнего поля Ω равна частоте нижнего края щели ω_0 . Используем соотношения для величины щели, полученные выше, получаем, что первое слагаемое в скобках выражения (3.23) примерно равно $-1/(3\omega_c^2)$, второе примерно равно $0.1/\omega_c^2$, т.е. второе слагаемое, конечно, вносит вклад, но он меньше вклада от первого (друдевского) слагаемого. Поэтому для качественных оценок, можно пренебречь вторым слагаемым и пользоваться соотношениями типа (3.15). На частоте $\Omega/2$ можно пользоваться обычными формулами Друде.

Кроме того отметим, что без экранировки, параметрический резонанс легче всего возникал при нулевой расстройке $|\Omega - 2\omega_c| = 0$. Теперь же при

нулевой расстройке, экранированное поле сильно подавлено, т.к. диэлектрическая проницаемость (3.21) сильно возрастает. Поэтому с учётом экранировки, параметрический резонанс возникает легче всего при $\Omega = \omega_0$, при которой экранированное поле обращается в бесконечность, по крайней мере в чистом пределе $\tau \rightarrow \infty$.

При учёте конечно τ , если τ^{-1} становится намного больше величины бернштейновской щели Δ_0 , то, по-видимому, щель «размывается» и усиления полного поля при экранировке не происходит. Поэтому будем считать, что расстройка резонанса (которая порядка ширины щели Δ_0) больше, чем τ^{-1} , и пренебрежём вкладом от конечного τ в условие появления параметрического резонанса (первое слагаемое в правой части неравенства (3.19)). В этом случае получаем следующее условие:

$$\left| \frac{eE'_{tot}}{m} \right| \geq \frac{1}{2} |\Omega^2 - 4\omega_c^2|. \quad (3.24)$$

Ещё раз отметим, что величина $E_{tot}(x)$ сильно зависит от разности $|\Omega - \omega_0|$.

3.4. Оценки, обсуждение результатов и выводы

Будем считать, что внешнее неоднородное поле $E_0(x)$ наводится краем металлического контакта, либо затвора, находящегося вблизи 2D ЭС. Под действием микроволнового излучения электроны подтекают или утекают от края металла, и таким образом, на краю металла образуется заряд (меняющийся во времени периодически с частотой Ω). Поэтому будем моделировать электрическое поле $E_0(x)$ полем от заряженной нити: $E_0(x) = \phi_0 / \sqrt{l^2 + x^2}$, где отношение ϕ_0/l определяет характерную величину электрического поля вблизи контакта.

Пренебрегая экранировкой, оценим по формуле (3.19) величину производной электрического поля, необходимую для возникновения параметрического резонанса. Минимальное значение E'_0 соответствует нулевой рас-

стройке; величину τ оценим из характерной величины подвижности 2D ЭС $\mu = e\tau/m = 3 \cdot 10^7 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, что соответствует $\tau \approx 1.1 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. Получаем $E'_{0,\min} \approx 8.5 \text{ В}/(\text{см}\cdot\text{мкм})$. Если в модельном поле считать, что $l \approx 1 \text{ мкм}$, для величины поля получим $E_{0,\min} \approx E'_{0,\min} \cdot l \approx 8.5 \text{ В}/\text{см}$.

Теперь перейдём к оценкам при учёте экранировки внешнего поля E_0 . В этом случае полное поле $E_{tot}(x)$ слабо зависит от длины l , т.к. фурье-компонента $E_0(q) \approx 2\phi_0 \ln(1.12/ql)$ при $ql \ll 1$.

Из выражения для экранированного поля (3.20) и рисунка 3.3 видно, что по мере приближения частоты Ω к нижнему краю щели ω_0 , амплитуда экранированного поля $E_{tot}(x)$ и, соответственно, амплитуда скорости $V_{x0}(x)$, а также их производные, увеличиваются и начинают осциллировать как $\cos q_0x$. Следовательно, когда частота поля достаточно близко подходит к нижнему краю щели, условие (3.24) начинает выполняться и развивается локальная параметрическая неустойчивость. Неустойчивость развивается в точке с наибольшей производной, для оценок можно считать, что это происходит при $x_0 = \pi/2q_0 \sim 24R_c \approx 9 \text{ мкм}$, см. рис. 3.3. Неустойчивость в свою очередь ведёт к разогреву 2D ЭС, который разрушает чувствительное к температуре гигантское отрицательное магнитосопротивление (GNMR). Поэтому вблизи частоты $\omega_0 \approx 2\omega_c$ появляется пик фотосопротивления.

