

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова
Российской академии наук (Саратовский филиал)
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



Сысоев Илья Вячеславович

**Специализированные подходы к реконструкции
ансамблей сложных колебательных систем по
временным рядам**

01.04.03 – Радиоп физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н., профессор

Пономаренко Владимир Иванович

Саратов – 2018

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Реконструкция сетей колебательных систем с запаздыванием	22
1.1. Введение	22
1.2. Уравнения ансамбля систем с запаздыванием первого порядка	24
1.3. Реконструкция времени запаздывания элементов	25
1.4. Реконструкция параметров инерционности, нелинейных функций и архитектуры связей	28
1.5. Апробация метода в численном эксперименте	31
1.6. Восстановление уравнений ансамбля связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью	42
1.7. Модифицированный подход к реконструкции	43
1.8. Тестирование модифицированного подхода в численном эксперименте	51
1.9. Восстановление цепочки экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью	59
1.10. Реконструкция систем с запаздыванием под внешним периодическим воздействием	63
1.11. Реконструкция однонаправленно связанных систем первого порядка с запаздыванием по временной реализации ведомой системы	75
1.12. Выводы	83
Глава 2. Реконструкция сетей колебательных систем без запаздывания в собственной динамике	86
2.1. Введение	86

2.2.	Модель динамики частоты бёрстинга нейронов	89
2.3.	Методика реконструкции	90
2.4.	Результаты апробации метода	97
2.5.	Модернизированный подход	107
2.6.	Метод реконструкции ансамблей осцилляторов второго порядка .	111
2.7.	Апробация метода реконструкции ансамблей обобщённых осцил- ляторов ван дер Поля в численном эксперименте	121
2.8.	Выводы	135

Глава 3.	Разработка подходов к оценке связанности в ансамблях на основе нелинейного метода причинности по Грейнджеру для сигналов с выраженным временным масштабом	137
3.1.	Введение. Метод причинности по Грейнджеру	137
3.2.	Тестирование метода причинности по Гренджеру для однонаправ- ленно связанных систем при различной степени несовершенства модели	139
3.3.	Определение запаздывания в связях	155
3.4.	Выбор временных масштабов при построении эмпирической модели	157
3.5.	Интегрированные критерии эффективности метода	166
3.6.	Выводы	182

Глава 4.	Влияние помех и шумов наблюдения на оценки связан- ности нелинейным методом причинности по Грейнджеру . . .	186
4.1.	Введение	186
4.2.	Эффект увеличения чувствительности метода причинности по Грейнджеру с ростом измерительного шума	188
4.3.	Оценка работоспособности метода причинности по Грейнджеру для выявления однонаправленной связи при наличии общей внеш- ней низкочастотной помехи	198

4.4. Учёт непрямых связей в цепочке из трёх однонаправленно связанных систем методом причинности по Грейнджеру	212
4.5. Выводы	221

Глава 5. Определение связей методом причинности по Грейнджеру по нестационарным временным рядам при наличии быстрых переходных процессов	225
5.1. Введение	225
5.2. Эталонные осцилляторы и методика исследования	228
5.3. Исследование чувствительности и специфичности метода вблизи порога фазовой синхронизации	233
5.4. Выбор структуры и параметров прогностических моделей	241
5.5. Однонаправленно связанные однотипные осцилляторы	245
5.6. Однонаправленно связанные разнотипные осцилляторы	254
5.7. Двухнаправленно связанные и несвязанные осцилляторы	256
5.8. Выводы	261

Глава 6. Адаптация методов оценки связанности к специфике сигналов локальных потенциалов мозга при различных патологиях	265
6.1. Введение	265
6.2. Животные–модели и экспериментальные данные	267
6.3. Реконструкция эмпирической нелинейной модели электроэнцефалограммы во время абсансного разряда	268
6.4. Метод автоматической разметки пик-волновых разрядов с помощью предсказательных моделей	273
6.5. Анализ экспериментальных сигналов локальных потенциалов в скользящем временном окне	284
6.6. Сопоставление результатов линейного и нелинейного метода причинности по Грейнджеру для пик-волновых разрядов	290

6.7. Анализ структуры связей по многоканальной электроэнцефалограмме пациента с односторонним детским церебральным параличом	292
6.8. Выводы	298
Заключение	300
Список литературы	305

Введение

Актуальность темы работы. Многие эффекты в реальных системах различной природы: радиофизических, климатических, нейрофизиологических обусловлены наличием и изменением во времени сложных связей между элементами этих систем. Информация о связях отражена в поведении этих систем во времени. Как правило, при исследовании сложных объектов доступны именно временные ряды в виде дискретных последовательностей одной или нескольких физических величин, а структура взаимодействия не может быть детектирована непосредственно. Поэтому важно и актуально развивать подходы к реконструкции связей между элементами сложных систем по временным рядам. Эти подходы могут быть полезны в задачах управления, прогнозирования поведения, диагностики и контроля, а также синтеза систем с заранее заданными свойствами. Существуют несколько областей науки, где методы радиофизики и нелинейной динамики широко используются для анализа сложных систем в настоящее время. В частности, в климатологии стоит задача выявления силы и характера взаимодействий между колебательными процессами в атмосфере и океане в разных областях земного шара и их влияния на погоду, в нейрофизиологии — задача выявления взаимодействий между областями мозга, генерирующими колебательные электрические сигналы. Одним из самых распространённых заболеваний, к которому ведёт нарушение структуры связей, является эпилепсия. В этих и ряде других случаев общим является подход, основанный на фундаментальных достижениях радиофизики и нелинейной динамики, состоящий в том, что элементы изучаемой сложной системы представляются в виде связанных осцилляторов, а взаимодействие отдельных узлов сети оценивается по временным рядам наблюдаемых.

Разработка научных основ и принципов активной и пассивной дистанционной диагностики окружающей среды, основанных на современных методах решения обратных задач — одна из фундаментальных задач радиофизики. В

общем случае обратные задачи некорректны и не имеют решения. Но если ограничиться определённым, довольно узким классом систем и дополнительно привлечь априорную информацию, полученные частные решения могут иметь большое практическое значение. Например, реконструкция связей может быть полезна для выявления очага или источника аномальной активности в сети, например, деформации строительных конструкций в сети датчиков напряжения, зародыша урагана или эпилептического фокуса, а также для диагностики изменений в распределении источников, их перемещения и группировки. При достаточной дополнительной информации об объекте помимо выводов о силе и направлениях связей в системе можно также получить информацию о свойствах индивидуальных элементов: их нелинейности, инерционности, временах запаздывания и иных свойствах. Таким образом, методы реконструкции сложных сетей колебательных элементов могут быть использованы не только для оценки связей между элементами, но и для косвенной оценки параметров отдельных подсистем, что в свою очередь может использоваться для кодирования информации, детектирования вышедших из строя и подлежащих замене узлов и элементов, перестройки сети в случае её расширения.

В настоящее время существует значительное число подходов к оценке связанности, которые условно можно разделить на два класса. К первому относятся методы, ставящие себе целью только детектирование наличия связей между элементами и, возможно, характеристику силы взаимодействия, но не претендующие на сколько-нибудь точное воспроизведение индивидуальных свойств подсистем. При этом используются только самые общие представления о природе узлов. К ним относятся: метод причинности по Грейнджеру [1], его нелинейные обобщения с использованием различных базисных функций [2; 3], с разрешением по времени [4] и по частоте [5]; энтропия переноса [6], которая может быть сведена к методу причинности по Грейнджеру для очень простых шумовых процессов [7], но в общем случае даёт отличные от него оценки; частная направленная когерентность [8]; ряд более простых мер, указывающих на ненаправ-

ленную связанность, похожесть или синхронность систем, например, функция взаимной информации [9] или разные нелинейные коэффициенты корреляции [10]. Все эти подходы получили большое распространение в прикладных областях, в том числе в климатологии [11], экономике [12], нейрофизиологии [13]. Поскольку элементы сложных систем в этих предметных областях сами по себе очень сложны или плохо формализованы, поэтому записать для них уравнения из общих принципов, пусть даже с неизвестными нелинейными функциями и параметрами, не представляется возможным. Минус такого подхода в том, что малый учёт априорной и дополнительной информации об объекте может часто приводить к ложно положительным (плохая специфичность, см., например, [14]) или ложно отрицательным (плохая чувствительность, см., например, [7]) выводам о связанности. Поэтому в реальности он требует существенного доопределения, основанного на учёте специфики наблюдаемых сигналов и априорных свойств изучаемых систем.

В случае рассмотрения задач радиотехники записать уравнения для элементов связанных систем, как правило, хотя бы приблизительно возможно на основе законов Кирхгофа; в том числе для ряда известных систем таких, как кольцевые генераторы с запаздывающей обратной связью [15] (ГЗОС), генератор на туннельном диоде [16], генератор с инерционной нелинейностью [17], генератор с инерционным запаздыванием первого порядка [18], системы фазовой автоподстройки [19], система Чуа [20], периодически возбуждаемая LR-диод цепь [21]. В таком случае может быть использован альтернативный подход, основанный на том, что фактически восстанавливаются уравнения каждого отдельного элемента как неавтономной системы под воздействием других. Такой подход был предложен впервые для реконструкции отдельных неавтономных осцилляторов в [22] и для реконструкции двух связанных систем с запаздыванием в [23], а в последнее время получил распространение и на ансамбли осцилляторов без запаздывания [24]. Однако он требует значительных априорных знаний об элементах и специфике связей и часто также прибегает к параметризации.

Это не всегда оправдано и ведёт к потере грубости и устойчивости результатов при малых вариациях параметров исходных систем и при наличии различных помех, в том числе высокочастотных шумов, низкочастотных помех и общего внешнего воздействия.

Объекты исследования. Объекты исследования в данной работе — сети сложно организованных систем различной природы, в том числе сети радиотехнических генераторов периодических и хаотических колебаний с запаздыванием и без запаздывания и их математические модели, а также сети нейронов в ряде структур мозга, в том числе ответственные за генерацию эпилептиформной активности, и их математические модели — ансамбли нейроосцилляторов различного порядка.

Объекты исследования объединены в работе главным образом общностью радиофизических методов, которые к ним применяются, и общностью их математических моделей, а не принадлежностью к конкретной предметной области, что в принципе свойственно теории колебаний [25]. В то же время большинство рассматриваемых объектов непосредственно относятся к задачам радиотехники или представляют собою математические модели классических систем радиофизики или их обобщения, в частности это ГЗОС, осцилляторы ван дер Поля и Рэлея, генераторы Кияшко–Пиковского–Рабиновича, [16], Анищенко–Астахова [17] и Дмитриева–Кислова [18].

Таким образом, тематика работы полностью соответствует паспорту специальности 01.04.03 «радиофизика», согласно которому радиофизика занимается изучением общих закономерностей генерации, передачи, приёма, регистрации и анализа колебаний и волн различной физической природы, их применением в фундаментальных и прикладных исследованиях. Также в паспорте специальности указано, что общность изучаемых радиофизических закономерностей излучения, распространения, взаимодействия и трансформации колебаний и волн позволяет включить радиофизические методы как универсальное средство исследования окружающей среды на самых различных уровнях.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является разработка и адаптация к специфике экспериментальных данных набора методов реконструкции связей в сложных сетях взаимодействующих колебательных элементов по временным рядам их колебаний. Рассматриваются данные прежде всего радиотехнической и нейрофизиологической природы от систем, могущих описываться дифференциальными уравнениями различного типа и порядка, а также не имеющие построенных из первых принципов хорошо зарекомендовавших себя моделей. В рамках поставленной цели проводится проверка и оптимизация чувствительности и специфичности этих методов и их адаптация на случай существенных искажений экспериментальных сигналов шумами измерения, внешними низкочастотными помехами и воздействием общих источников.

Для достижения цели были решены следующие задачи:

1. Разработка двух методов реконструкции ансамблей осцилляторов с запаздыванием первого порядка по векторным временным рядам колебаний всех элементов ансамбля, позволяющих определить все реально существующие связи, времена запаздывания и параметры инерционности всех элементов ансамбля и таблично восстановить их нелинейные функции.
2. Апробация этих методов в радиофизическом эксперименте при различном числе связей и элементов ансамбля.
3. Разработка методов реконструкции неавтономных систем с запаздыванием при периодическом воздействии и в случае, если известны уравнения воздействующей системы.
4. Разработка подхода к реконструкции ансамблей нейроосцилляторов, описываемых уравнениями первого порядка и связанных сигмоидными функциями связи, позволяющего восстановить систему связей, а также нелинейные функции отдельных элементов, в том числе при наличии шума наблюдений.

5. Разработка подхода к реконструкции ансамблей обобщённых осцилляторов ван дер Поля, включая случай осцилляторов Рэля и Бонхёффера–ван дер Поля по временным рядам первой координаты всех элементов ансамбля, в том числе при нелинейной функции связей и нелинейной функции диссипации.
6. Разработка критериев и анализ чувствительности и специфичности метода нелинейной причинности по Грейнджеру для детектирования связанности по сигналам с явно выраженным временным масштабом.
7. Сопоставление различных функций при построении эмпирических прогнозных моделей для реализации метода причинности по Грейнджеру, включая линейные, кусочно-линейные и полиномиальные.
8. Сопоставление различных подходов к генерации суррогатных временных рядов для тестирования значимости результатов при оценке связанности методом нелинейной причинности по Грейнджеру.
9. Исследование влияния шумов измерений, общей низкочастотной помехи и опосредованных связей на результаты оценки связанности методом причинности по Грейнджеру и выработка рекомендаций по снижению влияния этих негативных факторов на чувствительность и специфичность метода.
10. Исследование возможности детектирования временных изменений в структуре связей методом нелинейной причинности по Грейнджеру в скользящем временном окне.
11. Разработка специализированной структуры эмпирических моделей для анализа связей методом причинности по Грейнджеру по экспериментальным сигналам локальных потенциалов мозга при абсансной эпилепсии.

12. Выявление изменений в структуре связей в мозге крыс–моделей абсансной эпилепсии методом нелинейной причинности по Грейнджеру с использованием построенной ранее специализированной модели и сопоставление с результатами анализа с помощью линейного метода причинности по Грейнджеру и других подходов к анализу связанности.

Использованные методы, подходы, модели. В работе использованы следующие основные идеи, методики и подходы, известные в литературе.

1. При разработке методов реконструкции ансамблей систем с запаздыванием, нейроосцилляторов и обобщённых осцилляторов ван дер Поля для уменьшения числа параметров модели при аппроксимации нелинейной функции была использована ранее высказанная идея [26] о построении целевой функции на основе длины аппроксимированной нелинейной функции отдельного элемента ансамбля на интервале значений аргумента, доступном в эксперименте.
2. Линейный метод наименьших квадратов был использован для реконструкции параметров связей и инерционности в ансамблях осцилляторов с запаздыванием, для оценки коэффициентов связей в сетях нейроосцилляторов, для оценки коэффициентов эмпирических моделей при использовании метода причинности по Грейнджеру.
3. Метод Левенберга–Марквардта (нелинейный метод наименьших квадратов) был использован для реконструкции неавтономных систем с запаздыванием и при реконструкции ансамблей нейроосцилляторов, для которых сигмоидальная функция связи считалась неизвестной.
4. Модифицированная для дискретного шага версия метода градиентного спуска использовалась для поиска времён запаздывания для реконструкции времён запаздывания в ансамблях нейроосцилляторов с задержанными связями.

5. Для реконструкции вектора состояния при построении моделей использовались метод задержек [27] с неравномерным вложением [28] и метод последовательного дифференцирования [29].
6. Метод причинности по Грейнджеру в виде, предложенном в [7], анализировался на чувствительность и специфичность и был взят за основу для разработки адаптированного к нейрофизиологическим данным метода переменной во времени нелинейной причинности по Грейнджеру.
7. Был использован и проанализирован ряд методов генерации суррогатных временных рядов, изложенных в [30].
8. Статистические критерии Шварца [31] и Фишера для оптимизации структуры моделей.
9. Статистический тест Стьюдента для среднего применялся к показателю улучшения прогноза (основная метрика метода причинности по Грейнджеру) для оценки изменений в связанности во времени.
10. Широко был использован спектральный анализ, в ряде случаев была использована фильтрация диапазона (режектор) для уменьшения последствий искажений от узкополосных помех, а также фильтр Савицки-Голэя для численной оценки производных и борьбы с шумами измерений.

Кроме того, для тестирования методов было использовано большое число классических моделей радиофизики и нелинейной динамики, в частности:

- генератор с запаздывающей обратной связью, его радиотехническая реализация и математическая модель;
- модели генераторов Кислова–Дмитриева с 1,5 степенями свободы, Кияшко–Пиковского–Рабиновича, Анищенко–Астахова;

- осцилляторы ван дер Поля, Рэля, Бонхёффера–ван дер Поля (модель нейрона ФитцХью–Нагумо);
- системы Рёсслера и Лоренца.

Научная новизна. Научная новизна работы заключается в следующем.

1. Предложенные подходы к реконструкции ансамблей осцилляторов с запаздыванием являются новыми и не имеют прямых аналогов в литературе, хотя и опираются на ряд ранее известных подходов, в том числе на идею табличного восстановления нелинейной функции и построения на основе длины её описания целевой функции.
2. Впервые продемонстрирована возможность реконструкции уравнений неавтономного осциллятора с запаздывающей обратной связью по его скалярному временному ряду при отсутствии сигнала внешнего воздействия, но при наличии априорной информации об этом сигнале.
3. Предложенные подходы к реконструкции нейроосцилляторов и обобщённых осцилляторов ван дер Поля опираются главным образом на предложенные в работе методы реконструкции ансамблей осцилляторов с запаздыванием, но вносят значительную новизну, включая аппроксимацию нелинейной функции связи сигмоидой и реконструкцию всех времён запаздывания в связях, а также реконструкцию функции диссипации. Они имеют ряд аналогичных методов в литературе [24], но превосходят их тем, что требуют меньших априорных знаний как о структуре связей, так и об уравнениях для описания отдельных элементов.
4. Предложенный метод нелинейной переменной во времени причинности по Грейнджеру является оригинальным сочетанием ряда известных подходов: метода нелинейной причинности по Грейнджеру с полиномиальными моделями общего вида [7], метода линейной переменной во времени причинности по Грейнджеру [4] и модели специальной формы, разработанной

в рамках данного исследования и использующей идею неравномерного вложения [28]. Его высокие чувствительность и специфичность не могут быть достигнуты без использования любого из этих подходов.

5. Предложена методика тестирования метода причинности по Грейнджеру для широкого диапазона связей.
6. Впервые обнаружено специфическое влияние шума наблюдений на результаты расчёта улучшения прогноза, приводящие к его росту с ростом уровня шума в некотором диапазоне.
7. Впервые проведено систематическое сопоставление результатов тестирования на значимость выводов о связанности линейным и нелинейным методом причинности по Грейнджеру при использовании различных подходов к генерации суррогатных данных, в том числе в режимах, характеризующихся очень высоким (до 0,95) коэффициентом фазовой когерентности.
8. Впервые сформулированы рекомендации к практическому применению и определены ограничения для метода причинности по Грейнджеру, применяемого в коротком (4–16 характерных периодов колебаний) временном окне для определения эволюции структуры связей.
9. Предложен алгоритм различения прямых и опосредованных связей в сетях из трёх связанных систем, основанный на идее условной причинности по Грейнджеру, но состоящий из трёх отдельных тестов.
10. Впервые показано на большой выборке данных, что использование нелинейной причинности по Грейнджеру может дать существенно большую информацию об изменениях связанности в нейрофизиологической системе при различных патологиях: абсансной и лимбической формах эпилепсии и детском церебральном параличе, чем это позволяет линейная причинность или иные существующие методы.

Достоверность полученных результатов. Основной способ проверки научных результатов — их воспроизводимость. Работы, опубликованные по материалам диссертации, содержат все необходимые сведения для повторения их другими исследователями, а ряд измерений и расчётов были повторены несколькими авторами публикаций по теме диссертации независимо друг от друга для проверки достоверности. Все расчёты, проведённые в рамках работы, согласуются с известными в литературе результатами, в том числе и количественно, когда такое сравнение возможно. Выводы работы подкрепляются тем, что они сделаны на общетеоретическом базисе радиофизики и нелинейной динамики и сопровождаются оценкой значимости с использованием хорошо зарекомендовавших себя статистических критериев.

Научно-практическая значимость работы. Результаты работы имеют практическую направленность. В частности, они могут быть непосредственно использованы в радиотехнике и электронике для динамического определения взаимодействий в сетях маломощных передатчиков–генераторов, а также в нейрофизиологии для анализа экспериментальных сигналов локальных потенциалов мозга и сигналов поверхностных электроэнцефалограмм при изучении различных патологий: эпилепсий, детского церебрального паралича, болезни Паркинсона, а также при изучении процессов нормального функционирования мозга во сне и во время бодрствования. Ценность разработанных подходов состоит в том, что они имеют существенно лучшие чувствительность (дают меньше ложно отрицательных результатов) и специфичность (дают меньше ложно положительных результатов), чем большинство известных методов и при этом более низкие требования к объёму экспериментальной выборки.

Вместе с тем, результаты имеют также общетеоретическое значение (как и многие результаты теории колебаний и волн), поскольку ряд разработанных методов реконструкции ансамблей, а также модификации метода причинности по Грейнджеру, предложенные в работе, и сформулированные в ней рекомендации по его применению могут быть использованы при анализе сигналов любой

природы: радиофизических, климатических, нейрофизиологических и других.