Для того, чтобы происходило усиление внешнего неоднородного поля E_0 , необходимо, чтобы щель в спектре Δ_0 была больше, чем $1/\tau^*$, где τ^* – эффективное время релаксации, которое определяет размытие щели в спектре бернштейновских мод:

$$\tau^* \Delta_0 \gtrsim 1. \quad (3.25)$$

Для оценок будем считать, что $\tau^* \approx \tau$, где τ извлекается из подвижности: $\tau \approx 1.1 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. Для характерных параметров 2D ЭС ($\omega_c/2\pi = 100 \text{ ГГц}$, $\kappa = 7$, $m = 0.067m_0$, $n_s = 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$) по формуле (3.22) находим $\Delta_0 = 1.5 \cdot 10^9 \text{ рад}/\text{с}$. Таким образом $\Delta_0\tau \approx 1.7$, т.е. щель есть, хотя она и размыта. В

этом случае, видимо, большого усиления поля E_0 не происходит, и в качестве грубой оценки для минимальной производной можно взять значение E'_0 , полученное без учёта экранировки. Ещё раз отметим, что наш подход носит только оценочный характер. Реально частотные щели, которые наблюдаются в экспериментах по изучению бернштейновских мод в 2D ЭС [56], могут иметь большую величину, по сравнению с величинами, полученными в рамках приближения хаотических фаз. Также большая величина щелей получается в рамках квантового расчёта [101].

Условие (3.25) можно понимать и как условие на минимальную частоту микроволнового излучения $\Omega \approx 2\omega_c$. Для параметров 2D ЭС, указанных выше, находим:

$$\frac{\Omega_{min}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{8}{11.4} \left(\frac{v_F}{a_B}\right)^2 \frac{1}{\tau^*}} \approx 160 \text{ ГГц.}$$

Аналогично можно оценить минимальную подвижность, при которой возможно появление неустойчивости, например, для частоты микроволнового излучения $\Omega/2\pi = 100$ ГГц:

$$\mu_{min}^* = e\tau^*/m \approx 13 \cdot 10^7 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$$

Выводы. Рассмотрен параметрический резонанс в 2D электронной системе в магнитном поле, который происходит когда частота микроволнового излучения Ω находится вблизи удвоенной циклотронной частоты ω_c электронов 2D ЭС.

Для полного поля, действующего на электроны в 2D ЭС, учитывается экранировка магнитоплазмонными (бернштейновскими) модами, которая может приводить к усилению поля при попадании частоты в щель в спектре бернштейновских мод. Для реализации этого механизма усиления 2D ЭС должна быть достаточно чистой, чтобы размытие бернштейновской щели в спектре магнитоплазмонов за счёт рассеяния было мало по сравнению с величиной щели.

Возбуждение такого параметрического резонанса является возможной причиной гигантского фотоотклика, который был недавно обнаружен вблизи $2\omega_c$ в высокоподвижных 2D ЭС. Результатом развития параметрического резонанса является неустойчивость, которая приводит к разогреву 2D ЭС, разрушению гигантского отрицательного магнитосопротивления [79] и пику в фотопроводимости, который наблюдался в экспериментах [23–26].

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. В рамках классического подхода найдены и проанализированы спектры магнитоплазмон-поляритонов в двумерной электронной системе с диссипацией, т.е. с конечным временем релаксации электронов. Характерные виды спектров описаны с помощью «фазовой диаграммы» построенной в безразмерных координатах проводимость – магнитное поле. Показано, что при промежуточных значениях проводимости и достаточно сильном магнитном поле в спектре при малых волновых векторах появляется дополнительная ветвь. Также наличие магнитного поля «смягчает» условие появления добротных при малых частотах магнитоплазмон-поляритонов.
2. В рамках классического подхода найден спектр краевого плазмон-поляритона, т.е. плазмон-поляритона локализованного вблизи прямолинейного края двумерной электронной системы и распространяющегося вдоль него. Двумерная система считалась диссипативной. Проанализированы пространственное распределение потенциалов, плотности заряда и тока. Показано, что если статическая проводимость двумерной системы велика по сравнению со скоростью света, то краевой плазмон-поляритон добротен (мнимая часть частоты не превосходит действительную) при всех частотах, в том числе при частотах меньших темпа друдевской релаксации электронов в системе.
3. Рассмотрен параметрический резонанс в двумерной электронной системе, помещённой в постоянное магнитное поле и находящейся под действием микроволнового излучения. Параметрический резонанс возникает, если частота микроволнового излучения лежит вблизи удвоенной циклотронной частоты электронов двумерной системы и переменное электрическое поле, действующее на электроны в системе, является

неоднородным. Если параметрический резонанс возникает, то дрейфовая скорость электронов начинает экспоненциально нарастать во времени, что, в свою очередь, приводит к неустойчивости системы и пику в фотосопротивлении.

Список сокращений и условных обозначений

2D ЭС — двумерная электронная система

σ_0 — статическая проводимость 2D ЭС в отсутствие магнитного поля, в системе единиц СГС имеет размерность скорости

c — скорость света в вакууме

$\tilde{\sigma} = 2\pi\sigma_0/(c\sqrt{\kappa})$ — безразмерная проводимость 2D ЭС

$\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота электрона в 2D ЭС; $e > 0$, m — модуль заряда и эффективная масса электрона, B — величина магнитного поля, которое ортогонально плоскости 2D ЭС

Список литературы

1. Heitmann D. Two-dimensional plasmons in homogeneous and laterally microstructured space charge layers // *Surface Science*. 1986. Vol. 170, no. 1-2. Pp. 332–345.
2. Stern F. Polarizability of a Two-Dimensional Electron Gas // *Physical Review Letters*. 1967. — apr. Vol. 18, no. 14. Pp. 546–548.
3. Чаплик А. В. Возможная кристаллизация носителей заряда в инверсионных слоях низкой плотности // *ЖЭТФ*. 1972. Т. 62. С. 726.
4. Allen S. J., Störmer H. L., Hwang J. C. M. Dimensional resonance of the two-dimensional electron gas in selectively doped GaAs/AlGaAs heterostructures // *Physical Review B*. 1983. Vol. 28, no. 8. P. 4875.
5. Волков В. А., Михайлов, С. А. Теория краевых плазмонов в двумерном электронном газе // *Письма в ЖЭТФ*. 1985. Т. 42, № 11. С. 450–453.
6. Fetter A. L. Edge magnetoplasmons in a bounded two-dimensional electron fluid // *Physical Review B*. 1985. — dec. Vol. 32, no. 12. Pp. 7676–7684.
7. Говоров А. О., Чаплик А. В. Эффекты запаздывания в процессах релаксации двумерной электронной плазмы // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1989. Т. 95, № 6. С. 1976–1979.
8. Фалько В. И., Хмельницкий Д. Е. Что, если проводимость пленки больше, чем скорость света? // *ЖЭТФ*. 1989. Т. 95, № 6. С. 1988–1992.
9. Sirtori C., Gmachl C., Capasso F. et al. Long-wavelength ($\lambda \approx 8\text{--}11.5 \mu\text{m}$) semiconductor lasers with waveguides based on surface plasmons // *Optics letters*. 1998. Vol. 23, no. 17. Pp. 1366–1368.
10. Kukushkin I. V., Smet J. H., Mikhailov S. A. et al. Observation of retardation effects in the spectrum of two-dimensional plasmons // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90, no. 15. P. 156801.
11. Muravev V. M., Andreev I. V., Kukushkin I. V. et al. Observation of hybrid plasmon-photon modes in microwave transmission of coplanar mi-

- croresonators // *Physical Review B*. 2011. Vol. 83, no. 7. P. 075309.
12. Scalari G., Maissen C., Turčinková D. et al. Ultrastrong coupling of the cyclotron transition of a 2D electron gas to a THz metamaterial // *Science*. 2012. Vol. 335, no. 6074. Pp. 1323–1326.
 13. Dyakonov M., Shur M. Shallow water analogy for a ballistic field effect transistor: New mechanism of plasma wave generation by dc current // *Physical Review Letters*. 1993. Vol. 71, no. 15. P. 2465.
 14. Kukushkin I. V., Mikhailov S. A., Smet J. H., von Klitzing K. Miniature quantum-well microwave spectrometer operating at liquid-nitrogen temperatures // *Applied Physics Letters*. 2005. Vol. 86, no. 4. P. 044101.
 15. Knap W., Dyakonov M., Coquillat D. et al. Field effect transistors for terahertz detection: Physics and first imaging applications // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2009. Vol. 30, no. 12. Pp. 1319–1337.
 16. Popov V. V. Plasmon excitation and plasmonic detection of terahertz radiation in the grating-gate field-effect-transistor structures // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2011. Vol. 32, no. 10. P. 1178.
 17. Muravev V. M., Kukushkin I. V. Plasmonic detector/spectrometer of sub-terahertz radiation based on two-dimensional electron system with embedded defect // *Applied Physics Letters*. 2012. Vol. 100, no. 8. P. 082102.
 18. Zudov M. A., Du R. R., Simmons J. A., Reno J. L. Shubnikov–de Haas-like oscillations in millimeterwave photoconductivity in a high-mobility two-dimensional electron gas // *Physical Review B*. 2001. Vol. 64. P. 201311(R).
 19. Ye P., Engel L., Tsui D. et al. Giant microwave photoresistance of two-dimensional electron gas // *Applied Physics Letters*. 2001. Vol. 79, no. 14. Pp. 2193–2195.
 20. Dmitriev I. A., Mirlin A. D., Polyakov D. G., Zudov M. A. Nonequilibrium phenomena in high Landau levels // *Reviews of Modern Physics*. 2012. Vol. 84. P. 1709. 1111.2176v3.