Апробация результатов исследования. Результаты работы были доложены на следующих всероссийских и международных конференциях диссертантом лично:

- International Conference “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity”, Saratov, 2014;
- 7th Crimean School and Workshop “Emergent Dynamics of Oscillatory Networks”, Crimea, 2012;
- “Nonlinear Dynamics on Networks”, Kiev, 2010;
- 6th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 2013, Istanbul, Turkey;
- “Saratov Fall Meeting”, Saratov, 2014, 2015, 2016;
- 5th annual International Conference–School “Dynamics, Bifurcations, and Chaos”, Nizhny Novgorod, 2018;
- IX, X и XI международные школы–конференции «Хаотически автоколебания и образование структур», Саратов, 2010, 2013, 2016;
- 15, 16 и 17 Всероссийские научные школы «Нелинейные волны — 2010, 2012, 2016», Нижний Новгород;
- Всероссийская научная школа-конференция «Нелинейные колебания механических систем», Нижний Новгород, 2008;
- Научные школы «Нанопотоника, наноэлектроника, нелинейная физика — 2007–2018», Саратов;
- Второй всероссийский семинар памяти профессора Ю.П. Волкова «Современные проблемы биофизики, генетики, электроники и приборостроения», Саратов, 2015.

- 55-ая ежегодная конференция МФТИ, Долгопрудный, 2012.

Также диссертант выступал с результатами работы на научных семинарах в Институте физики и астрономии Потсдамского университета в январе и октябре 2017 года по приглашению проф. А.С. Пиковского (всего дважды), научных семинарах Дондерс Института Радбоуд университета Неймегена (Нидерланды) по приглашению проф. Жилия ван Луйтелаара в 2013, 2014, 2015 и 2017 годах (четырежды), на научных семинарах Института физиологии I Вестфальского университета имени Кайзера Вильгельма в Мюнстере в сентябре–ноябре 2017 (трижды), на научных семинарах СФ ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН (более 20 раз).

Гранты научных фондов. Исследования, вошедшие в данную диссертационную работу, были поддержаны следующими научными фондами:

- Российский научный фонд, проект «Идентификация структуры взаимодействий и собственных параметров элементов в сетях со сложной динамикой по временным рядам» 14-12-00291 на 2014–2016 гг. и его продление на 2017–2018 гг. (основной исполнитель).
- Российский фонд фундаментальных исследований, проект № 16-34-00203 «Диагностика изменений в структуре связей между отделами головного мозга при абсансной эпилепсии по сигналам электроэнцефалограмм», 2016 г. (руководитель).
- Стипендия президента РФ, проект СП-1510.2015.4 «Оценка эффективности лечебных воздействий на основе анализа связей между областями головного мозга человека и животных», 2015–2017 гг., руководитель.
- Российский фонд фундаментальных исследований, гранты №10-02-00980, №11-02-00377, №12-02-00377, №13-02-00227, №14-02-00492, №15-02-03061, №16-02-00091, №17-02-00307 — исполнитель.

- Целевая программа «Развитие научного потенциала высшей школы», 2009–2011 годы, проект № 2.1.1/1738, исполнитель.

Личный вклад автора. Все основные результаты работы получены непосредственно автором либо под его руководством. Автор принимал участие в написании всех статей по теме диссертации и постановке задачи всех исследований. Значительное число результатов было получено совместно с учениками диссертанта: М.В. Корниловым и М.В. Сысоевой, защитившими кандидатские диссертации под руководством автора данной работы, Т.М. Медведевой, Ф.Б. Парамоновым, С.А. Старцевою, П.И. Наконечным — дипломниками автора диссертации. Кроме них значительный вклад в работу на разных стадиях и в разном качестве внесли профессор В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, Б.П. Безручко, Ж. ван Луйтелаар, др. Е.Ю. Ситникова, др. К.М. ван Рейн, доценты Т.В. Диканев и Д.Д. Кульминский.

Публикации по теме работы. Результаты диссертации опубликованы в 24 статьях в рецензируемых журналах из списка ВАК, 13 из которых индексируются в базе данных Web of Science и 16 — в базе данных SCOPUS, а также в двух трудах конференций, индексируемых Web of Science и SCOPUS. Общий объём опубликованных по теме диссертации работ составил 267 мп. стр., в том числе в журналах из перечня ВАК — 253 мп. стр.

Положения, выносимые на защиту.

1. Для ансамблей осцилляторов, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка с запаздыванием, по зашумлённым векторным временным рядам колебаний всех элементов возможно восстановить систему связей, используя для выявления лишних связей статистический критерий Фишера или кластеризацию модулей коэффициентов связи методом K -средних, все параметры инерционности и времена запаздывания, а также таблично оценить собственные нелинейные функции, для чего были разработаны два новых метода, апробированных в численном и радиофи-

зическом эксперименте.

2. При реконструкции обыкновенных дифференциальных уравнений связанных осцилляторов первого или второго порядка по векторному временному ряду, содержащему только одну компоненту для каждого осциллятора, использование целевой функции, основанной на длине аппроксимации одной из нелинейных функций отдельного элемента на отрезке, соответствующем диапазону наблюдения, значительно повышает сходимость и устойчивость к шумам и снижает требования к объёму априорной информации об объекте.
3. При оценке связанности методом причинности по Грейнджеру использование моделей с полиномиальными и кусочно линейными базисными функциями, структура которых не учитывает основной временной масштаб колебаний, ведёт к появлению большого числа ложно положительных выводов о связанности: выводов о наличии двунаправленной связанности там, где в действительности имеется только однонаправленная, и о наличии связанности в случае, когда несвязанные системы демонстрируют колебания с близкими (относительная разница в 3%–10%) собственными частотами; в то же время, при учёте основного временного масштаба для выбора дальности прогноза и лага вложения при реконструкции вектора состояния оказывается возможно различить направление связи даже для связанных систем с большим (до 0.95) коэффициентом фазовой когерентности.
4. С помощью выбора структуры эмпирических прогностических моделей, включая выбор размерности, лага вложения для реконструкции вектора состояния по скалярным временным рядам, вида нелинейных функций, используя условную причинность по Грейнджеру, а также суррогатные временные ряды для тестирования значимости выводов о связанно-

сти, можно значимо минимизировать отрицательные последствия для чувствительности и специфичности, вызванные наличием высокочастотных шумов наблюдений, общих низкочастотных помех и опосредованных взаимодействий, увеличив число верных выводов о наличии связанности в 1,2–1,5 раза и уменьшив число ложно положительных выводов о наличии связанности в 1,5–5 раз.

5. Методом нелинейной причинности по Грейнджеру, применённым в скользящем временном окне, с использованием адаптированной модели можно детектировать факт и момент времени изменения силы и направления связанности между взаимодействующими объектами по их зашумлённым временным рядам; при этом временное разрешение метода составляет порядка 4–16 характерных периодов колебаний, а для проверки значимости обнаруженных изменений следует использовать суррогатные временные ряды, построенные путём перестановки реализаций.
6. Использование специализированных нелинейных эмпирических моделей для оценки связанности по экспериментальным временным рядам локальных потенциалов мозга и электроэнцефалограмм при различных патологиях, подкреплённое статистическим анализом значимости, позволяет оценить эволюцию связей между различными функциональными структурами мозга, предшествующую возникновению эпилептиформной активности, и показать, что для перехода к ней изменения в связанности являются одним из основных механизмов.

Реконструкция сетей колебательных систем с запаздыванием

1.1. Введение

Ансамбли связанных дифференциальных уравнений с запаздыванием широко используется для моделирования и описания процессов в различных физических [32–34], химических [35] и биологических [36–38] сетях. Для того, чтобы моделировать эти сети по экспериментальным временным рядам, важно реконструировать параметры отдельных подсистем и архитектуру связей между ними. Обе проблемы нетривиальны ввиду того, что даже просто одиночная система с запаздыванием может демонстрировать бесконечномерную хаотическую динамику и прямая реконструкция таких систем с использованием метода восстановления вектора состояния методом задержек [27] часто терпит неудачу. Многие из более продвинутых методов основаны на проекции бесконечномерного фазового пространства систем с запаздыванием на низкоразмерные подпространства [39–43]. Различные критерии используются для оценки качества реконструкции: минимальная ошибка прогноза построенной модели [39–41], минимальное значение информационной энтропии [42], или различные меры сложности прогнозируемых временных рядов [43]. В литературе также предложены некоторые другие методы подходы к оценке параметров систем с задержкой по временным рядам: регрессионный анализ [44; 45], статистический анализ временных интервалов между экстремумами временного ряда [46], анализ ближайших соседей [47], информационно-теоретические подходы [48; 49], метод множественный стрельбы [50], алгоритм оптимизации искателя [51] и адаптивная синхронизация [52; 53]. Отдельная группа методов восстановления систем с запаздыванием основана на анализе реакции объекта на внешние возмущения

[54—57]. Однако, большинство этих подходов могут быть использованы только для восстановления уравнений автономных систем с запаздыванием.

Проблема реконструкции становится ещё сложнее при наличии взаимодействия между отдельными системами с запаздыванием и требует разработки альтернативных методов [23]. Архитектура и сила взаимодействий между элементами сети определяют возможность их синхронного поведения [58; 59]. Проблема определения наличия, структуры и иных характеристик связей в ансамблях с большим числом элементов привлекает всё больше исследователей в последние годы. Для решения этой задачи используются различные методы, включая причинность по Грейнджеру [1; 7; 60], методы моделирования фазовой динамики [61; 62], частную направленную когерентность [8; 63], энтропию переноса [6] и адаптивное управление с обратной связью [64—66]. Однако во всех этих работах предполагалось, что либо задержки в связях нет, либо она заранее известна.

Проблема одновременной оценки связанности в сети и параметров отдельных узлов, включая время запаздывания для систем с запаздыванием была не так давно поднята в работе [67]. Однако предложенное решение имеет значительное число ограничений: возможность искажения оператора эволюции или уже измеренных рядов шумом игнорировалась, нелинейные функции элементов сети предполагались обратимыми, а стартовые догадки для времён запаздывания выбирались очень близкими к истинным значениям. В рамках данной главы предлагаются два идейно близких подхода к реконструкции ансамблей систем, описываемых уравнениями с запаздывающими обратными связями первого порядка. Подходы дают возможность восстановить по временным рядам нелинейные функции всех подсистем и все связи (и отличить реально присутствующие связи от ложных). Работоспособность методов демонстрируется на численных примерах и в радиофизическом эксперименте.

1.2. Уравнения ансамбля систем с запаздыванием первого порядка

Рассматривались сети колебательных элементов, каждый из которых описывается уравнением следующего вида:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)), \quad (1.1)$$

где $i = 1, \dots, D$ суть номера узлов в сети, параметры ε_i характеризуют инерционные свойства элементов, τ_i — время запаздывания, f_i — произвольная гладкая нелинейная функция, $k_{i,j}$ — коэффициенты связи, характеризующие силу воздействия j -го элемента сети на i -тый.

Далее будем предполагать, что в нашем распоряжении имеются временные ряды $\{x_i(t_n)\}_{n=1}^N$ всех D осцилляторов ансамбля длины N , измеренные эквидистантно с шагом выборки Δt и будем для простоты обозначать $x_i(n) = x_i(t_n)$. Также введём дискретное время запаздывания $\theta_i = \lfloor \tau_i / \Delta t \rfloor$. Временные ряды производных $\{\dot{x}_i(t_n)\}_{n=1}^N$ и, при необходимости, вторых производных $\{\ddot{x}_i(t_n)\}_{n=1}^N$ рассчитаем численно с использованием фильтра Савитцки–Голэя для сглаживания [68].

Следует отметить, что время запаздывания является параметром, точность восстановления которого имеет наибольшее влияние на качество реконструкции системы. Даже небольшая погрешность его определения приводит, как правило, к неправильному восстановлению архитектуры связей в ансамбле и большим ошибкам оценки остальных параметров. Поэтому далее предлагается подход к восстановлению параметров элементов и архитектуры связей в ансамбле систем с запаздыванием (1.1), который состоит из двух этапов. Сначала восстанавливаем по временным рядам время запаздывания τ_i каждого элемента, а затем, зная τ_i , восстанавливаем остальные параметры (ε_i и $k_{i,j}$) и нелинейные функции f_i . Это позволяет существенно упростить решение задачи и за счёт этого добиться более высокой точности оценки параметров.

1.3. Реконструкция времени запаздывания элементов

Ранее в [46] было установлено, что во временных реализациях изолированных ($k_{i,j} = 0$) систем с запаздыванием вида (1.1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания. Если такая система совершает хаотические колебания, то экстремумы в её временном ряде расположены нерегулярно и расстояние между ними принимает различные значения. На основе этого свойства был предложен метод определения времени задержки τ_i , использующий статистический анализ временных интервалов между экстремумами хаотического временного ряда системы с запаздыванием. Определив для различных значений τ число ν_i ситуаций, при которых точки временного ряда, разделенные интервалом времени τ , одновременно являются экстремальными, и построив зависимость $\nu_i(\tau_i)$, можно найти время задержки τ_i как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [46].

Рассмотрим, как скажется на эффективности этого метода наличие связи между системами с запаздыванием. Воздействие на систему со стороны соседних элементов ансамбля возмущает траекторию её движения, приводя к исчезновению одних экстремумов временного ряда и появлению других. Особенно заметно этот эффект проявляется при линейной связи систем с запаздыванием, рассмотренной в [23]. В случае диффузионной связи метод, основанный на статистическом анализе экстремумов хаотического временного ряда системы, тоже можно использовать для восстановления времени задержки, причем метод остается эффективным при существенно более высоких значениях коэффициентов связи, чем в случае линейной связи. Поясним это на примере уравнения (1.1), продифференцировав его по t :

$$\varepsilon_i \ddot{x}_i(t) = -\dot{x}_i(t) + \frac{df_i(x_i(t - \tau_i))}{dx_i(t - \tau_i)} \dot{x}_i(t - \tau_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)) \quad (1.2)$$

При наличии инерционности ($\varepsilon_i > 0$), что соответствует реальным ситу-

ациям, экстремумы во временной реализации $x_i(t)$ близки к квадратичным, а следовательно, в экстремальных точках $\dot{x}_i(t) = 0$, $\ddot{x}_i(t) \neq 0$. Тогда если при $\dot{x}_i(t) = 0$ в типичном случае $\ddot{x}_i(t) \neq 0$, то при $\varepsilon_i \neq 0$ должно выполняться условие (1.3)

$$\frac{df_i(x_i(t - \tau_i))}{dx_i(t - \tau_i)} \dot{x}_i(t - \tau_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \dot{x}_j(t) \neq 0. \quad (1.3)$$

Для выполнения условия (1.3) необходимо, чтобы $\dot{x}_i(t - \tau_i) \neq 0$ или/и

$$\sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \dot{x}_j(t) \neq 0 \quad (1.4)$$

Условие (1.4) никогда не выполняется в случае отсутствия связи ($k_{i,j} = 0$) и в случае сильной связи, обеспечивающей синхронизацию элементов, так как при этом $\dot{x}_j(t) = \dot{x}_i(t)$, а $\dot{x}_i(t) = 0$ при выводе условия (1.3). Следовательно, в этих пограничных случаях первое слагаемое в (1.3) отлично от нуля, а значит, производные $\dot{x}_i(t)$ и $\dot{x}_i(t - \tau_i)$ одновременно в нуль не обращаются, т. е. на удалении τ_i от квадратичного экстремума во временном ряде $x_i(t)$ не должно быть другого экстремума. В промежуточных ситуациях слабой и умеренной связи существует вероятность обнаружить пару экстремумов на удалении τ_i друг от друга. Однако, как показывают численные эксперименты, в общем случае эта вероятность меньше, чем вероятность встретить пару экстремумов на удалении $\tau \neq \tau_i$. В результате, число разделенных интервалом времени τ_i экстремумов будет меньше числа экстремумов, разделенных другими значениями времени τ , и график $N_i(\tau)$ будет иметь минимум при $\tau = \tau_i$. Таким образом, можно ожидать, что качественные особенности зависимости $N_i(\tau)$ сохраняются для систем (1.1) в широком диапазоне значений коэффициентов связи. Отметим, что такой метод определения времени запаздывания обладает высоким быстродействием, поскольку использует только операции сравнения и сложения, не требуя вычисления каких-либо мер сложности движения или ошибки аппроксимации данных.

Однако если система с запаздыванием совершает периодические колеба-

ния, такой подход оказывается неработоспособным, так как экстремумы во временном ряде расположены регулярным образом. Для изолированных систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических автоколебаний, не так давно был предложен метод восстановления времени задержки, основанный на возмущении динамики системы внешним воздействием и анализе отклика [57]. Если на переменную $x_i(t)$ изолированной системы с запаздыванием подействовать внешним сигналом $y_i(t)$, представляющим собою прямоугольные импульсы, и построить взаимную корреляционную функцию (1.5), то $C_i(s)$ будет иметь четко выраженный максимум при $s = \tau_i$.

$$C_i = \frac{\langle |\ddot{y}_i(t)| |\ddot{x}_i(t+s)| \rangle_t}{\sqrt{\langle |\ddot{y}_i(t)|^2 \rangle_t \langle |\ddot{x}_i(t+s)|^2 \rangle_t}} \quad (1.5)$$

Недостатком такого подхода по сравнению с рассмотренным выше методом является необходимость активного воздействия на систему. С другой стороны, метод позволяет использовать импульсы малой амплитуды, что позволяет свети воздействие на систему к минимуму.

Исследуем возможность применения такого метода для определения времен задержки в ансамбле связанных систем с запаздыванием. Рассмотрим такой способ возбуждения элементов ансамбля внешними сигналами $y_i(t)$, при котором их модельные уравнения имеют следующий вид:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i) + y_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)), \quad (1.6)$$

где сигнал $y_i(t)$ представляет собою прямоугольные импульсы с амплитудой A_i , периодом T_i и длительностью T'_i . Для восстановления времени задержки τ_i только одного i -го элемента ансамбля достаточно подействовать внешним сигналом только на этот i -й элемент. Как уже было отмечено выше, наличие взаимодействия между системами с запаздыванием приводит к возмущению фазовых траекторий. Эти возмущения снижают чувствительность взаимной корреляционной функции (1.5) как характеристики определения времени задержки. В

результате для восстановления τ_i в общем случае необходимо увеличить амплитуду внешнего воздействия A_i по сравнению со случаем несвязанных систем с запаздыванием. Метод можно использовать при любых значениях коэффициентов связи $k_{i,j}$. Кроме того, этот метод может быть применен к системам (1.1), совершающим как периодические, так и хаотические колебания. Ещё одним достоинством метода является то, что он остается эффективным при высоких уровнях шума, в несколько раз превышающих допустимый уровень шума для метода определения τ_i , основанного на статистическом анализе экстремумов временного ряда.

1.4. Реконструкция параметров инерционности, нелинейных функций и архитектуры связей

Определив τ_i , можно восстановить параметр ε_i , нелинейную функцию f_i и коэффициенты связи $k_{i,j}$ i -й системы с запаздыванием (1.1), имея временные ряды колебаний всех элементов ансамбля. Для этого предлагается следующий подход. Уравнение (1.1) перепишем в виде:

$$f_i(x_i(t - \tau_i)) = \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)), \quad (1.7)$$

Если построить зависимость левой части уравнения (1.7) от $x_i(t - \tau_i)$, то она воспроизведет функцию f_i . Поскольку заранее величины ε_i и $k_{i,j}$ неизвестны, будем искать их, минимизируя величину (1.8), характеризующую расстояние между точками на плоскости $(x_i, f_i(x))$, отсортированными по возрастанию x_i .

$$L_i(\varepsilon_i, k_{i,j}) = \sum_{n=\theta_i+1}^{N-1} \left((x_i(p_n - \theta_i) - x_i(n - \theta_i))^2 + (\varepsilon_i(\dot{x}_i(p_n) - \dot{x}_i(n)) + x_i(p_n) - x_i(n) - k_{i,j} \sum_{j=1, j \neq i}^D (x_j(p_n) - x_i(p_n) - x_j(n) + x_i(n)))^2 \right), \quad (1.8)$$

где p_n — это номер в исходном ряде момента измерения, соответствующего в отсортированному по возрастанию x_i ряде значению, непосредственно следующему за x_n . При ошибочном выборе значений ε_i и $k_{i,j}$ точки на плоскости (x_i, f_i) не ложатся на одномерную кривую, образуя «облако», величина $L_i(\varepsilon_i, k_{i,j})$ будет многократно больше, чем при истинных ε_i и $k_{i,j}$.

Для ε_i и $k_{i,j}$ задаются стартовые догадки, которые затем уточняются симплекс-методом [69], минимизируя величину (1.8), минимум которой обозначим $\hat{L}_{i,D}$, где величина D в нижнем индексе соответствует числу коэффициентов связи. При $D \leq 4$ и отсутствии шума все параметры восстанавливаются с высокой точностью. Однако уже при $D > 4$ типичной является ситуация, когда метод не позволяет выявить отсутствующие связи между элементами ансамбля. Такие связи диагностируются как слабые из-за наличия опосредованных связей через другие элементы. Избавиться от незначимых связей позволяет метод последовательного пробного исключения коэффициентов $k_{i,j}$ из модели (1.1). Для этого выдвигается гипотеза отсутствия связи $j \rightarrow i$ между двумя элементами, соответствующее слагаемое с коэффициентом связи $k_{i,j}$ исключается из модели, и остальные параметры модели восстанавливаются как и ранее по минимуму целевой функции $\hat{L}_{i,D-1}$ функции (1.8). Затем для зафиксированного i процедура повторяется, исключая другой $k_{i,j}$, и так далее для всех $j \neq i$. При этом на каждом шаге предполагается отсутствие воздействия на i -й элемент лишь со стороны одного из остальных j -х элементов ансамбля. Наконец, определяется, при исключении какого из $k_{i,j}$ получается $\min_j \hat{L}_{i,D-1}$ и оценивается статистическая значимость величины $\Lambda = \hat{L}_{i,D-1} / \hat{L}_{i,D}$, руководствуясь следующими соображениями.

При больших N разности, входящие в (1.8) в квадрате, распределены по закону, близкому к нормальному, причём $N/2$ из них можно считать независимыми, поскольку они не имеют общих координат. Кроме того, $L_{i,D}$ зависит от D параметров модели (1.7), что уменьшает общее число независимых величин в (1.8) до $N/2 - D$. Тогда, учитывая, что сумма квадратов K независимых

нормально распределенных величин распределена по закону χ^2 с K степенями свободы [70], получим, что распределение величин $\hat{L}_{i,D}$, полученных при разных значениях параметров и/или наличии шума, подчиняется закону χ^2 с $N/2 - D$ степенями свободы, а величин $\hat{L}_{i,D-1}$ — закону χ^2 с $N/2 - D + 1$ степенями свободы.

Известно, что величина X , являющаяся отношением двух независимых случайных величин, распределённых по закону χ^2 , имеет распределение Фишера–Снедекора с функцией распределения

$$F_{v,w}(X) = B_d \left(\frac{v}{2}, \frac{w}{2} \right), \quad (1.9)$$

где B_d — неполная бета-функция, а $d = vX/(vX + w)$ [71]. Следовательно, величина Λ имеет функцию распределения (1.9) с параметрами $v = /2 - M + 1$ и $w = N/2 - M$. Обозначим через Λ_{1-p} такое значение Λ , при котором $F_{v,w}(\Lambda, 1 - p) = 1 - p$, где p — уровень статистической значимости. Тогда если $\Lambda > \Lambda_{1-p}$, то на уровне значимости p можно сделать вывод о наличии связи между элементами, а значит все $k_{i,j} \neq 0$. В противном случае делается вывод об отсутствии связи $j \rightarrow i$ между соответствующими элементами и далее проверяется значимость остальных связей, последовательно исключая из оставшихся связей i -го элемента по одной. Процедура повторяется, пока все связи не окажутся значимыми. Такой подход позволяет восстановить архитектуру связей, параметры всех элементов и их нелинейные функции.

Если известно, что число связей между элементами ансамбля мало, то для восстановления архитектуры и величины связей предпочтительнее использовать метод последовательного пробного добавления коэффициентов $k_{i,j}$ в модель (1.1). Сначала найдем минимум $\hat{L}_{i,1}$ функции (1.8), предположив, что в уравнении (1.1) отсутствуют все $k_{i,j}$ (связей нет). Затем будем вводить в (1.1) по одному $k_{i,j}$, находя минимум $L_{i,2}$ функции (1.8). Перебрав все $j \neq i$, найдём $\hat{L}_{\min,i,2} = \min_j(\hat{L}_{i,1})$. Если $\Lambda > \Lambda_{1-p}$, где $\Lambda = \hat{L}_{i,1}/\hat{L}_{\min,i,2}$, а $F_{v,w}$ построена при $v = N/2 - 1$, $w = N/2 - 2$, то введённая связь отлична от нуля на уровне

значимости не ниже p . Процедура повторяется, пока очередная добавленная в модель связь не окажется незначимой.

1.5. Апробация метода в численном эксперименте

1.5.1. Восстановление уравнений цепочки однонаправлено связанных уравнений Икеды

В качестве первого примера восстановим параметры элементов и архитектуру связей в цепочке однонаправлено связанных уравнений Икеды [72], описываемых уравнением (1.10), см. рис. 1.1(a).

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \mu_i \sin(x_i(t - \tau_i) - x_{0,i}) + k_{i,i-1}(x_{i-1} - x_i(t)) \quad (1.10)$$

Число элементов в цепочке $D = 10$, и использовано кольцевое граничное условие $x_0 = x_D$. Уравнение Икеды описывает сдвиг x фазы электрического поля в нелинейной поглощающей среде кольцевого резонатора. Параметр μ_i характеризует интенсивность лазерного излучения, подаваемого на вход резонатора, τ_i — время запаздывания, $x_{0,i}$ — постоянный фазовый сдвиг. Уравнение (1.10) является частным случаем уравнения (1.1) с $\varepsilon_i = 1$. Пусть замкнутая в кольцо цепочка состоит из неидентичных элементов, параметры которых принимают случайные значения в следующих интервалах: $\tau_i \in [2, 5]$, $\mu_i \in [15, 25]$, $x_{0,i} \in [0, 2\pi]$, $k_{i,i-1} \in [0.1, 0.5]$, и на каждый элемент действует независимый нормальный белый шум $\xi_i(t)$ с нулевым средним и дисперсией $\sigma_i^2 = 0.01$. При этом все элементы колеблются хаотически. Проиллюстрируем результаты применения предложенной методики восстановления параметров на примере одного из элементов цепочки с параметрами $\tau_7 = 2.15$, $\mu_7 = 21.67$, $x_{0,7} = 3.88$, $k_{7,6} = 0.284$. На рис. 1.1(b) приведён фрагмент временного ряда колебаний в этом элементе цепочки. Подсчитав число ν_7 одновременных обращений в нуль $\dot{x}_7(t)$ и $\dot{x}_7(t - \tau_7)$ для различных значений τ_7 , перебираемых с шагом, равным выборки интегрирования $\Delta t = 0.01$, построим зависимость $\nu_7(\tau)$, введя нор-

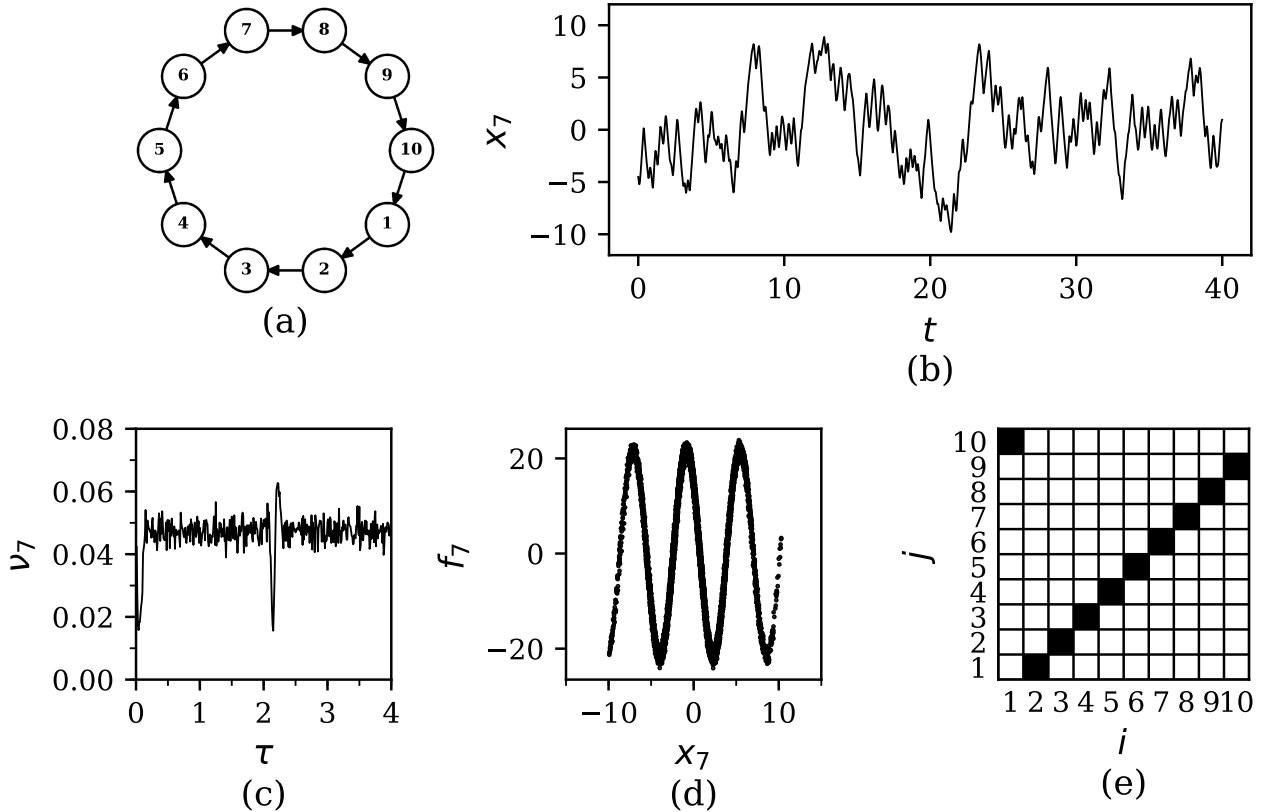


Рис. 1.1. (a) — замкнутая в кольцо цепочка из 10 однонаправлено связанных систем с запаздыванием, (b) — хаотический временной ряд переменной $x_7(t)$ цепочки (10) в присутствии нормального шума с дисперсией $\sigma_i^2 = 0.01$, (c) — зависимость $\nu_7(\tau)$. $\nu_{7 \min} = \nu_7(2.15)$, (d) — функция f_7 , восстановленная на плоскости $(x_7, f_7(x))$, (e) — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Чёрным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым — правильно диагностированные отсутствующие связи.

мировку ν_7 на общее число экстремумов в ряде, см. рис. 1.1(c). Для оценки производной по временному ряду была использована локальная аппроксимация квадратичным полиномом. Абсолютный минимум $\nu_7(\tau)$ наблюдается при истинном времени запаздывания $\tau = \tau_7 = 2.15$. Для построения графика $\nu_7(\tau)$ был использован временной ряд длиной в $N = 40000$ отсчётов, содержащий около 1600 экстремумов.

На рис. 1.1(d) приведена нелинейная функция f_7 , реконструированная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель при $p = 0.05$. Функция f_7 построена при восстановленных значениях

параметров $\tau'_7 = 2.15$, $k'_{7,6} = 0.276$. Она достаточно хорошо совпадает с истинной функцией уравнения Икеды. Аппроксимация восстановленной нелинейной функции гармонической функцией позволила получить следующие оценки параметров: $\mu'_7 = 21.80$ и $x'_{0,7} = 3.97$, которые находятся как амплитуда и начальная фаза гармонической функции соответственно. Аналогичным образом проводилось восстановление параметров и коэффициентов связи остальных элементов цепочки.

Результат реконструкции архитектуры связей в цепочке, полученный с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель, приведен на рис. 1.1(e). Клетка с координатами (i, j) показывает влияние $j \rightarrow i$, кроме клеток на диагонали, не несущих никакой информации. На уровне значимости $p = 0.05$ найдены все десять реально имеющих связей, ложных связей не обнаружено. Отметим, что для построения рис. 1.1(d,e) использованы временные ряды длиной в 10000 отсчётов, т. е. существенно короче, чем для поиска величины запаздывания.

Далее параметры системы (1.10) задавались таким образом, чтобы все элементы цепочки совершали периодические колебания в отсутствие связи, при этом связи приводили к слабому возмущению этого режима. Для этого параметры элементов случайным образом генерировались из равномерного распределения на следующих интервалах: $\tau_i \in [0.5, 1.2]$, $\mu_i \in [4.5, 5.5]$, $x_{0,i} \in [0, 2\pi]$, $k_{i,i-1} \in [0.1, 0.5]$. Пусть также на каждый элемент системы действует независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_i^2 = 0.001$. На рис. 1.2(a) приведён фрагмент временного ряда колебаний в седьмом элементе цепочки, параметры которого: $\tau_7 = 0.94$, $\mu_7 = 5.17$, $x_{0,7} = 3.32$, $k_{7,6} = 0.284$. Поскольку метод оценки времени запаздывания, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда, не применим к периодическим временным рядам, для определения времени запаздывания τ_7 подействуем на переменную $x_7(t)$ слабым внешним сигналом $y_7(t)$, представляющим собой прямоугольные импульсы, таким образом, чтобы динамика возбуждаемого элемента

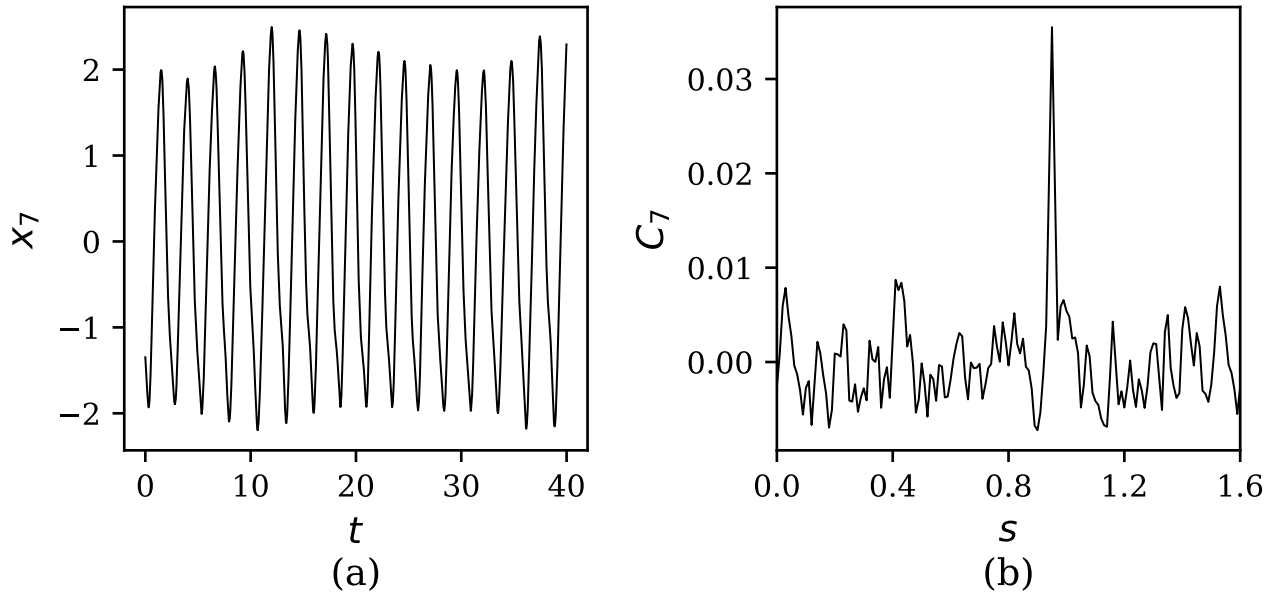


Рис. 1.2. (a) — временной ряд переменной $x_7(t)$ цепочки (1.10) в периодическом режиме в присутствии нормального динамического шума с $\sigma_i^2 = 0.001$, (b) — взаимная корреляционная функция $C_7(s)$, $C_{7,\max}(s) = C_7(0.94)$.

описывалась уравнением (1.6). На рис. 1.2(b) построена взаимная корреляционная функция (1.5) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_7 = 0.1$, период $T_7 = 3$ и длительность $T'_7 = T_7/2$. При шаге изменения s , равном 0.01, $C_7(s)$ имеет высокий максимум при $s = 0.94$, т. е. время запаздывания восстанавливается точно.

С помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель на уровне значимости $p = 0.05$ были получены следующие оценки параметров седьмого элемента: $\mu'_7 = 5.21$, $x'_{0,7} = 3.70$, $k'_{7,6} = 0.303$. Для остальных элементов погрешности восстановления параметров имели те же значения по порядку величины. Результат реконструкции архитектуры связей в цепочке совпадает с результатом, полученным в случае хаотической динамики, см. рис. 1.1(e): все связи были найдены правильно.

1.5.2. Восстановление ансамбля произвольно связанных уравнений

Икеды

Рассмотрим ситуацию, когда элементы ансамбля, описываемые уравнения Икеды вида (1.10) связаны не в кольцо, а достаточно произвольным образом, так что они описываются уравнениями (1.11).

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \mu_i \sin(x_i(t - \tau_i) - x_{0,i}) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(x_j - x_i(t)) \quad (1.11)$$

На рис. 1.3(а) приведена архитектура случайно выбранных связей в ансамбле из 10 элементов. Из 90 возможных связей между элементами ансамбля реально присутствуют 40, причём некоторые элементы связаны только однонаправленно, а другие — взаимно. Параметры неидентичных элементов заданы таким же образом, как в первом рассмотренном примере для цепочки (1.10). При этом все элементы ансамбля колеблются хаотически. Будем также рассматривать ситуацию, когда в динамику каждого элемента добавлялся независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_i^2 = 0.04$ с плоским равномерным спектром.

Как и для ранее рассмотренных примеров, далее проиллюстрированы результаты восстановления седьмого элемента с параметрами $\tau_7 = 2.15$, $\mu_7 = 21.67$, $x_{0,7} = 3.88$, $k_{7,4} = 0.445$, $k_{7,6} = 0.172$, $k_{7,9} = 0.311$, $k_{7,10} = 0.435$, $k_{7,j} = 0$, при $j = 1, 2, 3, 5, 7, 8$. На рис. 1.3(б) приведена зависимость $\nu_7(\tau)$ при шаге изменения τ , равном 0.01. Минимум $\nu_7(\tau)$ наблюдается при истинном времени запаздывания $\tau = \tau_7 = 2.15$.

На рис. 1.3(с) приведена нелинейная функция f_7 , реконструированная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель на уровне значимости $p = 0.05$. Функция f_7 построена при восстановленных значениях параметров $\tau'_7 = 2.15$, $k'_{7,4} = 0.517$, $k'_{7,6} = 0.188$, $k'_{7,9} = 0.355$, $k'_{7,10} = 0.490$, $k'_{7,j} = 0$, для всех $j = 1, 2, 3, 5, 7, 8$. Из-за погрешности определения коэффициентов связи и более высокого уровня шума качество восста-

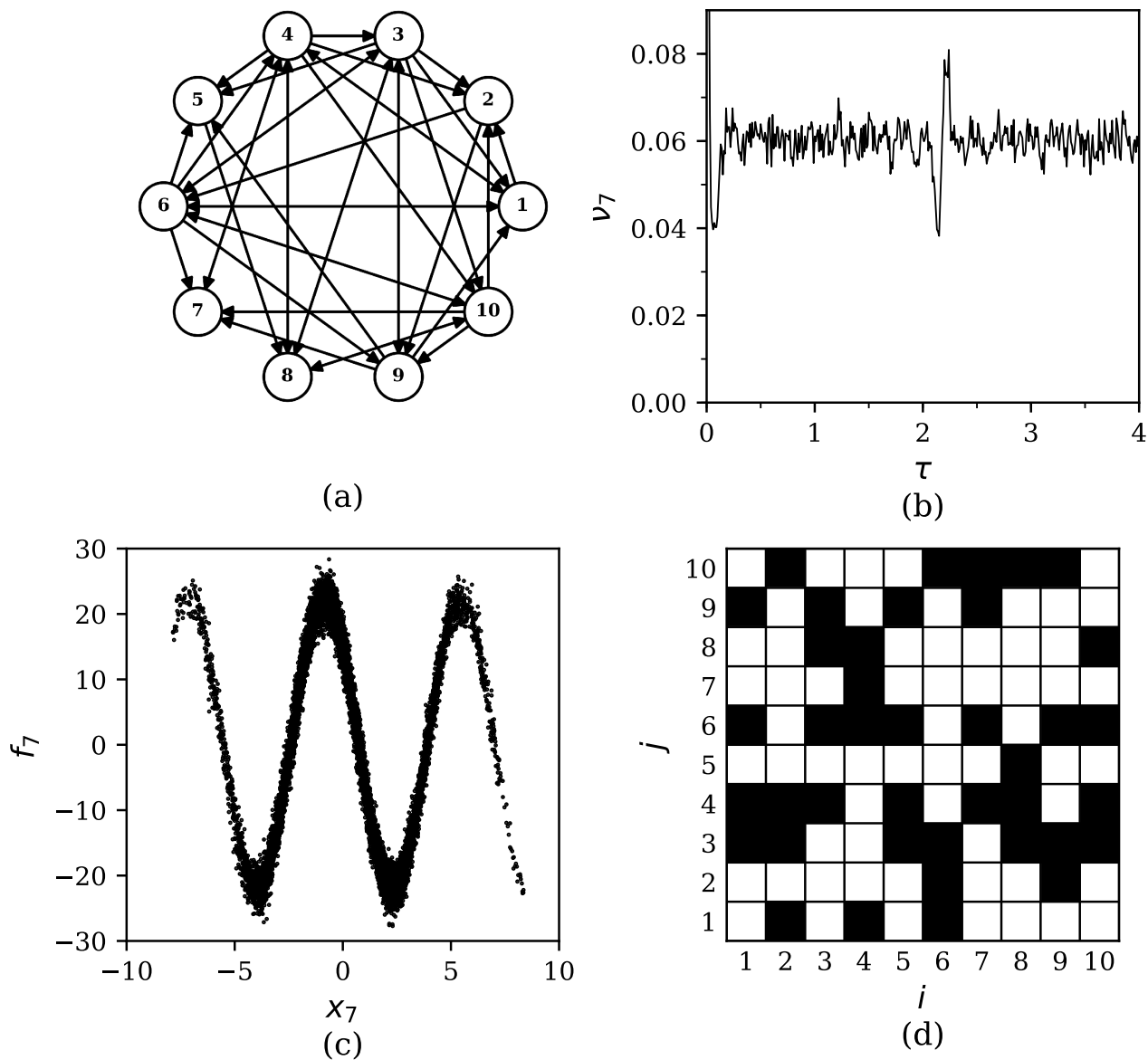


Рис. 1.3. (а) — архитектура связей в ансамбле из 10 произвольно связанных элементов, описываемых уравнениями (1.11), (б) — зависимость $\nu_7(\tau)$, $\nu_{7,\min}(\tau) = \nu_7(2.15)$, (с) — функция f_7 , восстановленная на плоскости (x_7, f_7) , (д) — диаграмма результата реконструкции архитектуры связей.

новления f_7 несколько хуже, чем на рис. 1.1(d). Аппроксимация реконструированной функции f_7 гармонической функцией позволяет оценить и параметры μ_i в исходных уравнениях (1.11), в частности, для рассматриваемого элемента $\mu'_7 = 22.00$.