21. Zudov M. A., Du R. R., Pfeiffer L. N., West K. W. Evidence for a new dissipationless effect in 2D electronic transport // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90, no. 4. P. 046807.
22. Mani R. G., Smet J. H., von Klitzing K. et al. Zero-resistance states induced by electromagnetic-wave excitation in GaAs/AlGaAs heterostructures // *Nature*. 2002. Vol. 420, no. 6916. Pp. 646–650.
23. Dai Y., Du R. R., Pfeiffer L. N., West K. Observation of a Cyclotron Harmonic Spike in Microwave-Induced Resistances in Ultraclean GaAs/AlGaAs Quantum Wells // *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 105. P. 246802.
24. Dai Y., Stone K., Knez I. et al. Response of the microwave-induced cyclotron harmonic resistance spike to an in-plane magnetic field // *Physical Review B*. 2011. Vol. 84. P. 241303(R).
25. Hatke A. T., Zudov M. A., Pfeiffer L. N., West K. W. Giant microwave photoresistivity in high-mobility quantum Hall systems // *Physical Review B*. 2011. Vol. 83. P. 121301(R).
26. Hatke A. T., Zudov M. A., Pfeiffer L. N., West K. W. Nonlinear response of microwave-irradiated two-dimensional electron systems near the second harmonic of the cyclotron resonance // *Physical Review B*. 2011. Vol. 83. P. 201301(R).
27. Volkov V. A., **Zabolotnykh A. A.** Undamped relativistic magnetoplasmons in lossy two-dimensional electron systems // *Physical Review B*. 2016. — oct. Vol. 94, no. 16. P. 165408.
28. **Заболотных А. А.**, Волков В. А. Спектр плазмон-поляритонов на полуплоскости // *Письма в ЖЭТФ*. 2016. Т. 104, № 6. С. 424–429.
29. Volkov V. A., **Zabolotnykh A. A.** Bernstein modes and giant microwave response of a two-dimensional electron system // *Physical Review B*. 2014. Vol. 89. P. 121410(R).
30. **Zabolotnykh A. A.**, Volkov V. A. Magnetoplasmon-polaritons in lossy

- two-dimensional electron system // Poster Abstract List of the 22th International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems. 2017. P. 17.
31. **Zabolotnykh A. A.**, Volkov V. A. Mechanism of giant microwave response of two-dimensional electron system near the second harmonic of the cyclotron resonance // Abstracts (vol. 2) of the 20th International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems. 2013. P. 284.
 32. **Заболотных А. А.**, Волков В. А. Магнитоплазмон-поляритоны в диссипативной двумерной электронной системе // Тезисы докладов 13-й Российской конференции по физике полупроводников. 2017. С. 181.
 33. **Заболотных А. А.**, Волков В. А. Спектр краевых плазмонов при учёте электромагнитного запаздывания // Тезисы докладов 12-й Российской конференции по физике полупроводников. 2015. С. 50.
 34. Волков В. А., **Заболотных А. А.** Параметрический циклотронный резонанс при микроволновой накачке 2D электронной системы // Тезисы докладов 11-й Российской конференции по физике полупроводников. 2013. С. 99.
 35. **Заболотных А. А.**, Волков В. А. Сверхдобротные плазмон-поляритоны в «грязной» 2D системе // Труды XXI Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника». 2017. С. 602.
 36. **Заболотных А. А.**, Волков В. А. Закон дисперсии краевых плазмон-поляритонов // Труды XIX Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника». 2015. С. 511.
 37. **Заболотных А. А.**, Волков В. А. Параметрическая неустойчивость двумерных магнитоплазмонов // Труды XVII Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника». 2013. С. 451.
 38. Загороднев И. В., **Заболотных А. А.**, Волков В. А. Отражение электромагнитных волн от двумерной электронной системы с высокой подвижностью в перпендикулярном магнитном поле // Тезисы XVI Школы-кон-

- ференции молодых ученых «Проблемы физики твердого тела и высоких давлений». 2017. С. 80–81.
39. **Zabolotnykh A. A.**, Volkov V. A. Cyclotron parametric resonance in microwave-irradiated two-dimensional electron system // 9th Advanced Research Workshop Fundamentals of Electronic Nanosystems "NanoPeter 2014". 2014. P. 91.
 40. **Zabolotnykh A. A.**, Volkov V. A. Parametric instability of two-dimensional electron system in magnetic field under microwave pumping // Proceedings of the 21st International Symposium "Nanostructures: Physics and Technology". 2013. P. 265.
 41. Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах, Под ред. В. Л. Бонч-Бруевич. МИР, 1965.
 42. Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф. Электронные свойства двумерных систем. Мир, 1985.
 43. Burke P. J., Spielman I. B., Eisenstein J. P., Pfeiffer K. W., L. N. and West. High frequency conductivity of the high-mobility two-dimensional electron gas // Applied Physics Letters. 2000. Vol. 76, no. 6. Pp. 745–747.
 44. Chiu K. W., Quinn J. J. Plasma oscillations of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // Physical Review B. 1974. — jun. Vol. 9, no. 11. Pp. 4724–4732.
 45. Nakayama M. Theory of Surface Waves Coupled to Surface Carriers // Journal of the Physical Society of Japan. 1974. Vol. 36, no. 2. Pp. 393–398.
 46. Bernstein I. B. Waves in a Plasma in a Magnetic Field // Physical Review. 1958. Vol. 109, no. 1. Pp. 10–21.
 47. Horing N. J. M., Yildiz M. M. Quantum theory of longitudinal dielectric response properties of a two-dimensional plasma in a magnetic field // Annals of Physics. 1976. Vol. 97, no. 1. Pp. 216–241.
 48. Glasser M. L. Longitudinal dielectric behavior of a two-dimensional electron gas in a uniform magnetic field // Physical Review B. 1983. Vol. 28,