Параметры связи и индивидуальных узлов были аналогично оценены для всех 10 элементов ансамбля. Результат реконструкции архитектуры связей приведён на рис. 1.3(d). На уровне значимости $p = 0.05$ все 40 связей определяются правильно при использовании как метода добавления связей, так и метода последовательного пробного исключения коэффициентов связи из модели.

Далее рассмотрен случай, когда на элементы ансамбля (1.11) с теми же значениями параметров и той же конфигурацией и величиной связей, что на рис. 1.3(a), действует сильный независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_i^2 = 0.36$. При таком большом σ_i^2 шуме метод восстановления времени запаздывания, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда, оказывается неэффективным и приходится прибегать к активному эксперименту. Для определения времени запаздывания i -го элемента подействуем на переменную $x_i(t)$ слабым прямоугольным импульсным сигналом $y_i(t)$ таким образом, что динамика возбуждаемого элемента описывается уравнением (1.6). На рис. 1.4(a) построена взаимная корреляционная функция (1.5) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал с амплитудой $A_7 = 0.15$, периодом $T_7 = 5$ и длительностью $T'_7 = T_7/2$ действует на переменную $x_7(t)$. При шаге изменения s , равном 0.01, $C_7(s)$ имеет выраженный максимум при $s = \tau_7 = 2.15$. Отметим, что это результат не уникален и несмотря на высокий уровень шума, время запаздывания удастся точно восстановить для всех элементов.

Метод добавления связей, так же как и метод исключения связей, даёт на уровне значимости $p = 0.05$ следующую оценку параметров седьмого элемента: $k'_{7,4} = 0.396$, $k'_{7,6} = 0.142$, $k'_{7,9} = 0.262$, $k'_{7,10} = 0.392$, $k'_{7,j} = 0$ при $j = 1, 2, 3, 5, 7, 8$, $\mu'_7 = 21.52$, $x'_{0,7} = 3.97$. Истинные значения параметров такие

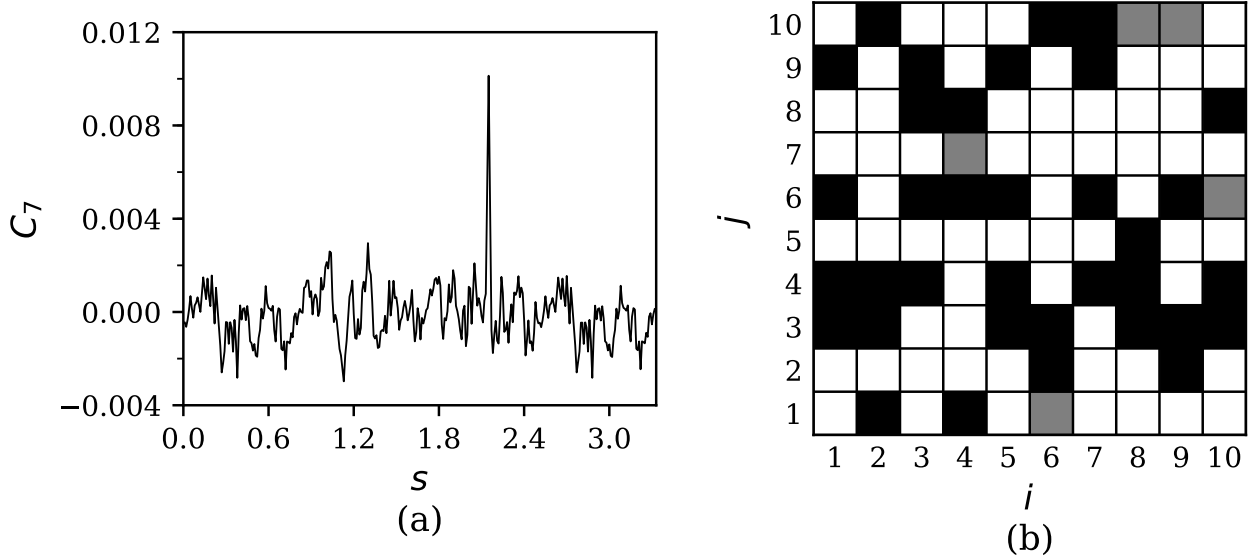


Рис. 1.4. Случай высокого уровня шума: (a) — взаимная корреляционная функция $C_7(s)$, $C_{7,\max}(s) = C_7(2.15)$, (b) — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Чёрным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым — правильно диагностированные отсутствующие связи, серым цветом — пропущенные связи.

же, как приведённые выше для рис. 1.3. Результат реконструкции архитектуры связей в ансамбле приведён на рис. 1.4(b). На уровне значимости $p = 0.05$ из 40 существующих связей удалось найти 35. Таким образом, из-за высокого уровня шума пропущенными оказались 5 связей. Отметим, что, увеличивая p , можно уменьшить количество пропущенных связей, однако при этом повышается вероятность обнаружения ложных.

Все ранее рассмотренные варианты характеризовались относительно редкими связями в ансамбле: 10 или 40 из 90. Поэтому далее рассмотрен случай, когда из 90 возможных связей между элементами ансамбля (1.11) имеется 80 связей. Параметры элементов заданы случайным образом в тех же интервалах, что и в рассмотренном выше примере с 40 связями. На каждый элемент действует независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_i^2 = 0.01$. Положение абсолютного минимума зависимостей $\nu_i(\tau)$ позволяет точно восстановить истинное время запаздывания для каждого элемента ансамбля. Для

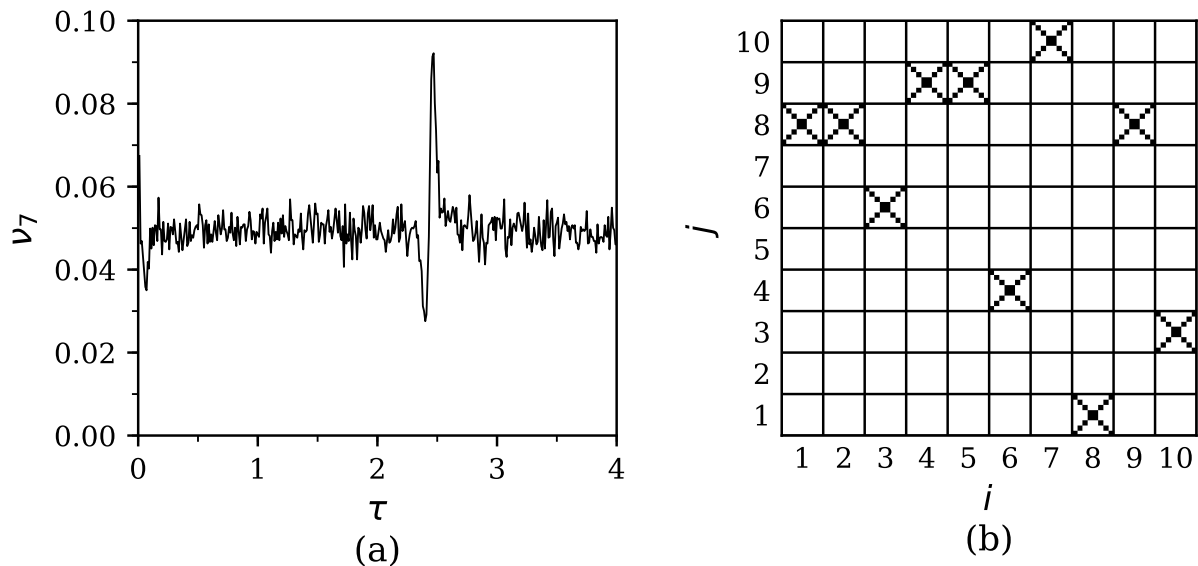


Рис. 1.5. Случай высокого уровня шума: (а) — взаимная корреляционная функция $C_7(s)$, $C_{7,\max}(s) = C_7(2.15)$, (b) — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Чёрным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым — правильно восстановленные связи, крестиками — правильно детектированные отсутствующие.

примера на рис. 1.5, а приведена зависимость $\nu_7(\tau)$, построенная при шаге изменения τ , равном 0.01. Она имеет минимум при $\tau = \tau_7 = 2.40$. Результат реконструкции архитектуры связей, полученный с помощью метода последовательного пробного исключения коэффициентов связи из модели, приведен на рис. 1.5(b). Для удобства восприятия цвета были изменены по сравнению с другими диаграммами (иначе почти всё поле было бы закрашено чёрным). На уровне значимости $p = 0.05$ были правильно обнаружены все 80 связей, ложно положительных результатов метод не дал.

1.5.3. Восстановление ансамбля связанных уравнений

Маккея-Гласса

Чтобы охарактеризовать общность полученных результатов, были рассмотрены ансамбли систем с запаздыванием с другой функцией нелинейности — связанные системы Маккея–Гласса [73], для которых f_i представляется в виде

(1.12), а параметр инерционности $\varepsilon_i = 1/b_i$.

$$f_i(x) = \frac{a_i x_i}{b_i(1 + x_i^{10})} \quad (1.12)$$

Уравнение Маккея-Гласса, описывающее процесс выработки организмом красных кровяных клеток, является эталонным уравнением с запаздыванием, широко используемым при численных исследованиях систем с задержкой.

Будем считать, что ансамбль состоит из неидентичных элементов, параметры которых случайно выбираются из следующих равномерных распределений: $\tau_i \in [300, 400]$, $\varepsilon_i \in [8, 12]$, $a_i \in [0.2, 0.25]$, $k_{i,j} \in [0.01, 0.05]$, и на каждый элемент дополнительно действует независимый нормальный шум $\xi_i(t)$ с нулевым средним и дисперсией $\sigma_i^2 = 10^{-4}$. При этом все элементы в отсутствие шума и связи колеблются хаотически.

На рис. 1.6(а) приведён фрагмент временного ряда колебаний седьмого элемента при $\tau_7 = 335$, $\varepsilon_7 = 10.2$, $k_{7,1} = 0.011$, $k_{7,2} = 0.046$, $k_{7,3} = 0.043$, $k_{7,4} = 0.016$, $k_{7,j} = 0$ для всех $5 \leq j \leq 10$. На рис. 1.6(б) приведена зависимость $\nu_7(\tau)$, построенная по временному ряду переменной $x_7(t)$ длиной 40 000 отсчётов, содержащему около 2600 экстремумов. При шаге изменения τ , равном 1, минимум $\nu_7(\tau)$ наблюдается при истинном времени запаздывания $\tau = \tau_7 = 335$.

На рис. 1.6(с) серым цветом показана функция f_7 , полученная при реконструкции уравнения (1.1) в предположении, что все элементы ансамбля не связаны между собою. Эта функция построена при восстановленных значениях параметров $\tau'_7 = 335$, $\varepsilon'_7 = 8.4$. Чёрным цветом на рис. 1.6(с) показана функция f_7 , восстановленная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель с контролем значимости на уровне $p = 0.05$. Эта функция построена при восстановленных значениях параметров $\tau'_7 = 335$, $\varepsilon'_7 = 10.0$, $k'_{7,1} = 0.012$, $k'_{7,2} = 0.047$, $k'_{7,3} = 0.044$, $k'_{7,4} = 0.017$, $k'_{7,j} = 0$ для всех $5 \leq j \leq 10$. Учёт архитектуры связей существенно улучшает качество восстановления нелинейной функции и точность оценки параметров модели. Погрешности их восстановления вызваны преимущественно присутствием шума.

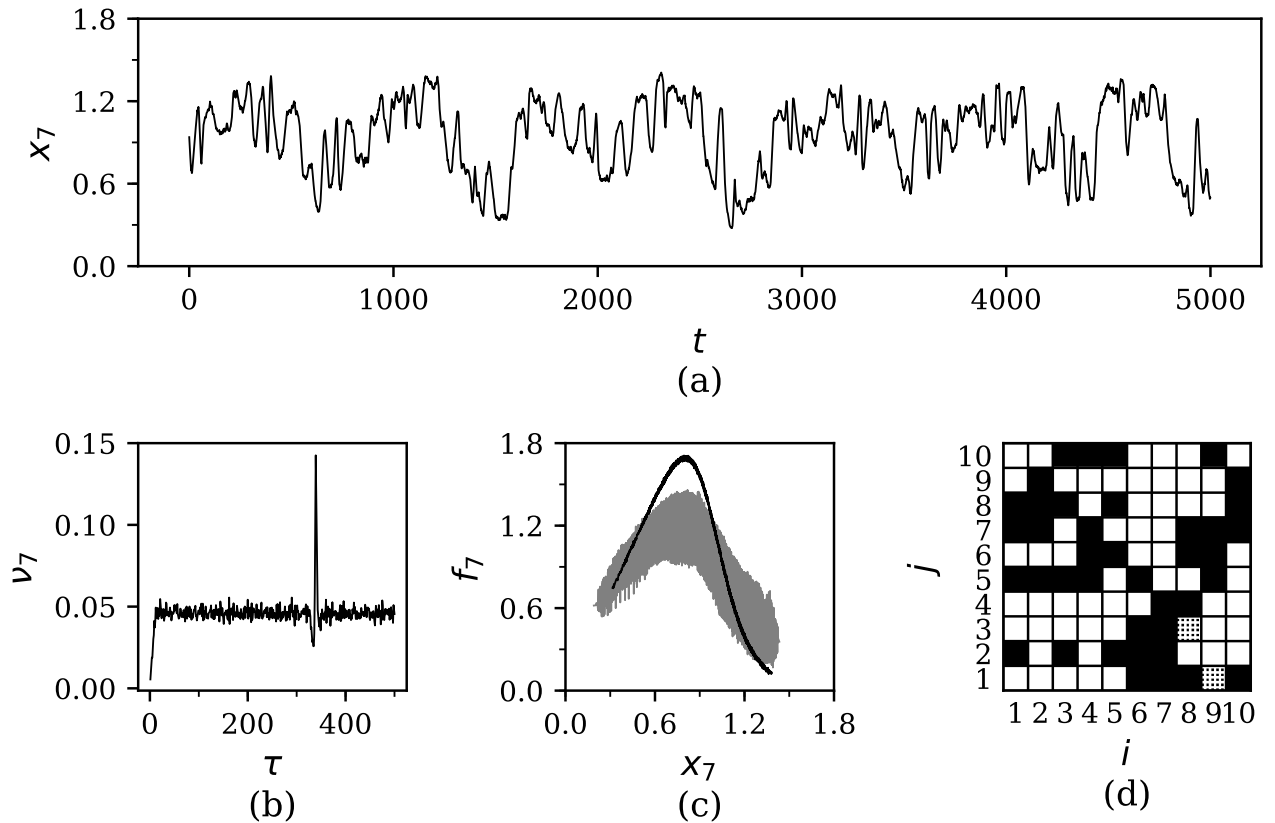


Рис. 1.6. (a) — временной ряд переменной $x_7(t)$ ансамбля (1.1) с функцией (1.12) при добавлении в динамику нормального шума с $\sigma_i^2 = 10^{-4}$, b — зависимость $\nu_7(\tau)$, $\nu_{7,\min}(\tau) = \nu_7(335)$, (c) — функция f_7 , восстановленная на плоскости (x_7, f_7) в предположении отсутствия связей (серый цвет) и при учёте связей (чёрный цвет), (d) — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Чёрным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым — правильно диагностированные отсутствующие связи, точками — ложные связи.

Как и в остальных рассмотренных примерах, для восстановления параметров использованы временные ряды длиной 10 000 отсчётов.

Аналогичным образом проводится восстановление параметров и коэффициентов связи остальных элементов ансамбля. Результат реконструкции архитектуры связей в ансамбле, полученный с помощью метода добавления связей, приведён на рис. 1.6(d). На уровне значимости $p = 0.05$ мы правильно нашли все 40 имеющихся связей. Дополнительно метод показал наличие ещё двух связей, которые являются ложными. Однако доля этих ложных связей в общем количестве связей не превышает p . Как и ранее для связанных систем Икеды,

уменьшая p , можно избавиться от ложных связей, однако при этом некоторые связи окажутся пропущенными. При восстановлении архитектуры связей по тем же временным рядам с помощью метода исключения связей было получено большее количество ложных связей при том же p .

1.6. Восстановление уравнений ансамбля связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью

После апробирования на различных численных примерах предложенный метод был применён к экспериментальным временным рядам трёх связанных неидентичных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.7(а). Она состоит из трёх связанных между собой кольцевых генераторов, каждый из которых включает линию задержки, нелинейный элемент и низкочастотный RC-фильтр первого порядка. Нелинейные элементы и линии задержки были выполнены на микроконтроллерах, а фильтры на аналоговых элементах. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Связь генераторов осуществляется с помощью резисторов R_c . Модельное уравнение для i -го элемента ансамбля имеет вид (1.13), где $V_i(t)$ и $V_i(t - \tau_i)$ суть напряжения соответственно на входе и выходе линии задержки i -го элемента, τ_i — время запаздывания, R_i и C_i — сопротивление и ёмкость элементов фильтра, f_i — передаточная характеристика нелинейного элемента.

$$R_i C_i \dot{V}_i(t) = -V_i(t) + f_i(V_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (V_j(t) - V_i(t)). \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) может быть сведено к виду (1.1) с использованием замен $\varepsilon_i = R_i C_i$, $x_i = V_i$.

Все три нелинейных элемента имели квадратичную передаточную характеристику f_i . Хаотические сигналы $V_i(t)$ записывались с помощью трёхканального аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 10$ кГц. На рис. 1.7(b) приведён фрагмент временной реализации сигнала $V_1(t)$ в первом генераторе, имеющем параметры $\tau_1 = 13.6$ мс, $\varepsilon_1 = 2.88$ мс, $k_{1,2} = R_1/R_c = 0.1$, $k_{1,3} = 0$.

При шаге изменения τ , равном времени выборки точек 0.1 мс, абсолютный минимум зависимости $\nu_1(\tau)$ наблюдается при $\tau = 13.6$ мс, см. рис. 1.7(c). На рис. 1.7(d) приведена функция f_1 , восстановленная по экспериментальным временным рядам с помощью метода добавления коэффициентов связи в модель при $p = 0.05$. Эта функция построена при восстановленных значениях параметров $\tau_1 = 13.6$ мс, $\varepsilon_1 = 2.74$ мс и $k'_{1,2} = 0.098$. Незначимый член связи с коэффициентом $k'_{1,3}$ не был включён в модель. Восстановленная функция достаточно хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой f_1 нелинейного элемента первого генератора. Метод исключения связей даёт для этой экспериментальной системы точно такие же результаты. Характеристики двух остальных элементов были восстановлены аналогичным образом. Результат реконструкции архитектуры связей в ансамбле приведен на рис. 1.7(e). Видно, что на уровне значимости $p = 0.05$ все связи найдены верно.

1.7. Модифицированный подход к реконструкции

Предложенный подход имеет два существенных недостатка: во-первых, он опирается на отдельную процедуру оценки времени запаздывания (либо метод, основанный на статистике экстремумов [46], либо метод, основанный на расчёте автокорреляционной функции [57]), во-вторых, он использует симплекс-метод для минимизации целевой функции (1.8) и итеративный подход для определения значимых связей. Оба эти недостатка существенно снижают простоту применения и многократно увеличивают вычислительное время. При этом для

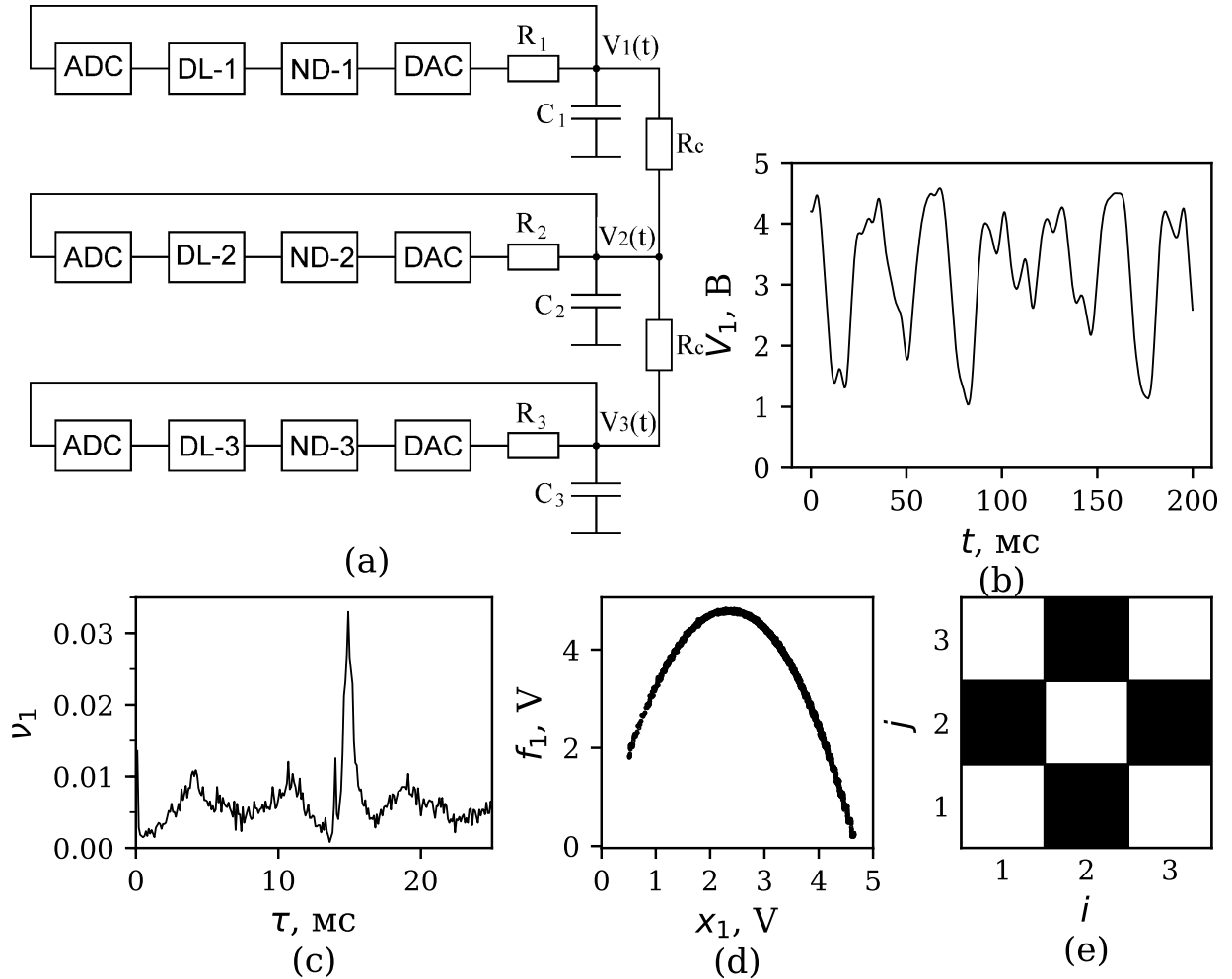


Рис. 1.7. (а) — блок-схема экспериментальной установки, где DL-1, DL-2 и DL-3 суть линии задержки генераторов, ND-1, ND-2 и ND-3 — их нелинейные элементы, ADC — аналого-цифровые преобразователи, DAC — цифро-аналоговые преобразователи; (b) — хаотическая временная реализация $V_1(t)$ первого генератора; (c) — зависимость $\nu_1(\tau)$, $\nu_{1,\min}(\tau) = \nu_1(13.6 \text{ мс})$, (d) — восстановленная функция f_1 ; (e) — диаграмма результата восстановления архитектуры связей.

достаточно больших ансамблей от 10 элементов и более процедуры добавления и исключения коэффициентов становятся недостаточно эффективны из-за частичной синхронизации между узлами, а симплекс-метод часто ведёт к локальным минимумам целевой функции. Поэтому в данном разделе предлагается модификация исходного подхода, которая в значительной степени лишена приведённых недостатков и может быть эффективно использована для ансамблей большего размера. Основная идея заключается в том, чтобы переформулировать целевую функцию так, что задача сводится к линейному методу наименьших квадратов. Это многократно снижает вычислительную сложность алгоритма и увеличивает надёжность результатов. В результате, время запаздывания может быть найдено перебором, так как оно фактически может быть выбрано только дискретно и должно быть кратно шагу выборки Δt .

1.7.1. Вывод целевой функции

Будем по-прежнему рассматривать систему (1.1) и сохраним все предположения и обозначения, дополнительно обозначив значения всех переменных ансамбля в момент времени t за вектор $\mathbf{x}_i(t)$; тогда следуя ранее введённым упрощениям, значения всех переменных в момент времени t_n можно обозначить как $\mathbf{x}_i(n)$. Используя дискретное время запаздывания θ_i , перепишем уравнение (1.1) в следующем виде:

$$f_i(x_i(n)) = \varepsilon_i \dot{x}_i(n + \theta_i) + x_i(n + \theta_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(n + \theta_i) - x_i(n + \theta_i)) \quad (1.14)$$

где $n = 1 \dots N - \theta_i$. Для каждого осциллятора отсортируем значения $x_i(n)$ по возрастанию, обозначив такую сортировку как преобразование Q_i , сопоставляющее точке с номером n в исходном ряде точку с номером $Q_i(\mathbf{x}_i, n)$ в отсортированном ряде. Обратное преобразование, сопоставляющее точке с номером $Q_i(\mathbf{x}_i, n)$ в отсортированном ряде точку с номером n в исходном, обозначим Q_i^{-1} . Тогда $n = Q_i^{-1}(Q_i(n))$. Для краткости обозначений здесь и далее зависимость

Q_i и Q_i^{-1} от \mathbf{x}_i указывать не будем, ограничившись индексом i .

Пусть некоторая точка имеет номер n в исходном ряде и номер $Q_i(n)$ в отсортированном ряде. Тогда её сосед справа в отсортированном ряде будет иметь номер $Q_i(n) + 1$, а в исходном ряде его номер будет $p_n = Q_i^{-1}(Q_i(n) + 1)$, причём номера n и p_n в общем случае не будут близки. Так как точки с номерами $Q_i(n)$ и $Q_i(n) + 1$ являются соседними в отсортированном ряде, значения динамической переменной в этих точках будут близки. А значит, будут близки и значения функции f_i от этих переменных, поскольку все функции f_i , как уже было сказано выше, изначально предполагаются непрерывными. Обозначим разность значений функции f_i в этих точках как $\delta_i(n)$:

$$\delta_i(n) = f_i(x_i(p_n)) - f_i(x_i(n)) \quad (1.15)$$

Используя уравнение (1.14), запишем уравнение (1.15) как (1.16).

$$\delta_i(n) = \left(x_i(p_n + \theta_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(x_j(p_n + \theta_i) - x_i(p_n + \theta_i)) + \varepsilon_i \dot{x}_i(p_n + \theta_i) \right) - \left(x_i(n + \theta_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(x_j(n + \theta_i) - x_i(n + \theta_i)) + \varepsilon_i \dot{x}_i(n + \theta_i) \right). \quad (1.16)$$

Введём новые обозначения и перепишем выражение (1.16) в следующем виде:

$$\delta_i(n) = \Delta x_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) + \varepsilon_i \Delta \dot{x}_i(n) \quad (1.17)$$

$$\Delta x_i(n) = x_i(p_n + \theta_i) - x_i(n + \theta_i) \quad (1.18)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(p_n + \theta_i) - \dot{x}_i(n + \theta_i) \quad (1.19)$$

Обозначим через L_i^2 сумму $\delta_i^2(n)$:

$$L_i^2 = \sum_{n=1}^{N-\theta_i-1} \delta_i^2(n) = \sum_{n=1}^{N-\theta_i-1} \left(\Delta x_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) - (-\varepsilon_i) \Delta \dot{x}_i(n) \right)^2 \quad (1.20)$$

Величину L_i^2 можно рассматривать как функцию от параметров θ_i , $k_{i,j}$ и ε_i , значения которых заранее неизвестны. При правильном выборе этих параметров L_i^2 будет меньше, чем при ошибочном. Это объясняется тем, что при неправильном выборе θ_i , $k_{i,j}$ и ε_i расстояния (1.17) не будут малы даже для соседних точек в отсортированном ряде.

Заметим, что в отличие от ранее использованной целевой функции (1.8) предложенная мера в некотором смысле характеризует длину восстановленной нелинейной функции, а именно, представляет собою сумму квадратов только вертикальных компонент расстояний между точками нелинейной функции, в то время как горизонтальные компоненты $(x_i(p_n) - x_i(n))$ не поддаются оптимизации по параметрам θ_i , $k_{i,j}$ и ε_i и потому не включены в целевую функцию (1.20).

Поскольку (1.18) и (1.19) зависят только от θ_i , ε_i и $k_{i,j}$ при данном фиксированном i и не зависят от иных θ_m , ε_m или $k_{m,j}$, для которых $m \neq i$, минимизацию целевой функции (1.20) возможно проводить отдельно для каждого осциллятора. При этом фактически решается задача реконструкции неавтономной системы по векторному ряду $\{x_i(n + \theta_i), x_i(n), \dot{x}_i(n + \theta_i)\}_{n=1}^{N-\theta_i}$, одна компонента которого измеряется, другая восстанавливается методом задержек, а третья — методом дифференцирования. Временные ряды членов связи вычисляются явно по известным рядам переменных $\{x_m(n)\}_{n=\theta_i+1}^N$. Таким образом, нет необходимости восстанавливать фазовое пространство большой размерности, пропорциональной числу осцилляторов в ансамбле.

Если зафиксировать θ_i , то задачу минимизации (1.20) можно рассматривать как линейную задачу о наименьших квадратах, где $k_{i,j}$ и $(-\varepsilon_i)$ суть искомые коэффициенты (их всего D штук для каждого i -го элемента), $\Delta x_i(n)$ — аппроксимируемые величины, а матрица значений базисных функций состоит из $(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n))$ и $\Delta \dot{x}_i(n)$. В такой постановке L_i^2 представляет собою целевую функцию. Поиск её экстремума является стандартной задачей, которая может быть решена нерекурсивно.

1.7.2. Аналитические свойства оценок

С увеличением числа N точек во временном ряде \mathbf{x}_i число членов суммы (1.20) будет расти пропорционально N . Вместе с тем, с ростом N будут уменьшаться расстояния между точками в отсортированном ряде и, как следствие, уменьшаться величины $|\delta_i(n)|$. В среднем это уменьшение пропорционально $1/N$. То есть, каждый член $\delta_i^2(n)$ суммы (1.20) будет убывать пропорционально $1/N$ с ростом N . Следовательно, $L_i^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Значит, при $N \rightarrow \infty$ предложенный метод является асимптотически точным, а полученные с его помощью оценки параметров являются асимптотически несмещёнными.

Предложенный подход сформулирован для систем, описываемых уравнениями с запаздыванием, содержащими только непрерывные нелинейные функции. Однако если такие функции будут содержать на всём отрезке изменений аргумента небольшое число разрывов первого рода и сумма квадратов скачков функции будет много меньше общей суммы квадратов вертикальных расстояний (1.20), метод, по всей видимости, сохранит свою работоспособность при конечном N , несколько потеряв в точности. При этом свойства асимптотической несмещённости оценок будут утеряны.

Поскольку время запаздывания θ_i заранее неизвестно, минимизацию целевой функции (1.20) можно провести для различных пробных дискретных времен запаздывания θ'_i , перебираемых из некоторого интервала. Минимум зависимости $L_i^2(\tau'_i)$, где $\tau'_i = \theta'_i \Delta t$, будет наблюдаться при истинном времени запаздывания τ_i .

1.7.3. Удаление лишних связей

Предложенный алгоритм описан для общего случая, при котором между любыми двумя элементами ансамбля существует двунаправленная связь, что редко бывает на практике. Если в действительности воздействие j -го элемента на i -й отсутствует, то соответствующий коэффициент связи $k_{i,j}$ в модельном

уравнении (1.1) следует положить равным нулю. Однако в результате описанной выше процедуры реконструкции мы всегда получаем для каждого элемента ансамбля $D - 1$ ненулевых коэффициентов связи $k'_{i,j}$, некоторые из которых при отсутствии соответствующих связей являются лишними. Разделить восстановленные коэффициенты связи на значимые и незначимые и, таким образом, отбросить лишние связи можно с помощью метода K -средних [74].

Проведём для этого кластеризацию восстановленных коэффициентов $k'_{i,j}$ в одномерном пространстве, поделив их на два кластера: значимых и незначимых коэффициентов. В качестве начальных положений центров кластеров зададим максимальное и минимальное из восстановленных значений $k'_{i,j}$. Так как в общем случае значимые коэффициенты по абсолютной величине много больше незначимых, кластеризацию удобно проводить в логарифмическом масштабе. Определив незначимые коэффициенты связи, положим их равными нулю и повторно восстановим все $k_{i,j}$ для повышения точности реконструкции.

Такой подход позволяет восстановить архитектуру связей в ансамбле. Следует отметить, что рассмотренный метод имеет существенно более высокое быстродействие по сравнению с методом реконструкции модельных уравнений элементов ансамбля и диагностики значимости связей с помощью последовательного пробного исключения или добавления коэффициентов связи в модель, поскольку в отличие от итерационного метода реконструкция параметров проводится лишь дважды. Обратная сторона такого подхода заключается в том, что отсутствует контроль статистической значимости выявленных связей.

Подход к определению лишних связей, основанный на методе K -средних, хорошо работает в отсутствие шумов и соизмеримом количестве как значимых, так и незначимых коэффициентов связи (то есть как раз тогда, когда методы, основанные на последовательном исключении и включении связей дают самые плохие оценки). Однако при невыполнении этих условий границы соседних кластеров оказываются близки друг к другу. В результате, точность метода снижается, и он может находить ложные связи или пропускать часть имеющихся

связей. В таких случаях для точной реконструкции архитектуры связей требуется использовать более двух кластеров в методе K -средних. К сожалению, при анализе экспериментальных данных, когда число связей между элементами ансамбля заранее неизвестно, дать точные рекомендации по выбору количества кластеров оказывается затруднительно.

Для разделения восстановленных коэффициентов связи $k_{i,j}$ полной модели на значимые и незначимые можно использовать другой подход. Отсортируем все коэффициенты $k_{i,j}$ по абсолютной величине в порядке убывания. Затем рассчитаем величину

$$\Lambda = \sum_{i=1}^D L_i^2 / (N - \theta_i - 1) \quad (1.21)$$

при введении в ансамбль, состоящий из D модельных уравнений (1.1), только одного, самого большого по абсолютной величине коэффициента связи. Нормировка компонентов, входящих в Λ , на величину $(N - \theta_i - 1)$ необходима, поскольку иначе разные осцилляторы внесут разный вклад в меру (1.21) из-за отличающихся времен запаздывания θ_i и, как следствие, разного числа слагаемых в формуле для целевой функции (1.20). Далее будем добавлять в модель по одному коэффициенту связи в порядке уменьшения их абсолютного значения и снова рассчитывать Λ . Наконец, построим зависимость Λ от числа M коэффициентов связи в модели, где $M = 1, \dots, D(D - 1)$.

По мере учета в модели всё большего числа реально существующих связей она будет становиться все более точной. При этом величины (1.17), характеризующие расстояние между точками реконструируемых нелинейных функций элементов, а вместе с ними и величины (1.20) и (1.21) будут уменьшаться. Уменьшение величины Λ на графике $\Lambda(M)$ практически остановится при $M = M_{real}$, где M_{real} — число реальных связей. Последующее добавление в модель незначимых коэффициентов, соответствующих отсутствующим связям, почти не повлияет на величину Λ . При этом, для $M \geq M_{real}$ зависимость $\Lambda(M)$ будет оставаться почти постоянной. Графики, наглядно иллюстрирующие такой

подход, приведены далее в разделах, демонстрирующих применение метода в численном и радиофизическом эксперименте. Отметим, что этот метод требует существенно больше вычислительных затрат, чем способ разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые на основе метода K -средних, поскольку также является итерационным.

На практике для контроля точности восстановления априорно неизвестной архитектуры связей в ансамбле можно использовать оба рассмотренных подхода, которые в идеале должны дать одинаковые результаты.

1.8. Тестирование модифицированного подхода в численном эксперименте

1.8.1. Восстановление ансамбля, состоящего из связанных уравнений Маккея-Гласса

В качестве первого примера восстановим параметры элементов и архитектуру связей в ансамбле диффузионно связанных систем Маккея–Гласса [73], описываемых уравнением (1.1) с функцией (1.12), который мы уже рассматривали ранее в разделе 1.5.3. Продемонстрируем преимущества модифицированного подхода перед оригинальным, увеличив количество элементов в ансамбле с 10 до 20. Архитектура случайно выбранных связей в ансамбле из 20 элементов приведена на рис. 1.8(а). Из 380 возможных связей между элементами ансамбля реально имеется 60, среди которых есть как однонаправленные, так и взаимные. Все элементы ансамбля являлись неидентичными. Их параметры принимали случайные значения из равномерного распределения в следующих интервалах: $\tau_i \in [250; 400]$, $\varepsilon_i \in [7.5; 12.5]$, $a_i \in [0.20; 0.25]$, $k_{i,j} \in [0.02; 0.06]$. При этом все элементы колебались хаотически. Длина временных рядов составляла $N = 10^4$ значений при шаге выборки $\Delta t = 0.5$. Рассмотрим случай отсутствия шума и случай, когда к временному ряду каждого элемента добавлен некорре-

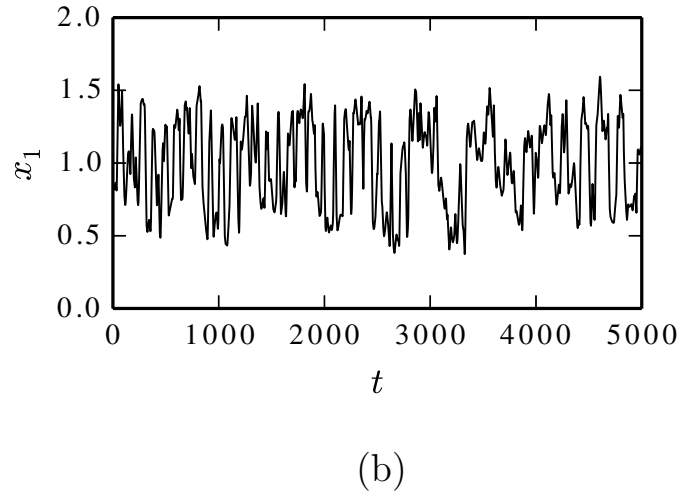
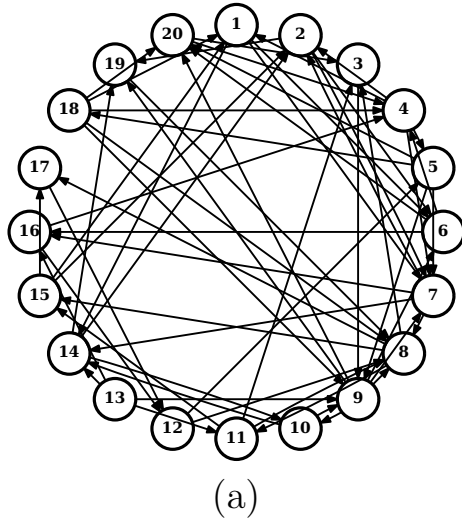


Рис. 1.8. (a) — архитектура связей в ансамбле из 20 осцилляторов с запаздыванием (1.1) и нелинейной функцией (1.12); (b) — временной ряд переменной $x_1(t)$ ансамбля из уравнений Маккея–Гласса при добавлении к измеренному ряду всех элементов нормального белого шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$.

лированный нормальный шум $\xi_i(t)$ с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$. На рис. 1.8(b) приведён зашумленный хаотический временной ряд колебаний первого элемента.

На рис. 1.9 приведены зависимости целевой функции от пробного времени запаздывания $L_i^2(\tau'_i)$ для всех 20 элементов ансамбля в случаях отсутствия и присутствия шумов. Глобальные минимумы всех кривых $L_i^2(\tau'_i)$ наблюдаются в точности при истинных временах запаздывания. Величины L_i^2 нормированы на величину $(N - \theta_i - 1)$ для удобства сравнения. Отметим, что для оценки временного ряда производных $\{\dot{x}_i(n)\}$ по временному ряду $\{x_i(n)\}$ использовалась аппроксимация со сглаживанием параболою.

При реконструкции модельного уравнения (1.1) для каждого элемента ансамбля получаются 19 ненулевых коэффициентов связи $k'_{i,j}$, часть из которых является лишними. Лишние коэффициенты по модулю на несколько порядков меньше действительных и поэтому их можно выявить с помощью кластеризации в логарифмическом масштабе, как это показано на рис. 1.10. Видно, что модули всех значений $k'_{i,j}$ хорошо делятся на 2 кластера, состоящие из действи-

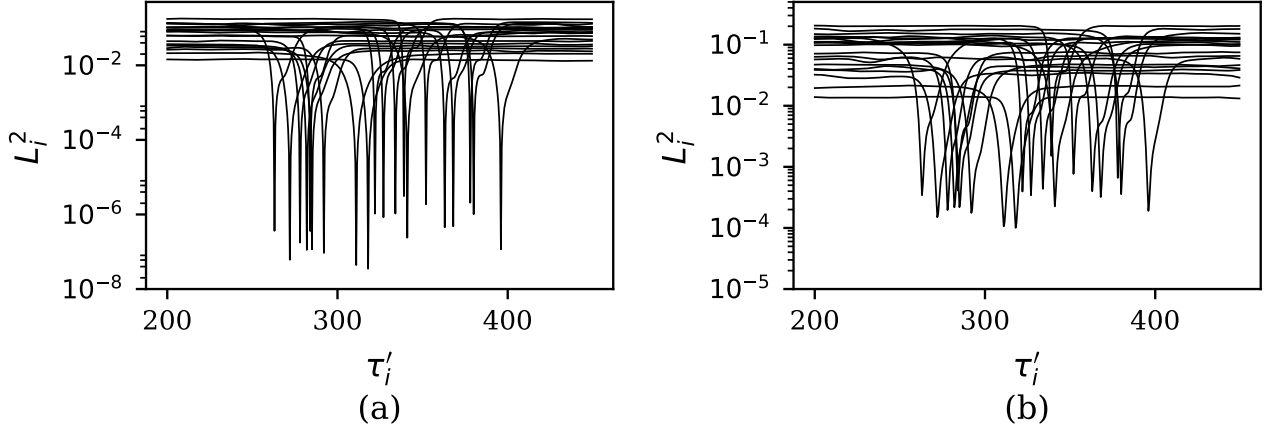


Рис. 1.9. Зависимости $L_i^2(\tau_i')$ для каждого из 20 элементов ансамбля из уравнений Маккея–Гласса в отсутствие шума — (a) и в присутствии нормального шума с $\sigma_i = 0.004$ — (b).

тельных (справа) и лишних (слева) коэффициентов. Наличие шума приводит к сближению кластеров. Очевидно, что начиная с некоторого критического уровня шума, метод начинает выдавать ошибки, пропуская часть имеющихся связей или находя ложные.