- no. 8. P. 4387.
49. Chaplik A. V., Heitmann D. Geometric resonances of two-dimensional magnetoplasmons // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1985. Vol. 18, no. 17. P. 3357.
 50. Batke E., Heitmann D., Kotthaus J. P., Ploog K. Nonlocality in the two-dimensional plasmon dispersion // *Physical Review Letters*. 1985. Vol. 54, no. 21. P. 2367.
 51. Batke E., Heitmann D., Tu C. W. Plasmon and magnetoplasmon excitation in two-dimensional electron space-charge layers on GaAs // *Physical Review B*. 1986. Vol. 34, no. 10. P. 6951.
 52. Bangert D. E., Stuart R. J., Hughes H. P. et al. Bernstein modes in grating-coupled 2DEGs // *Semiconductor science and technology*. 1996. Vol. 11, no. 3. P. 352.
 53. Richards D. Inelastic light scattering from inter-Landau level excitations in a two-dimensional electron gas // *Physical Review B*. 2000. Vol. 61, no. 11. P. 7517.
 54. Holland S., Heyn C., Heitmann D. et al. Quantized dispersion of two-dimensional magnetoplasmons detected by photoconductivity spectroscopy // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 18. P. 186804.
 55. Kukushkin I. V., Smet J. H., Scarola V. W. et al. Dispersion of the excitations of fractional quantum Hall states // *Science*. 2009. Vol. 324, no. 5930. Pp. 1044–1047.
 56. Ezawa Z. F. *Quantum Hall effects: Recent theoretical and experimental developments*. World Scientific Publishing Co Inc, 2013. Pp. 705–729.
 57. Чаплик А. В. Эффекты запаздывания в плазменных колебаниях двухслойной структуры // *Письма в ЖЭТФ*. 2015. Т. 101. С. 602–605.
 58. Волков В. А., Павлов В. Н. Радиационные плазмон-поляритоны в многослойных структурах с 2D электронным газом // *Письма в ЖЭТФ*. 2014. Т. 99, № 2. С. 99–104.

59. Попов В. В., Теперик Т. В., Цымбалов Г. М. Спектр поляритонных возбуждений двумерной электронной плазмы в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 68, № 3. С. 200–204.
60. Cheremisin M. V. Magnetoplasmon spectrum for realistic off-plane structure of dissipative 2D system // Solid State Communications. 2017. Vol. 268. Pp. 7–11.
61. Mast D. B., Dahm A. J., Fetter A. L. Observation of bulk and edge magnetoplasmons in a two-dimensional electron fluid // Physical Review Letters. 1985. Vol. 54, no. 15. Pp. 1706–1709.
62. Glattli D. C., Andrei E. Y., Deville G. et al. Dynamical Hall Effect in a Two-Dimensional Classical Plasma // Physical Review Letters. 1985. Vol. 54, no. 15. Pp. 1710–1713.
63. Тальянский В. И. Электростатические колебания в двумерных системах в условиях квантового эффекта Холла // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43, № 2. С. 96–98.
64. Leavitt R. P., Little J. W. Absorption and emission of radiation by plasmons in two-dimensional electron-gas disks // Physical Review B. 1986. Vol. 34, no. 4. P. 2450.
65. Волков В. А., Михайлов С. А. Краевые магнетоплазмоны: низкочастотные слабозатухающие возбуждения в неоднородных двумерных электронных системах // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 217–241.
66. Волков В. А., Галченков Д. В., Галченков Л. А. и др. Краевые магнетоплазмоны в режиме квантового эффекта Холла // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, № 11. С. 510–513.
67. Говорков С. А., Резников М. И., Сеничкин А. П., Тальянский В. И. Магнитоплазменные колебания в гетероструктуре GaAs – AlGaAs // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, № 8. С. 380–382.
68. Nazin S. S., Shikina N. I., Shikin V. B. Edge plasmons in a two-dimensional bounded plasma // Sov. Phys. JETP. 1987. Vol. 65, no. 5. Pp. 924–928.

69. Nazin S. S., Shikin V. B. Edge magnetoplasmons in an electron system at a helium surface; long-wavelength asymptotic spectrum // *Sov. Phys. JETP*. 1988. Vol. 67. Pp. 288–293.
70. Aleiner I. L., Glazman L. I. Novel edge excitations of two-dimensional electron liquid in a magnetic field // *Physical Review Letters*. 1994. Vol. 72, no. 18. P. 2935.
71. Aleiner I. L., Yue D., Glazman L. I. Acoustic excitations of a confined two-dimensional electron liquid in a magnetic field // *Physical Review B*. 1995. Vol. 51, no. 19. P. 13467.
72. Kukushkin I. V., Kulakovskii D. V., Mikhailov S. A. et al. Observation of plasmon-polariton modes in two-dimensional electron systems // *JETP Letters*. 2003. Vol. 77, no. 9. Pp. 497–501.
73. Kukushkin I. V., Muravev V. M., Smet J. H. et al. Collective excitations in two-dimensional electron stripes: Transport and optical detection of resonant microwave absorption // *Physical Review B*. 2006. Vol. 73, no. 11. P. 113310.
74. Гусихин П. А., Муравьев В. М., Кукушкин И. В. Обнаружение аномально слабо затухающих плазменных волн в двумерной электронной системе // *Письма в ЖЭТФ*. 2014. Т. 100, № 10. С. 732–735.
75. Muravev V. M., Gusikhin P. A., Andreev I. V., Kukushkin I. V. Novel relativistic plasma excitations in a gated two-dimensional electron system // *Physical Review Letters*. 2015. Vol. 114, no. 10. P. 106805.
76. Andreev I. V., Muravev V. M., Belyanin V. N., Kukushkin I. V. Measurement of cyclotron resonance relaxation time in the two-dimensional electron system // *Applied Physics Letters*. 2014. Vol. 105, no. 20. P. 202106.
77. Андреев И. В., Муравьев В. М., Белянин В. Н. и др. Когерентный и некогерентный вклады в затухание циклотронного магнитоплазменного резонанса двумерных электронов // *Письма в ЖЭТФ*. 2015. Т. 102, № 12. С. 938–942.

78. Muravev V. M., Andreev I. V., Gubarev S. I. et al. Fine structure of cyclotron resonance in a two-dimensional electron system // *Physical Review B*. 2016. Vol. 93, no. 4. P. 041110.
79. Hatke A. T., Zudov M. A., Reno J. L. et al. Giant negative magnetoresistance in high-mobility two-dimensional electron systems // *Physical Review B*. 2012. Vol. 85, no. 8. P. 081304.
80. Ландау Л., Лифшиц Е. Теоретическая физика. Том 1. Механика. Наука, 1988. С. 106–112.
81. Orgad D., Levit S. Parametric excitation of edge waves in the quantum Hall effect // *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 77, no. 4. P. 719.
82. Mikhailov S. A. Parametric amplification of electromagnetic waves in low-dimensional electron systems // *Applied Physics Letters*. 1998. Vol. 73, no. 13. Pp. 1886–1888.
83. Joas C., Raikh M. E., von Oppen F. Parametric resonance of a two-dimensional electron gas under bichromatic irradiation // *Physical Review B*. 2004. Vol. 70, no. 23. P. 235302.
84. Weick G., Mariani E. Parametric amplification of magnetoplasmons in semiconductor quantum dots // *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, no. 12. P. 125441.
85. Tse W.-K., MacDonald A. H. Magneto-optical Faraday and Kerr effects in topological insulator films and in other layered quantized Hall systems // *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, no. 20. P. 205327.
86. Rudin S., Dyakonov M. Edge and strip plasmons in a two-dimensional electron fluid // *Physical Review B*. 1997. — feb. Vol. 55, no. 7. Pp. 4684–4688.
87. Cataudella V., Iadonisi G. Magnetoplasmons in a two-dimensional electron gas: Strip geometry // *Physical Review B*. 1987. — may. Vol. 35, no. 14. Pp. 7443–7449.
88. Михайлов С. А. Магнетоплазменные возбуждения неоднородных двумерных электронных систем в сильном магнитном поле // *Письма в*