Члены суммы в (1.17), соответствующие лишним коэффициентам связи, были удалены из модели и реконструкция была проведена повторно уже без них. В результате, архитектура связей в ансамбле оказалась восстановлена правильно, в точном соответствии с рис. 1.8(a), как для случая отсутствия шумов, так и при их наличии. В отсутствие шума точность реконструкции коэффициентов модели составила 4 значащих цифры. Неидеальная точность в таком случае объясняется конечной длиной ряда и необходимостью численной оценки производной. При наличии шума значения коэффициентов также были восстановлены с удовлетворительной точностью. В частности, для первого осциллятора они составили $k'_{1,4} = 0.0467$ при истинном значении $k_{1,4} = 0.0475$, $k'_{1,15} = 0.0288$ при истинном значении $k_{1,15} = 0.0294$, $k'_{1,18} = 0.0287$ при истинном значении $k_{1,18} = 0.0292$.

Чтобы охарактеризовать точность восстановления коэффициентов связи в среднем по ансамблю, была рассчитана средняя относительная погрешность

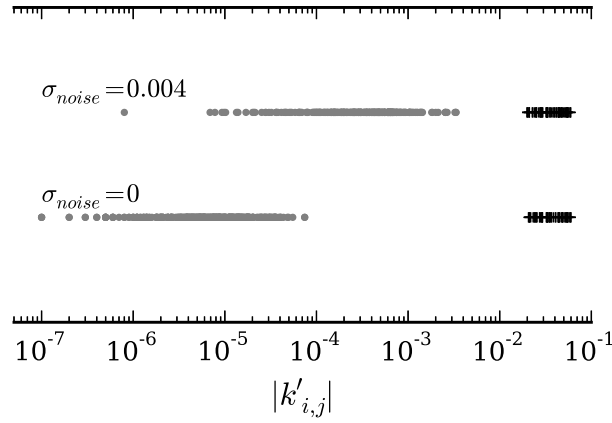


Рис. 1.10. Распределение значений модулей оценок коэффициентов связи для всех элементов ансамбля из уравнений Маккея–Гласса в отсутствие шума (сверху) и в присутствии шума (снизу). Значимые коэффициенты показаны черными крестиками, расположенными внутри окружности, а незначимые — серыми точками, расположенными внутри прямоугольника.

коэффициентов по формуле (1.22)

$$E_k = \left\langle \left| \frac{k'_{i,j} - k_{i,j}}{k_{i,j}} \right| \right\rangle_{i,j}, \quad (1.22)$$

где усреднение проводилось только для действительных коэффициентов. Величина E_k составила 0.023, колеблясь от 0.002 до 0.058. Параметры инерционности были восстановлены с ещё большей точностью, так, для первого осциллятора $\varepsilon'_1 = 12.29$ при истинном значении $\varepsilon_1 = 12.32$, аналогичным с E_k образом рассчитанная средняя относительная погрешность реконструкции $E_\varepsilon = 0.007$. Большая точность реконструкции параметров ε_i является, скорее всего, следствием того, что они вносят более уникальный вклад в целевую функцию (1.20), будучи домножены на базисные функции $\Delta \dot{x}_i(n)$, в то время как параметры связи $k_{i,j}$ стоят перед однотипными базисными функциями вида $(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n))$, вклад которых может частично взаимно компенсироваться, особенно при частичной синхронизации в ансамбле.

На рис. 1.11(а) приведена восстановленная нелинейная функция f_1 первого элемента для случая отсутствия шума. Она очень точно совпадает с истинной функцией уравнения Маккея–Гласса — настолько, что на одном графике их

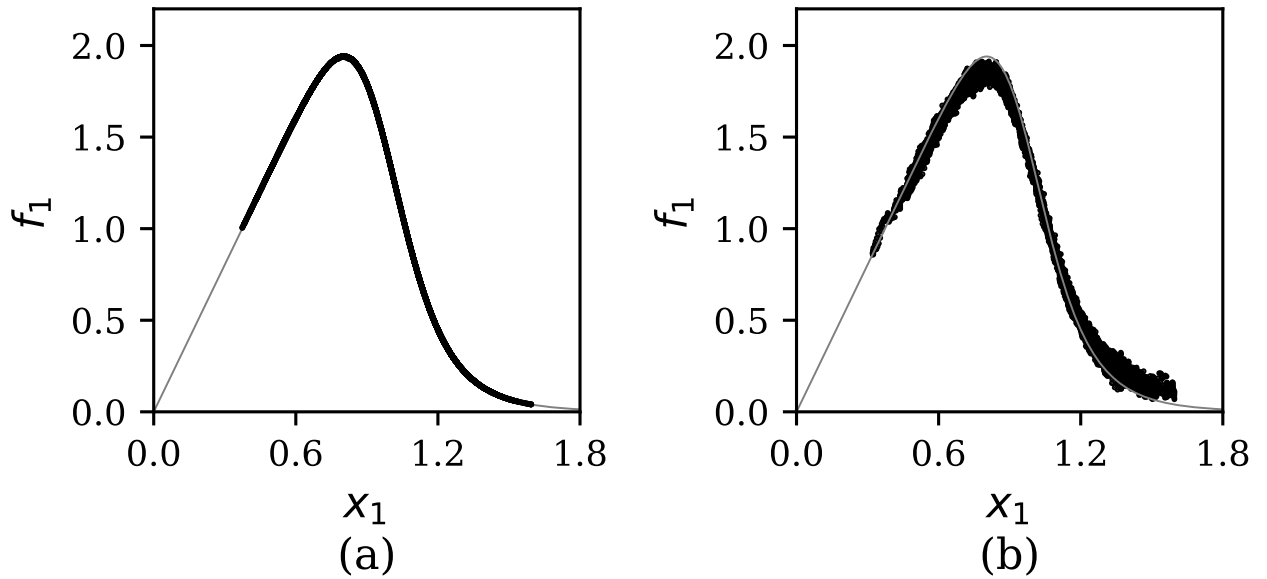


Рис. 1.11. Восстановленная (чёрным жирным) и истинная (серым тонким) функция $f_1(x_1)$ в отсутствие шума — (a) и в присутствии нормального шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$ — (b).

невозможно различить в использованном масштабе; поэтому для их сопоставления мы вынуждены были отобразить восстановленную функцию более жирным чёрным, а исходную, отрисованную серым, достроить за пределы, в которых она была реконструирована. На рис. 1.11(b) приведена чёрным та же нелинейная функция f_1 , построенная при указанных выше восстановленных значениях и при наличии шума. Видно, что в этом случае она уже заметно отличается от истинной. Точность восстановления параметров и нелинейных функций для остальных элементов ансамбля примерно такая же, что и для первого элемента ансамбля.

Очевидно, что лишние и действительные связи вносят различный по абсолютной величине вклад в целевую функцию (1.20). На этом основании нами был апробирован альтернативный кластеризации методом K -средних алгоритм разделения лишних и необходимых коэффициентов среди всех оценок $k'_{i,j}$, основанный на построении зависимости (1.21) — см. рис. 1.12. При $M = M_{real}$ величина $\Lambda(M)$ практически достигает своего минимального значения и с уве-

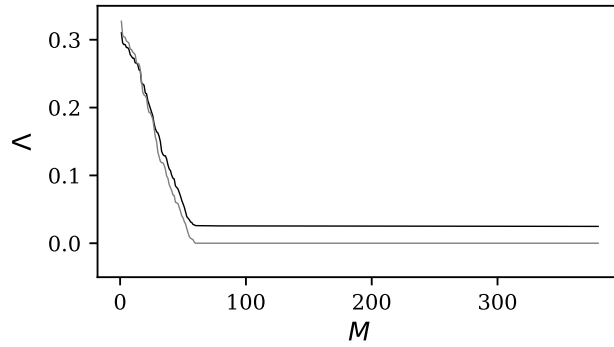


Рис. 1.12. Зависимости $\Lambda(M)$ для ансамбля из уравнений Маккея–Гласса в отсутствие шума (серый цвет) и в присутствии нормального шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$ (чёрный цвет).

личением M меняется очень слабо (мене чем на 1%), что видно на графике. В отсутствие шума $\Lambda(M_{real})$ очень близка к нулю и составляет $1.3 \cdot 10^{-5}$, в то время как потеря даже одного коэффициента приводит к её резкому росту до $\Lambda(M_{real} - 1) = 55.7 \cdot 10^{-5}$, то есть примерно в 43 раза. Таким образом, оба предложенных подхода дали в рассмотренном примере одинаковый результат и позволили точно реконструировать архитектуру связей.

В реальности значения времён запаздывания τ_i неизвестны, но их можно восстановить предложенным методом. Для этого проще всего использовать простой перебор дискретных значений θ_i (точнее, чем с шагом выборки, их восстановить всё равно невозможно). Так как реконструкция для каждого элемента ансамбля проводится отдельно, эта задача может быть решена на относительно приемлемое время. Для примеров, приведённых на рис. 1.13, в диапазоне пробных времён запаздывания $400 \leq \theta'_i \leq 1000$ (601 вариант), что соответствует $200 \leq \tau'_i \leq 500$, и занимала не более часа машинного времени на компьютере с процессоров Intel Core i5 (для ускорения процесса применялась параллелизация вычислений).

Если рассмотреть результаты, приведённые на рис. 1.13, внимательно, можно видеть, что для всех двадцати элементов ансамбля на кривой имеются очень чётко выраженные минимумы как в случае «чистых» рядов (а), так и при на-

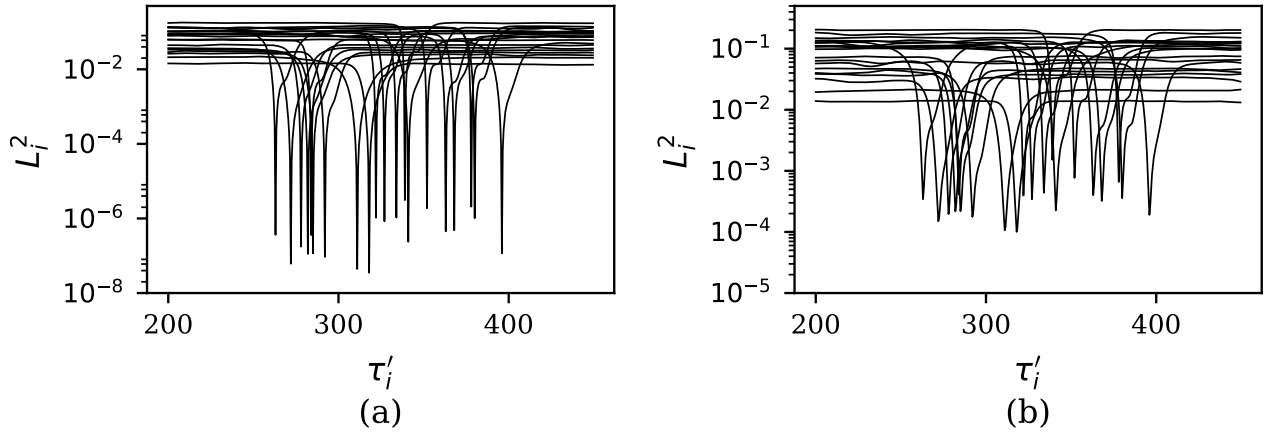


Рис. 1.13. Зависимости целевой функции от пробного времени запаздывания $L_i^2(\tau_i')$ для ансамбля из уравнений Маккея–Гласса в отсутствие шума (а) и в присутствии нормального шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$ (б).

личии измерительного шума (б), хотя, конечно, во втором случае они более размыты. При этом детальное сопоставление показывает, что во всех случаях минимум соответствует истинному времени запаздывания, то есть ошибка во времени реконструкции в рассмотренном случае меньше шага выборки.

Важно, что модифицированный подход не только позволяет отказаться от использования отдельного метода для реконструкции времени запаздывания, но и снижает требования к длине используемых временных рядов. При апробации исходного подхода для реконструкции τ_i использовались ряды длиной в 40000 значений, а для реконструкции остальных параметров и нелинейной функции — в 10000 значений. При этом размер ансамбля не превышал 10 элементов. В представленном примере нам удалось восстановить все связи в ансамбле из 20 элементов с использованием временного ряда в 10000 значений при том же шаге выборки.

1.8.2. Восстановление ансамбля, состоящего из связанных уравнений Икеды

Чтобы сопоставить результаты двух подходов и дополнительно протестировать общность нового метода, рассмотрим снова ансамбль, описываемый урав-

нениями (1.11), где мы предполагаем, что $\varepsilon_i = 1$. Пусть ансамбль состоит из 16 осцилляторов с 50 связями между ними (примерно по 3 связи на каждый) из 240 возможных, причём связи заданы случайно. Все элементы ансамбля неидентичны, их параметры задаются случайно из равномерных распределений на следующих интервалах: $\tau_i \in [2; 5]$, $\mu_i \in [15; 25]$, $x_{0,i} \in [0; 2\pi]$ и $k_{i,j} \in [0.1; 0.5]$. Все осцилляторы без связи демонстрировали хаотическую динамику, использовались временные ряды длиной в 10000 отсчётов, как и для других ранее рассмотренных примеров. Интервал выборки составлял как и ранее для систем Икеды $\Delta t = 0.01$. Ко временным рядам добавлялся измерительный гауссов независимый шум $\xi_i(t)$ с нулевым средним и стандартным отклонением $\sigma_i = 0.003$, что составляет 0.1%–0.2% от стандартного отклонения сигнала (отношение сигнал/шум порядка 54–60 дБ). Такой уровень шума следует считать, конечно, невысоким.

Поскольку значения ε_i были в данном численном эксперименте фиксированы равными 1 вследствие свойств системы (1.11), коэффициенты связи восстанавливались очень точно с ошибками менее 10^{-4} от их истинного значения. Более интересно рассмотреть результаты разделения связей на действительные и ложные связи, приведённые на рис. 1.14. Из рис. 1.14(а) видно, что ложные (серые кружки) и истинные (чёрные крестики) связи легко разделить по абсолютной величине и они прекрасно кластеризуются. Рис. 1.14(б) показывает, что на зависимости $\Lambda(M)$ имеется чёткий излом, соответствующий значению $M = 50$, то есть истинному количеству связей в ансамбле. Таким образом, оба алгоритма позволили верно восстановить архитектуру связей.

Результаты оценки времени запаздывания для всех 16 восстановленных систем Икеды приведены на рис. 1.15. Как и для ансамбля из 20 систем Маккея–Гласса, рассмотренных в предыдущем подразделе, все времена запаздывания восстанавливаются точно, по крайней мере, с точностью до интервала выборки.

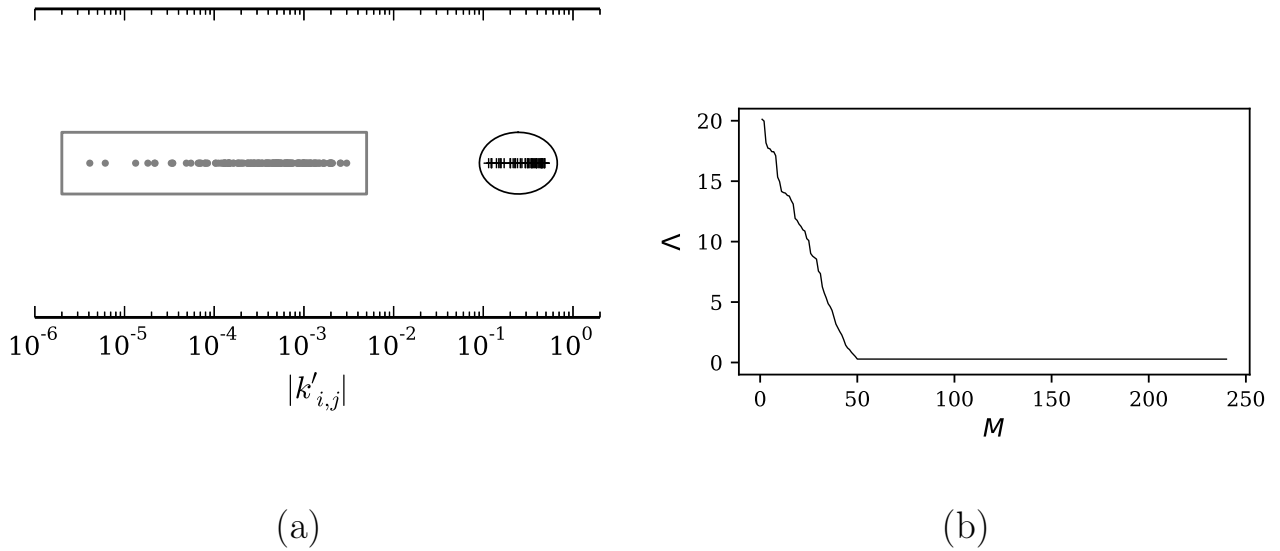


Рис. 1.14. Результаты применения двух алгоритмов разделения коэффициентов на действительные и ложные для ансамбля из уравнений Икеды с запаздыванием в присутствии измерительного нормального шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.003$: (a) — распределение значений модулей оценок коэффициентов связи для всех элементов ансамбля (значимые коэффициенты показаны черными крестиками, расположенными внутри окружности, а незначимые — серыми точками, расположенными внутри прямоугольника); (b) — зависимости $\Lambda(M)$

1.9. Восстановление цепочки экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью

Модифицированный метод был применён к экспериментальным временным рядам цепочки, состоящей из $D = 10$ однонаправлено связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью, увеличив число элементов в ансамбле по сравнению с оригинальным подходом с трёх до 10. Каждый генератор представляет собою кольцевую систему, состоящую из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC -фильтра первого порядка, рис.1.16 (а). Нелинейные элементы и линии задержки генераторов выполнены на микроконтроллерах, а фильтры — на аналоговых элементах. Анало-

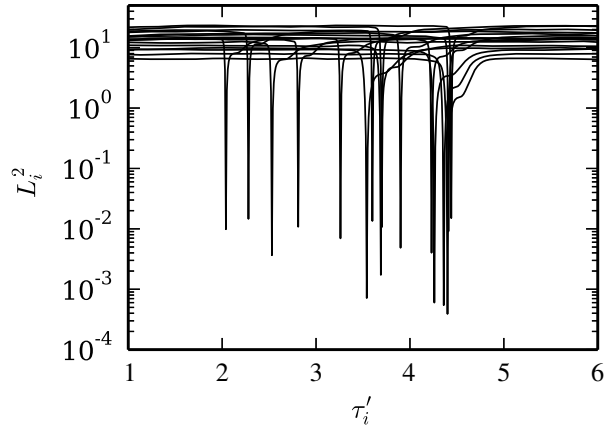


Рис. 1.15. Зависимости целевой функции от пробного времени запаздывания $L_i^2(\tau_i')$ для ансамбля из уравнений вида (1.11) в отсутствие шума (а) и в присутствии нормального шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$ (б).

говые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Связь генераторов осуществляется с помощью резисторов R_{ci} . Модельное уравнение, которым описывается i -й элемент такой цепочки, имеет вид (1.23).

$$R_i C_i \dot{V}_i(t) = -V_i(t) + f_i(V_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (V_j - V_i), \quad (1.23)$$

где $V_i(t)$ и $V_i(t - \tau_i)$ суть напряжения на входе и выходе линии задержки, τ_i — время запаздывания, R_i и C_i суть сопротивление и ёмкость элементов фильтра, f_i — передаточная характеристика нелинейного элемента. Уравнение (1.23) сводится к виду (1.1), если положить $\varepsilon_i = R_i C_i$.

Цепочка состоит из неидентичных элементов, параметры которых принимают значения в следующих интервалах: $\tau_i \in [2.50; 4.75]$ мс, $\varepsilon_i \in [0.203; 0.536]$ мс, $k_{i,i+1} \in [0.10; 0.23]$, $k_{i,j} = 0 \forall j \neq i + 1$. Все нелинейные элементы имели квадратичную передаточную характеристику. Хаотические сигналы $V_i(t)$ записывались с помощью 10-канального аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 100$ кГц. На рис. 1.16(б) приведен фрагмент временной реализации сигнала $V_1(t)$ в первом генераторе, имеющем параметры $\tau_1 = 2.5$ мс, $\varepsilon_1 = 0.203$ мс, $k_{1,2} = R_1/R_{c1} = 0.21$.