- ЖЭТФ. 1995. Т. 61, № 5. С. 412–416.
89. Wang W., Kinaret J. M., Apell S. P. Excitation of edge magnetoplasmons in semi-infinite graphene sheets: Temperature effects // *Physical Review B*. 2012. — jun. Vol. 85, no. 23. P. 235444.
90. Song J. C. W., Rudner M. S. Chiral plasmons without magnetic field // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2016. — apr. Vol. 113, no. 17. Pp. 4658–4663.
91. Kumar A., Nemilentsau A., Fung K. H. et al. Chiral plasmon in gapped Dirac systems // *Physical Review B*. 2016. — jan. Vol. 93, no. 4. P. 041413.
92. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. Советское радио, 1966. С. 12.
93. Mikhailov S., Savostianova N. Influence of contacts on the microwave response of a two-dimensional electron stripe // *Physical Review B*. 2006. Vol. 74, no. 4. P. 045325.
94. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные поля в плазме полупроводников и газового разряда. Наука, 1975.
95. Dyakonov M., Shur M. Choking of electron flow: A mechanism of current saturation in field-effect transistors // *Physical Review B*. 1995. Vol. 51, no. 20. P. 14341.
96. Dyakonov M., Shur M. S. Current instability and plasma waves generation in ungated two-dimensional electron layers // *Applied Physics Letters*. 2005. Vol. 87, no. 11. P. 111501.
97. Dyer G., Vinh N., Allen S. et al. A terahertz plasmon cavity detector // *Applied Physics Letters*. 2010. Vol. 97, no. 19. P. 193507.
98. Rudin S., Samsonidze G., Crowne F. Nonlinear response of two-dimensional electron plasmas in the conduction channels of field effect transistor structures // *Journal of Applied Physics*. 1999. Vol. 86, no. 4. Pp. 2083–2088.
99. Greene M. P., Lee H. J., Quinn J. J., Rodriguez S. Linear Response Theory

- for a Degenerate Electron Gas in a Strong Magnetic Field // *Physical Review*. 1969. Vol. 177, no. 3. P. 1019.
100. Волков В. А., Тахтамиров Э. Е. Плазмонный механизм магнитоосцилляций сопротивления двумерной электронной системы в сильных электрических полях // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2007. Т. 131, № 4. С. 681–700.
101. Kallin C., Halperin B. I. Excitations from a filled Landau level in the two-dimensional electron gas // *Physical Review B*. 1984. Vol. 30, no. 10. P. 5655.

Приложение А

Краевые плазмоны в анизотропной 2D электронной системе

Рассмотрим спектр краевых плазмонов без запаздывания в 2D ЭС с прямолинейной границей и анизотропией проводимости: $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$ (x и y – главные оси тензора проводимости). 2D ЭС расположена в полуплоскости $z = 0$ и $x > 0$, граница 2D ЭС совпадает с осью y . Край 2D ЭС будем моделировать с помощью резкого скачка электронной концентрации n_0 до нуля при $x < 0$. Считаем, что 2D ЭС расположена в вакууме. Решения будем искать в виде волн, бегущих вдоль границы 2D ЭС: $\exp(iq_y y - i\omega t)$.

Решим задачу с помощью приближённого метода замены ядра в интегральном уравнении [6]. В рамках этого метода, уравнение Пуассона для связи плотности заряда плазмона $\rho(x)$ и потенциала плазмона $\varphi(x, z)$:

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2 - q_y^2)\varphi(x, z) = -4\pi\rho(x)\delta(z), \quad (\text{A.1})$$

заменяется на уравнение для потенциала в плоскости $z = 0$ [6]:

$$(\partial_x^2 - 2q_y^2)\varphi(x, z = 0) = -4\pi q_y \rho(x). \quad (\text{A.2})$$

Перепишем электронную плотность через обычную концентрацию $n(x)$: $\rho(x) = -en(x)$. Теперь перейдём к уравнению движения для электронов. Будем пользоваться обычным уравнением Эйлера для гидродинамической скорости электронов (2.1), однако слагаемое с давлением $-s^2\nabla n/n_0$ в правой части уравнения учитывать не будем. Как уже упоминалось в Главе 2, введение этого слагаемого в правую часть уравнения [6] нужно для выполнения условия на непрерывность производной потенциала $\varphi(x)$ при $x = 0$. На спектр в длинноволновом пределе это слагаемое не оказывает влияния. Единственное, теперь нужно будет аккуратно учесть δ -образную часть заряда, возникающую

на границе 2D ЭС, что и будет сделано. Отметим ещё раз, что введение δ -образного заряда носит формальный характер и связано с использованием приближённого метода замены ядра [6].

Представим возмущённую концентрацию $n(x)$ в виде суммы резкого $N_0\delta(x)$ и плавного $n_s(x)$ слагаемых: $n(x) = N_0\delta(x) + n_s(x)$. Как и при поиске дисперсионного уравнения в Главе 2, решим уравнения в областях $x < 0$ и $x > 0$, а затем сошьем решения на границе. При $x > 0$ из уравнения непрерывности выражаем $n_s(x)$:

$$-i\omega en_s(x) = j'_x + iq_y j_y, \quad (\text{A.3})$$

где штрих обозначает производную по координате x . Находим

$$n_s(x) = \frac{-\sigma_{xx}\varphi''(x) + q_y^2\sigma_{yy}\varphi(x)}{-i\omega e}, \quad (\text{A.4})$$

где $\varphi(x)$ берётся при $z = 0$.