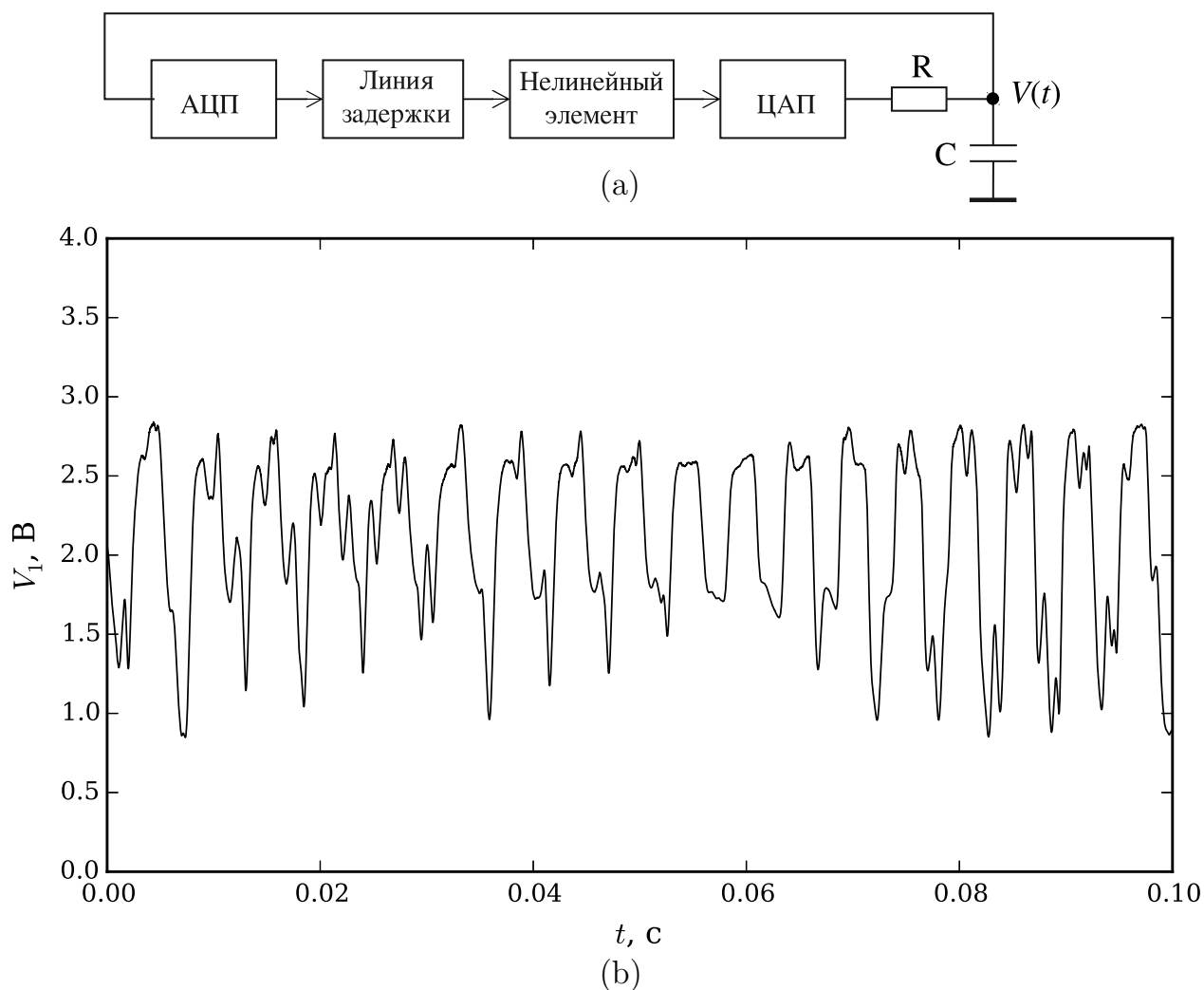


Рис. 1.16. (а) — блок-схема кольцевого генератора с запаздывающей обратной связью, где «АЦП» — аналого-цифровой преобразователь, «ЦАП» — цифро-аналоговый преобразователь. (б) — хаотическая временная реализация $V_1(t)$ первого генератора.

На рис. 1.17(а) приведены зависимости $L_i^2(\tau'_i)$ для всех 10 элементов цепочки. Глобальные минимумы девяти зависимостей $L_i^2(\tau'_i)$ наблюдаются при истинных временах запаздывания генераторов. Лишь для одного из генераторов минимум оказался смещён относительно истинного времени запаздывание на время, равное одному интервалу выборки.

Для каждого генератора цепочки мы получаем 9 восстановленных коэффициентов связи $k'_{i,j}$. Из этих 9 коэффициентов для 9 элементов цепочки только один коэффициент является значимым, а для элемента на краю цепочки, на который не действуют другие генераторы, вообще нет должно быть $k'_{i,j}$. Поскольку число действительных коэффициентов на порядок меньше числа лишних

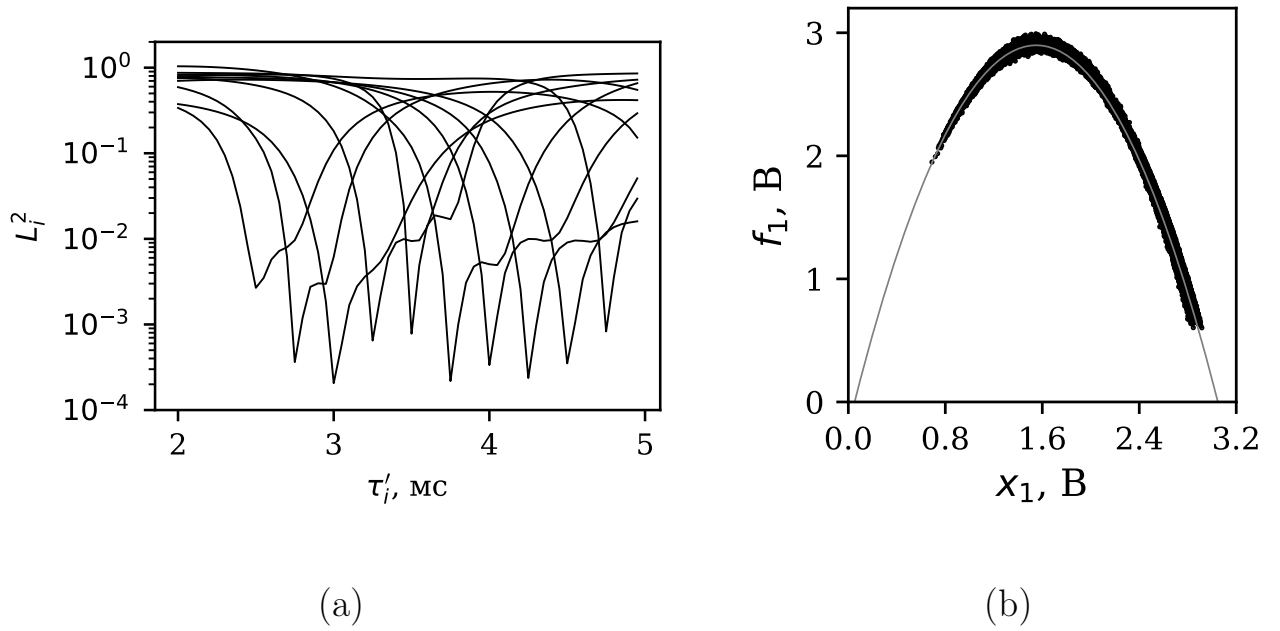


Рис. 1.17. (а) — зависимости $L_i^2(\tau_i')$ для всех экспериментальных генераторов в цепочке. (б) — результаты реконструкции нелинейной функции первого осциллятора.

коэффициентов, использование метода K -средних для разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые оказывается не столь эффективным, как в рассмотренном выше примере. Для успеха алгоритма потребовалось делить всё множество полученных $k'_{i,j}$ на 4 кластера, считая значимыми только $k'_{i,j}$, принадлежащие верхнему из четырёх. При использовании двух кластеров в архитектуре связей оставались несколько лишних.

Метод, основанный на использовании меры (1.21), оказался более эффективным. На рис. 1.18(а) построена зависимость $\Lambda(M)$. Видно, что при $M = 9$ зависимость $\Lambda(M)$ практически достигает минимума и с дальнейшим увеличением M почти не меняется. Оставив только 9 самых больших по модулю восстановленных коэффициентов связи и удалив все остальные незначимые, удалось получить оценки коэффициентов связи и параметров инерционности, близкие к номиналам. Например, для первого генератора восстановленные параметры инерционности и связи имеют следующие значения: $\varepsilon'_1 = 0.204$ мс, $k'_{1,2} = 0.22$. Восстановленная при этих значениях нелинейная функция f_1 при-

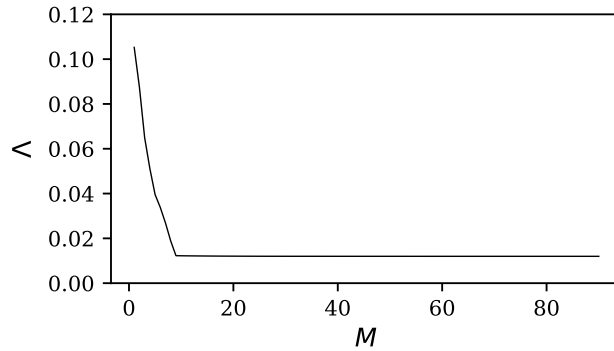


Рис. 1.18. Зависимость $\Lambda(M)$ для цепочки экспериментальных генераторов с запаздывающей обратной связью – (а). Восстановленная нелинейная функция первого генератора $f_1(x_1)$.

ведена на рис.1.18 (b). Она достаточно хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой нелинейного элемента первого генератора. Аналогичные результаты были получены для остальных элементов.

1.10. Реконструкция систем с запаздыванием под внешним периодическим воздействием

Все ранее предложенные подходы к реконструкции систем с запаздыванием базировались на предположении, что уравнения этих системы известны с точностью до параметров и нелинейных функций, а временные ряды всех элементов доступны для измерения. В данном разделе на примере отдельного узла мы демонстрируем возможность реконструкции систем с запаздыванием, находящихся под внешним регулярным воздействием. Кроме того, что неавтономные модели с запаздыванием могут быть полезны самостоятельно, например, в задаче описания регуляции артериального давления [75], в радиофизических или оптических системах передачи информации [76] или в задачах исследования синхронизации внешним сигналом [59], метод может быть использован также и в случае, если на данный элемент оказывает воздействие один или несколько других узлов сети, уравнения которых неизвестны.

1.10.1. Методика реконструкции

Рассмотрим уравнение системы с запаздыванием порядка B в достаточно общем виде:

$$\frac{d^B x(t)}{dt^B} = f\left(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, x(t - \tau_0)\right) \quad (1.24)$$

где τ_0 — время запаздывания, f — нелинейная функция. К уравнению вида (1.24) сводятся, например, уравнение Маккея–Гласса [73] и уравнение Икеды [77], ставшие эталонными при исследовании систем с запаздыванием.

Пусть на систему (1.24) действует внешний периодический сигнал $z(t)$, а модельное уравнение при этом следующий принимает вид:

$$\frac{d^B x(t)}{dt^B} = f\left(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{B-1}x}{dt^{B-1}}, x(t - \tau_0), z(t)\right) \quad (1.25)$$

Далее будем полагать, что порядок системы с запаздыванием B и способ введения внешнего воздействия известны априорно, а параметры ε и τ и нелинейную функцию f и форму внешнего воздействия $z(t)$ — его амплитуду, частоту, спектральный состав — требуется найти. Тогда, для восстановления по временному ряду системы вида (1.25) мы предлагаем следующий подход:

- вместо задачи о реконструкции дифференциальных уравнений будем решать задачу о реконструкции их разностной схемы (т. е. фактически отображения последования), построенной методом Эйлера;
- будем аппроксимировать нелинейную функцию f степенным полиномом;
- время запаздывания будем оценивать одним из методов, предложенных в работах [46; 57], прежде чем восстанавливать остальные параметры;
- внешнее воздействие будем аппроксимировать тригонометрическим полиномом по аналогии с [78].

Далее опишем алгоритм подробнее на примере системы первого порядка ($B = 1$), для систем более высоких порядков делается в целом аналогично

с поправкой на большую сложность соответствующих формул. Ограничимся случаем аддитивного воздействия, имея в виду, что в целом аналогично [22] можно обобщить метод, разработанный на случай аддитивного воздействия на произвольное. Уравнение неавтономной системы с запаздыванием 1-го порядка может быть получено из (1.25) и традиционно записывается следующим образом:

$$\varepsilon \frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), x(t - \tau_0)\right) + z(t), \quad (1.26)$$

где ε — параметр, характеризующий инерционные свойства системы. Хотя перенормировкою f и $z(t)$ этот параметр может быть убран, он был выделен исходя из наличия у него явного физического смысла.

Перейдём от дифференциального уравнения (1.26) к разностному уравнению. Для систем первого порядка получится следующее выражение:

$$\varepsilon \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f\left(x(t), x(t - \tau_0)\right) + z(t), \quad (1.27)$$

где Δt — малое время, равное интервалу выборки. Уравнение (1.27) можно переписать в виде:

$$x(t + \Delta t) = \frac{1}{\varepsilon}x(t) + \frac{\Delta t}{\varepsilon}f\left(x(t), x(t - \tau_0)\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon}z(t). \quad (1.28)$$

Запишем уравнение (1.28) в виде отображения, включив слагаемое $\frac{1}{\varepsilon}x(t)$ и коэффициент $\frac{\Delta t}{\varepsilon}$ в состав нелинейной функции и функции внешнего воздействия:

$$x'_{n+1} = f'\left(x_n, x_{n-\theta}\right) + z'_n, \quad (1.29)$$

где $n = t/\Delta t$ дискретное время, $\theta = \tau_0/\Delta t$ дискретное время задержки, штрих у x'_{n+1} означает, что имеется в виду не наблюдаемое, а прогнозируемое по наблюдаемым значение (в идеале они, конечно, должны совпасть). Функция f' представляется в виде полинома степени P , если нет дополнительной информации о свойствах исходной системы — полинома общего вида со всеми перекрёстными членами, если такая информация имеется — специализированного полинома или суммы полиномов более простого вида.

Периодическое внешнее воздействие представим в виде тригонометрического полинома:

$$z'_n = \sum_{k=1}^M (c_k \cos(k\omega n \Delta t) + d_k \sin(k\omega n \Delta t)), \quad (1.30)$$

где c_k и d_k — коэффициенты тригонометрического полинома степени M , аппроксимирующего внешнее периодическое воздействие.

Для нахождения коэффициентов модели (1.29) используется критерий наименьших квадратов, минимизирующий средний квадрат одношаговой ошибки прогноза построенных моделей:

$$S^2 = \left\langle (x_{n+1} - x'_{n+1}(\tau))^2 \right\rangle, \quad (1.31)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Такая мера показывает, насколько хорошо модель описывает наблюдаемую реализацию, если начальные условия для одношагового прогноза выбираются из исходного временного ряда.

Поскольку модельное уравнение (1.29) имеет нелинейную зависимость от частоты ω внешнего воздействия, необходимо использовать нелинейный метод наименьших квадратов, т. е. прибегать к итерационным алгоритмам. Нами использовался метод Левенберга–Марквардта (обобщение метода Ньютона), заключающийся в основном в следующем: задаются начальные догадки для искомых коэффициентов модели, далее система в окрестности них линеаризуется и с помощью линейного метода находятся поправки к начальным догадкам, эти поправки добавляются к значениям параметров, после чего процедура повторяется до тех пор, пока значения поправок на очередном шаге не станут пренебрежимо малы.

В нашем случае задача упрощается тем, что при использовании полиномиальной аппроксимации f только один коэффициент — ω входит нелинейно, поэтому метод был модифицирован таим образом, что начальное условие задавалось и поправки вычислялись только для ω , остальные коэффициенты рассчитывались на каждом шаге линейным методом. В качестве начального

приближения для ω была использована её оценка по спектру мощности колебаний системы (1.26). Поскольку в спектре мощности неавтономной системы с запаздыванием в общем случае сложно выделить пик, соответствующий периодическому внешнему воздействию, особенно если амплитуда воздействия мала, начальное приближение может быть недостаточно точным, что приведёт итерационную процедуру к нахождению локального минимума функции (1.31) вместо глобального. Эту проблему можно частично решить, если перебирать начальные догадки из некоторого достаточно широкого интервала с заданным шагом и проводить процедуру реконструкции для каждой начальной догадки, после чего выбрать результат, соответствующий наименьшему значению функции (1.31).

Следует отметить, что в случае длинного временного ряда, содержащего большое число периодов внешнего воздействия, даже малая погрешность в определении ω неизбежно ведёт к «набегу фазы» и плохому описанию внешнего воздействия соответствующими слагаемыми в модели (1.29). При реконструкции это сказывается таким образом, что область сходимости глобального минимума функции (1.31) оказывается очень узка. Поэтому реконструкцию следует проводить для достаточно коротких по сравнению с характерным периодом воздействия временных рядов (например, 5–10 периодов). При этом, однако, теряется преимущество, которое даёт более длинный ряд с точки зрения точности и достоверности оценок. Эти потери можно частично компенсировать, если разбить исходный длинный временной ряд на короткие участки, провести реконструкцию для каждого из них, и усреднить полученные значения коэффициентов. Аналогичный подход был использован в работе [79] при реконструкции неавтономных нелинейных осцилляторов без запаздывания по временным рядам. Недостатком такого подхода можно считать достаточно посредственные статистические свойства оценок коэффициентов по сравнению тем, как если бы они были получены по всему ряду целиком.

Альтернативный подход состоит в том, чтобы сначала грубо оценить ча-

стоту внешнего воздействия по коротким временным рядам длиной в 5–10 характерных периодов внешнего воздействия, перебирая начальные приближения для ω с большим шагом из широкого интервала. Далее реконструкция проводится уже для всего имеющегося временного ряда, причём полученное на предыдущем этапе значение ω используется в качестве начального приближения.

С увеличением степени полиномов P и M средний квадрат одношаговой ошибки прогноза (1.31) моделей уменьшается. Мы ограничиваемся такими значениями P и M , при которых величина (1.31) достигает насыщения и при дальнейшем их увеличении меняется слабо.

1.10.2. Учёт априорной информации и реконструкция времени запаздывания

Для многих объектов, имеющих большую практическую значимость, например, [73; 77], уравнения вида (1.24) и даже (1.26) на основе априорной информации можно конкретизировать вид функции f , что существенно упрощает задачу реконструкции. Например, для большинства известных генераторов с запаздывающей обратной связью можно функцию f представить в виде суперпозиции члена, ответственного за мгновенную динамику — как правило это линейное слагаемое $-x(t)$, — и нелинейной функции $\phi(x(t - \tau))$, отвечающей за задержанную динамику:

$$f(t) = -x(t) + \phi(x(t - \tau)) \quad (1.32)$$

Учёт априорной информации о природе системы крайне желателен, поскольку, как неоднократно подчёркивалось [80], использование универсальных моделей в том числе с полиномами общего вида в качестве аппроксимирующей функции приводит к необходимости оценки очень большого числа коэффициентов, что сложно реализуемо на практике.

Для системы с нелинейной функцией вида (1.32) уравнение (1.29) при аппроксимации внешнего воздействия тригонометрическим полиномом (1.30), а

функции ϕ — степенным полиномом, может быть представлено в виде:

$$x'_{n+1} = ax_n + \sum_{k=0}^N b_k x_{n-\theta}^k + \sum_{k=1}^M \left(c_k \cos(k\omega n \Delta t) + d_k \sin(k\omega n \Delta t) \right) \quad (1.33)$$

Значение θ , при котором наблюдается минимальное значение S^2 , принимается в качестве оценки дискретного времени запаздывания. Определив коэффициенты модели (1.33), можно восстановить параметр инерционности и нелинейную функцию системы с запаздыванием (1.32), а также амплитуду внешнего воздействия $z(t)$. В качестве оценки параметра ε будем использовать величину $\hat{\varepsilon} = \Delta t / (1 - a)$. Нелинейную функцию f можно восстановить по коэффициентам b_k аппроксимирующего её полинома, причём коэффициенты b_k следует умножить на $\hat{\varepsilon} / \Delta t$. Амплитуду A внешнего воздействия можно оценить по коэффициентам c_k и d_k тригонометрического полинома: $\hat{A} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\Delta t} \sqrt{\sum_{k=1}^M (c_k^2 + d_k^2)}$. Частота ω внешнего воздействия находится с помощью метода Левенберга–Марквардта описанным выше способом.

1.10.3. Тестирование метода в численном эксперименте

Восстановление неавтономной системы с запаздыванием с квадратичной нелинейностью

Рассмотрим сначала применение метода к временным рядам системы с запаздыванием (1.26), функция f которой является квадратичной, а внешнее воздействие гармоническим:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + \lambda - x^2(t - \tau_0) + A \sin(\omega t) \quad (1.34)$$

где λ — управляющий параметр. Параметры уравнения (1.34) выберем $\lambda = 1.85$, $\tau_0 = 100$, $\varepsilon = 20$, $A = 0.7$, $\omega = 0.02\pi$. При этих параметрах неавтономная система (1.34) демонстрирует хаотические колебания — рис. 1.19(а). Для построения модели будем использовать временной ряд длиной $N = 20000$ точек при интервале выборки $\Delta t = 1$. При построении модельного уравнения (1.29) огра-

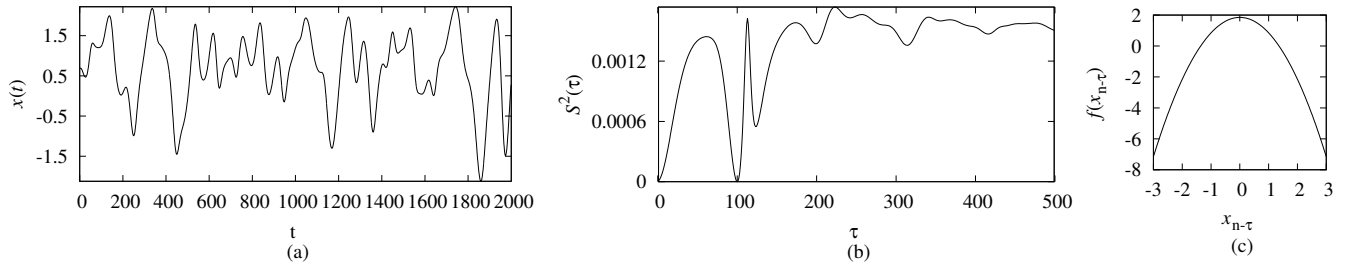


Рис. 1.19. (а) — временной ряд системы с запаздыванием (1.34) в режиме хаотических колебаний; (б) — зависимость среднего квадрата одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания при $P = 2$ и $M = 1$; (с) — восстановленная нелинейная функция.

нимся степенным полиномом второй степени $P = 2$ и тригонометрическим полином первой степени $M = 1$.

На рис. 1.19(б) приведена зависимость погрешности (1.31) модели (1.29) от пробного времени задержки τ , перебираемого из интервала от 0 до 500 с шагом 1, при $P = 2$ и $M = 1$. График демонстрирует отчетливый минимум при $\tau = \tau_0 = 100$.