Подставляем $n_s(x)$ в уравнение (A.2), получаем уравнение для потенциала:

$$\varphi''(x) \left(1 - \frac{4\pi q_y \sigma_{xx}}{i\omega}\right) - 2q_y^2 \left(1 - \frac{2\pi q_y \sigma_{yy}}{i\omega}\right) \varphi(x) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Отметим, что получилось уравнение второго порядка, а не четвёртого (см. [6], также первое уравнение (2.6)), т.к. $s = 0$. Ищем решение в виде $\varphi(x) = \varphi_1 \exp(-\lambda x)$, где φ_1 – константа, находим

$$\lambda^2 = 2q_y^2 \frac{i\omega - 2\pi q_y \sigma_{yy}}{i\omega - 4\pi q_y \sigma_{xx}}, \quad (\text{A.6})$$

выбираем корень так, чтобы $Re\lambda > 0$. Полученный корень соответствует корню λ_1 , см. формулы (2.10). Информация, связанная со вторым корнем (2.10), как будет видно ниже, ушла в граничное условие для $\varphi'(x)$; качественно это можно понять из того, что при $s \rightarrow 0$ для второго корня получаем $\lambda_2 \rightarrow \infty$, а значит длина локализации заряда, связанная с корнем λ_2 , стремится к нулю.

При $x < 0$ получаем обычное решение

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{\sqrt{2}q_y x}, \quad (\text{A.7})$$

где φ_0 – константа, $q_y > 0$.

Теперь обсудим граничные условия при $x = 0$ для $\varphi(x)$. Они следуют из уравнения (A.2). Получаем, что функция $\varphi(x)$ должна быть непрерывна, а производная имеет разрыв, связанный с наличием δ -образного заряда:

$$\varphi'(x)|_{x=-0}^{x=+0} = 4\pi q_y e N_0. \quad (\text{A.8})$$

Наконец, нужно ещё одно граничное условие. В подходе с $s \neq 0$ оно было необходимо для определения константы, соответствующей λ_2 ; в нашем подходе $s = 0$ и условие нужно для определения величины N_0 . При $s \neq 0$ использовалось условие зануления нормальной к границе компоненты тока (или скорости) на границе $j_x(x = 0) = 0$. Теперь же, из уравнения непрерывности следует

$$j_x|^{x=+0} = -i\omega e N_0, \quad (\text{A.9})$$

где сразу использовано, что при $x < 0$ ток отсутствует.

Теперь граничных условий хватает и можно получить дисперсионное уравнение. Находим:

$$\lambda + \sqrt{2}q_y - \frac{4\pi q_y \sigma_{xx}}{i\omega} \lambda = 0. \quad (\text{A.10})$$

Далее используем формулы Друде (4) в чистом пределе, т.е. при времени релаксации импульса электронов стремящемся к бесконечности ($\tau \rightarrow \infty$); считаем, что анизотропия проводимости обусловлена анизотропией эффективной массы электрона:

$$\sigma_{xx,yy} = \frac{e^2 n_0}{-i\omega m_{x,y}}. \quad (\text{A.11})$$

Вводим обозначения

$$\omega_{x,y}^2 = \frac{2\pi e^2 n_0 q_y}{m_{x,y}} \quad (\text{A.12})$$

– это объёмные законы дисперсии двумерного плазмона, волновой вектор которого по модулю равен q_y , а направлен вдоль оси x или y .

Теперь дисперсионное уравнение (A.10) можно записать в виде

$$\sqrt{\frac{\omega_y^2 - \omega^2}{2\omega_x^2 - \omega^2}} + 1 - \frac{2\omega_x^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\omega_y^2 - \omega^2}{2\omega_x^2 - \omega^2}} = 0. \quad (\text{A.13})$$

После преобразований получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = \frac{2\omega_x^2\omega_y^2}{2\omega_x^2 + \omega_y^2}, \quad (\text{A.14})$$

т.е. закон дисперсии корневой $\omega \propto \sqrt{q_y}$. Для случая без анизотропии $\omega_x = \omega_y = \omega_{pl}(q_y)$, получаем известный результат [6] $\omega = \sqrt{2/3} \cdot \omega_{pl}(q_y)$.

Таким образом, чтобы найти спектр плазмонов в длинноволновом пределе в рамках использованного приближённого метода, необязательно вводить в правую часть уравнения движения слагаемое $-s^2\nabla n/n_0$, приводящее к уравнению высокого порядка на потенциал $\varphi(x)$. Можно вместо этого формально ввести δ -образный заряд в концентрацию $n(x)$, связанную с плазменным колебанием, а s положить равным нулю, что сильно упростит вычисления. При этом спектр в длинноволновом пределе не меняется, а заряд, который был локализован на длине, связанной с корнем $\lambda_2 \sim 1/s$ (см. формулу (2.10)), как раз и становится δ -образным (см. рис. 2.5). Конечно же, дисперсионное уравнение (2.14) может быть также получено занулением s и введением δ -образного заряда. Также данный метод упрощает вычисления спектра в более сложных случаях, например, для краевого плазмон-поляритона в магнитном поле.