С помощью метода Левенберга–Марквардта найдем частоту воздействия $f_0 = \omega/2\pi$. Восстановленная частота воздействия \hat{f}_0 совпадает с истинной частотой: $\hat{f}_0 = f_0 = 0.01$. Коэффициенты модели (1.29) принимают при этом значения: $a = 0.95$, $b_0 = 0.0925$, $b_1 \sim 10^{-16}$, $b_2 = -0.05$, $c_1 \sim 10^{-17}$, $d_1 = 0.035$. По ним легко получить оценку значений ε , λ и A : $\hat{\varepsilon} = 20$, $\hat{\lambda} = b_0/(1 - a_1) = 1.85$, $\hat{A} = 0.7$. Заметим, что все параметры системы (1.34) восстановлены почти с точностью машинных вычислений. Восстановленная нелинейная функция приведена на рис. 1.19(с). Она практически совпадает с истинной квадратичной функцией системы (1.34).

Эффективность метода была исследована в присутствии динамического и измерительного шума. Было показано, что при добавлении нормального белого шума с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением 20% от среднеквадратичного отклонения сигнала системы без шума в динамику системы, положение минимума $S^2(\tau)$ позволяет точно восстановить τ_0 , а метод Левенберга–Марквардта — точно восстановить f_0 . Остальные параметры системы уда-

ется восстановить с очень хорошей точностью: $\hat{\varepsilon} = 20.01$, $\hat{\lambda} = 1.851$, $\hat{A} = 0.701$. С увеличением уровня шума минимум $S^2(\tau)$ становится всё менее выраженным, а потом исчезает.

Аналогично, метод оказывается работоспособен при добавлении измерительного шума с уровнем порядка 5%–20%. Измерительный и динамический шумы одинаковой амплитуды вносят примерно одинаковые искажения в оценки коэффициентов, что обусловлено тем, что восстанавливалось отображение последования (разностная схема), а не дифференциальное уравнение и, таким образом, удалось избежать необходимости численно оценивать производную наблюдаемого временного ряда — именно измерительный шум вносит наибольшие искажения в оценку производной.

Работоспособность метода исследована при различных частотах внешнего периодического воздействия. Установлено, что метод остается эффективным в широком диапазоне значений ω . Нижняя граница допустимой частоты воздействия определяется длиной ряда, который должен содержать несколько периодов внешнего воздействия. Верхняя граница определяется для рассмотренных систем частотой дискретизации временного ряда: необходимо иметь хотя бы несколько точек на период воздействия; при этом работоспособность метода не зависит от соотношения собственной частоты колебаний, определяемой временем запаздывания, и частоты воздействия.

Возьмём теперь в качестве внешнего воздействия периодический сигнал осциллятора ван дер Поля, уравнение которого имеет вид:

$$\ddot{v}(t) - (\delta - \nu^2(t)) \dot{v}(t) + \Omega^2 \nu(t) = 0, \quad (1.35)$$

где δ — параметр нелинейности, а Ω — частота линейных колебаний. Пусть $\delta = 1$, $\Omega = 0.02\pi$. При этих значениях параметров система (1.35) демонстрирует сильно несинусоидальные автоколебания с частотой $f_0 \approx 0.0022$ и амплитудой $V \approx 2$. Отметим, что разница между частотой автоколебаний f_0 и параметром $\Omega/2\pi = 0.01$, определяющим частоту линейных колебаний, обусловлена

нелинейностью системы. Уравнение неавтономной системы с запаздыванием принимает при этом вид:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + \lambda - x^2(t - \tau_0) + K\nu(t), \quad (1.36)$$

где K — коэффициент связи, определяющий амплитуду внешнего воздействия $z(t)$.

Параметры уравнения (1.36) оставим такими же, как в уравнении (1.34): $\lambda = 1.85$, $\tau_0 = 100$, $\varepsilon = 20$. Поскольку сигнал осциллятора ван дер Поля является более сложным, чем гармонический сигнал, для его аппроксимации требуется тригонометрический полином более высокого порядка. При построении модельного уравнения (1.29) были использованы порядки полинома $P = 2$ и $M = 9$.

Зависимость $S^2(\tau)$, как и для случая гармонического воздействия, демонстрирует минимум при $\tau = 100$. Восстановленная частота воздействия $f_0 = 0.002224$. Остальные параметры системы удастся восстановить с высокой точностью: $\hat{\varepsilon} = 19.985$, $\hat{\lambda} = 1.8499$, $\hat{A} = 0.230$. Восстановленная нелинейная функция практически совпадает с функцией, приведенной на рис. 1.19(с).

Присутствие шума оказывает качественно такое же влияние на результаты реконструкции системы (1.36), как и на результаты реконструкции системы (1.34), находящейся под гармоническим внешним воздействием.

Большинство известных методов реконструкции систем с запаздыванием ориентировано на использование хаотических временных рядов. Предложенный в данной работе метод может быть применен для восстановления неавтономных систем с запаздыванием, совершающих как хаотические, так и периодические колебания. При применении метода к системам (1.34) и (1.36), находящимся в режиме периодических колебаний, были получены результаты, качественно подобные представленным выше для хаотических режимов.

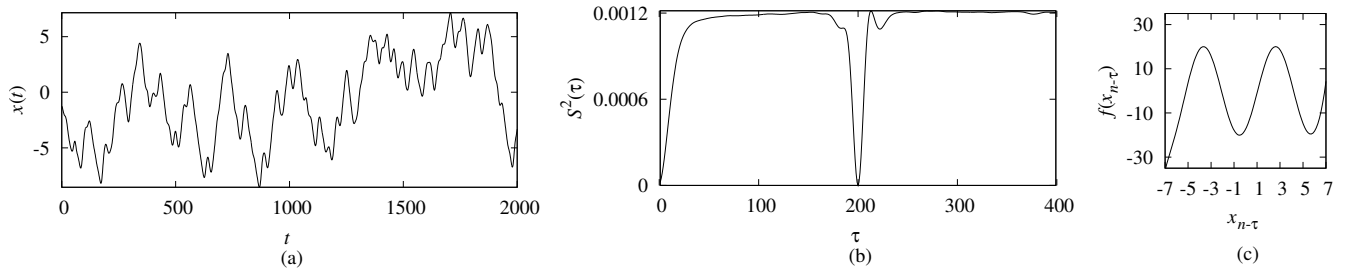


Рис. 1.20. (a) — хаотический зашумленный временной ряд неавтономного уравнения Икеды (1.37); (b) — зависимость одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания при $P = 15$ и $M = 1$; (c) — восстановленная нелинейная функция.

Восстановление неавтономного уравнения Икеды

Уравнение Икеды относится к системам с запаздыванием, описываемым уравнением (1.26) с $\varepsilon = 1$. Как и в предыдущем подразделе, в качестве внешнего воздействия использовались гармонический сигнал и сигнал осциллятора ван дер Поля $\nu(t)$. Поскольку число рассмотренных ситуаций достаточно велико, а полученные для них результаты качественно похожи, ограничимся иллюстрацией лишь одного случая — гармонического воздействия в присутствии динамического шума, при этом система переписывается как (1.37).

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \sin(x(t - \tau_0) - x_0) + A \sin(\omega t) + \xi(t), \quad (1.37)$$

где $\mu = 20$, $\tau_0 = 2$, $x_0 = \pi/3$, $A = 1$, $\omega = 0.2\pi$. На рис. 1.20(a) приведён фрагмент временного ряда для случая, когда $\xi(t)$ — 20%-ный гауссовский белый шум с нулевым средним значением. Весь ряд состоял из 20000 точек при интервале выборки $\Delta t = 0.01$.

При построении модельного уравнения (1.33) мы использовали полиномы различной степени. Ограничимся степенным полиномом с $P = 15$ и гармоническим полином первой степени $M = 1$, поскольку при дальнейшем увеличении P и M величина $S^2(\tau)$ меняется слабо. Зависимость $S^2(\tau)$, построенная при τ , изменяющемся от 0 до 400 с шагом 1, имеет минимум при $\tau = \theta = 20$, см. рис. 1.20(b), обеспечивая точное восстановление $\tau_0 = m\Delta t = 2$.

Восстановленная с помощью метода Ньютона частота воздействия $\hat{f}_0 =$

0.1003 близка к истинной частоте $f_0 = \omega/2\pi = 0.1$. Коэффициент $a = 0.9898$ модели (1.33) дает оценку параметра инерционности $\hat{\varepsilon} = 0.98$, а коэффициенты $c_1 = -0.0029$ и $d_1 = 0.0094$ оценку амплитуды воздействия $\hat{A} = 0.96$.

Восстановленная нелинейная функция приведена на рис. 1.20(с). Ее амплитуда позволяет получить оценку $\hat{\mu} = 20.059$. Параметр x_0 может быть найден по формуле $\hat{x}_0 = -\arcsin\left(\frac{1}{\hat{\mu}}(\varepsilon\dot{x}(t) + x(t))\right)$, где $\varepsilon\dot{x}(t) + x(t)$ равно значению восстановленной функции f при $x(t - \tau_0) = 0$. Получаем $\hat{x}_0 = 1.063$ ($\pi/3 \approx 1.047$).

Восстановление неавтономного уравнения Маккея–Гласса

В качестве последнего примера рассмотрим реконструкцию неавтономного уравнения Маккея–Гласса. В данном случае ограничимся иллюстрацией лишь одного случая, применив метод к хаотическому временному ряду уравнения Маккея–Гласса, находящемуся под воздействием сигнала осциллятора ван дер Поля (1.35) в присутствии измерительного шума:

$$\dot{x} = -0.1x(t) + \frac{0.2x(t - \tau_0)}{1 + x^{10}(t - \tau_0)} + K\nu(t). \quad (1.38)$$

Пусть параметры осциллятора ван дер Поля (1.35) $\delta = 1$, $\Omega = 0.05\pi$. При этих значениях параметров система (1.35) демонстрирует сильно несинусоидальные автоколебания с частотой $f_0 \approx 0.0115$ и амплитудой $V \approx 2$. Возьмем $\tau_0 = 300$, $K = 1$, при этом $A = 2$.

Добавим к временному ряду уравнения (1.38) 5% измерительный гауссовский белый шум с нулевым средним значением. На рис. 1.21(а) приведён фрагмент полученного временного ряда. Весь ряд состоял из $N = 20000$ точек при интервале выборки $\Delta t = 1$.

При построении модельного уравнения (1.33) использовались параметры $P = 5$ и $M = 9$. Зависимость $S^2(\tau)$, построенная при τ , изменяющемся от 0 до 500 с шагом 1, имеет минимум при $\tau = \tau_0 = 300$ — рис. 1.21(б). Восстановленная частота воздействия $\hat{f}_0 = 0.0115$. Остальные параметры системы удается восстановить с хорошей точностью: $\hat{\varepsilon} = 10.641$ (истинное $\varepsilon = 10$), $\hat{A} = 2.307$.

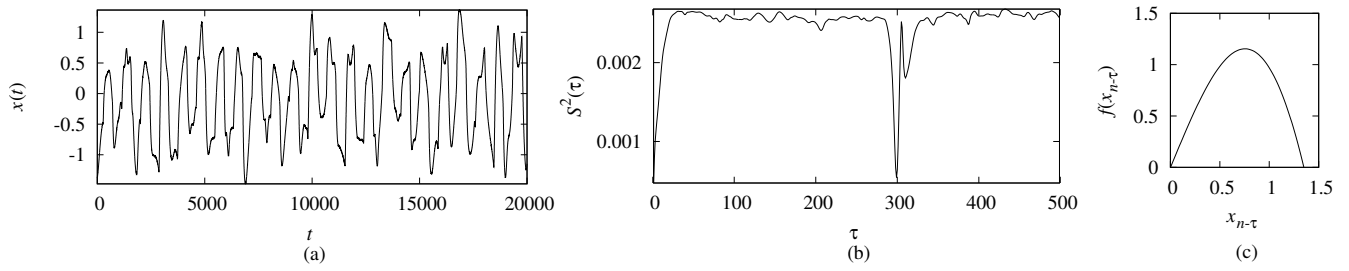


Рис. 1.21. (а) — хаотический зашумленный временной ряд неавтономного уравнения Маккея-Гласса (1.38); (b) — зависимость одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания при $P = 5$ и $M = 9$; (c) — восстановленная нелинейная функция.

Восстановленная нелинейная функция — рис. 1.21(c) — хорошо совпадает с истинной нелинейной функцией уравнения (1.38).

1.11. Реконструкция однонаправленно связанных систем первого порядка с запаздыванием по временной реализации ведомой системы

Если рассматривать ансамбли систем, где элементы колеблются периодически или квазипериодически, то в случае отсутствия временных рядов части объектов их можно заменить на внешнее воздействие, как это показано выше. Но в общем случае это не так, и недостающие временные ряды называют скрытыми переменными. Наличие скрытых, недоступных для измерения переменных в различных моделях, особенно, моделях биологических систем, — достаточно распространённое явление. Существуют несколько причин этому. В моделях, описывающих объекты малого размера, измерение части переменных способно разрушить объект [81]. Иногда измерения возможны, но запрещены из этических соображений. Так, никакая адекватная современным представлениям модель абсансной эпилепсии [82] не может быть построена без участия ядер таламуса, но измерить временной ряд электрической активности из таламуса невозможно ни с помощью поверхностной электроэнцефалографии, ни с

помощью магнитоэнцефалографии, а внутричерепное введение электродов не показано по медицинским соображениям пациентам с данной формой болезни. Бывает так, что некоторые переменные возникают в модели в результате ряда упрощений, например, перехода от пространственно-распределённой динамики к сосредоточенной, как три переменные, отражающие задержанное поведение в шестимерной модели нефрона [83]. Такие переменные не совсем физичны и, следовательно, также не могут быть измерены.

Нередко для моделирования биологических объектов вместо обыкновенных дифференциальных уравнений используются уравнения с запаздыванием. Классической моделью контроля в физиологических системах является уравнение Маккея–Гласса [73]. Сходные модели использовались для описания эпилепсии в [84]. Это связано с тем, что модели в виде уравнений с запаздыванием позволяют обойтись гораздо меньшим числом формальных динамических переменных и при этом описать множество сложных эффектов. Наличие скрытых переменных в таких системах также возможно, если система с запаздыванием представляется в виде нескольких уравнений, как в модели лазера [85], либо в случае, когда имеются несколько связанных уравнений с запаздыванием, причём измерение доступно только от одного (или не ото всех) из них.

Реконструкция моделей по временным рядам при наличии скрытых переменных может быть источником ценной информации, как о физически и биологически значимых параметрах конкретного экземпляра данной системы, так и о скрытой реализации. То есть реконструкция в таком случае выступает в первую очередь в качестве метода косвенного, неинвазивного измерения (см., например, [81]), результаты которого могут быть далее полезны, например, для диагностики патологий или оценки результатов лечения. Поскольку модель следует реконструировать в заранее заданном виде, традиционные подходы к реконструкции вектора состояния такие, как последовательное дифференцирование [29] или метод задержек [27] не подходят и приходится использовать специализированные методы типа метода множественной стрельбы [86]. Идея этих

подходов состоит в том, что часть начальных условий для скрытых переменных полагается дополнительными неизвестными параметрами модели, а затем используется глобальная оптимизация целевой функции, характеризующей отклонение модельных реализаций от наблюдаемых переменных.

Проблема приложения методов, ориентированных на реконструкцию при наличии скрытых переменных, к системам с запаздыванием заключается в том, что необходимо задать не один вектор начальных условий, а много векторов — столько, сколько уместится на времени запаздывания при использованном шаге выборки. Чем больше неизвестных векторов начальных условий и параметров, тем ниже шансы на успех реконструкции, поскольку вместо глобального минимума метод сходится к одному из многочисленных локальных [79]. Поэтому рассмотрение нужно начинать с достаточно простого случая. Простейший из возможных случаев — это реконструкция двух однонаправленно связанных систем с запаздыванием первого порядка по реализации ведомой системы. Исследовать применимость методов реконструкции при наличии скрытых переменных к таким ансамблям — цель данного раздела.

1.11.1. Методика реконструкции двух связанных систем с запаздыванием

В качестве модели рассматривалась система из двух связанных осцилляторов с запаздыванием вида (1.33), где τ — время запаздывания, общее для обоих осцилляторов, λ_x и λ_y — параметры нелинейной функции, k — параметр связи.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + \lambda_x - x^2(t - \tau) + ky(t), \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + \lambda_y - y^2(t - \tau).\end{aligned}\tag{1.39}$$

Такая система уже рассматривалась в работе [23]. Параметр инерционности в нашем случае был взят равным 1, поэтому он отсутствует в уравнениях (1.39).

Уравнения (1.39) решались методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0.1$, равным интервалу выборки. В качестве наблюдаемой рассматривалась координата ве-

домого осциллятора x . Параметры выбирались таким образом, чтобы соответствовать периодическому режиму, например, $\lambda_x = 2.4$, $\lambda_y = 2.55$, $k = 0.3$, $\tau = 1$. Пропускался переходной процесс длиной в 100 единиц дискретного времени.

Для реконструкции системы (1.39) использовался простейший из методов, предназначенных для работы со скрытыми переменными — метод начального условия. Это обусловлено тем, что более сложные подходы, предложенные в [79; 86] требуют больше стартовых догадок для скрытых переменных, хотя и позволяют увеличить точность оценок. Но при реконструкции систем с запаздыванием для каждого уравнения приходится задавать $\theta = \tau/\Delta t$ стартовых догадок для переменных (при реконструкции ОДУ достаточно было бы 1 стартовой догадки на уравнение), что и так много.

Дан временной ряд переменной $x(t) = \{x_n\}_{n=1}^N$ и известно время запаздывания τ (для систем в периодическом режиме его можно оценить по автокорреляционной функции [56]). Поскольку структура уравнений (1.33) также считается известной, временной ряд скрытой переменной можно было бы получить, если знать начальные условия (θ штук) и параметры. Так как они неизвестны, для них делаются стартовые догадки, которые обозначим $\{y'_n\}_{n=1}^\theta$. Также задаются стартовые догадки для параметров λ'_x , λ'_y и k' . Все стартовые догадки вместе можно представить как вектор (1.40) длины $(\theta + K)$, где за K обозначим для общности число неизвестных параметров.

$$\vec{\eta} = (y'_0, y'_1, \dots, y'_\theta, \lambda'_x, \lambda'_y, k') \quad (1.40)$$

Теперь можно рассчитать модельную траекторию на всём времени наблюдения, используя в качестве начальных условий для переменной x наблюдаемые значения. Координата x этой модельной траектории (обозначим её за $\{\xi_n\}_{n=\theta+1}^N$) почти наверняка (если только мы не угадали все значения параметров и начальных условий) не будет совпадать с наблюдаемым рядом $\{x_n\}_{n=\theta+1}^N$ (оба ряда будут короче на величину времени запаздывания). Тогда можно записать целевую функцию, характеризующую суммарный квадрат отклонения модельной

реализации от наблюдаемой:

$$S(\vec{\eta}) = \sum_{n=\theta+1}^N (x_n - \xi_n)^2 \quad (1.41)$$

Для минимизации этой функции можно воспользоваться одним из классических алгоритмов [87]. В нашем случае можно использовать стандартный метод Ньютона, поскольку градиент \vec{g} и матрица Гессе \hat{H} для функции (1.41) могут быть рассчитаны численно. Для расчёта градиента методом центральной разности достаточно сделать для каждой переменной η_i малую поправку $\delta\eta_i$ и рассчитать g_i по приближённой формуле (1.42).

$$g_i \approx \frac{S(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_i + \delta\eta_i, \dots, \eta_{\theta+K}) - S(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_i - \delta\eta_i, \dots, \eta_{\theta+K})}{2\delta\eta_i} \quad (1.42)$$

Для этого придётся $2(\theta + K)$ раз рассчитать модельную траекторию.

Аналогичным образом можно численно оценить каждую компоненту $h_{i,j}$ матрицы Гессе \hat{H} , но поправки нужно давать одновременно к двум компонентам вектора $\vec{\eta}$:

$$\begin{aligned} h_{i,j} &\approx (S_{i+j+} - S_{i+j-} - S_{i-j+} + S_{i-j-}) / (4\delta\eta_i\delta\eta_j), \\ S_{i+j+} &= S(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_i + \delta\eta_i, \dots, \eta_j + \delta\eta_j, \dots, \eta_{\theta+K}), \\ S_{i+j-} &= S(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_i + \delta\eta_i, \dots, \eta_j - \delta\eta_j, \dots, \eta_{\theta+K}), \\ S_{i-j+} &= S(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_i - \delta\eta_i, \dots, \eta_j + \delta\eta_j, \dots, \eta_{\theta+K}), \\ S_{i-j-} &= S(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_i - \delta\eta_i, \dots, \eta_j - \delta\eta_j, \dots, \eta_{\theta+K}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Для этого придётся рассчитать траекторию модели ещё $4(\theta + K)^2$ раз.

Имея матрицу Гессе и градиент, можно вычислить вектор поправок $\vec{\Delta\eta}$ к стартовым догадкам, решим систему линейных уравнений (1.44).

$$\hat{H}\vec{\Delta\eta} = -\vec{g}. \quad (1.44)$$

После этого нужно модифицировать стартовые догадки $\vec{\eta}$, добавив к ним вектор поправок, и рассчитать целевую функцию (1.41). Далее все действия нужно

повторять уже с новыми догадками. Критерием останковки может служить условие, когда догадки $\vec{\eta}$ на очередном шаге практически перестали изменяться:

$$\left| S(\vec{\eta}) - S(\vec{\eta} + \Delta\vec{\eta}) \right| < \varepsilon^2, \quad (1.45)$$

где ε — это заданная наперёд точность.

Хотя метод требует большого числа расчётов — $4(\theta + K)^2 + 2(\theta + K) + 1$ расчёт реализации плюс решение системы $(\theta + K)$ линейных уравнений на каждом шаге, современные вычислительные машины вполне способны получить результат за вменяемое время, поскольку в действительности сходимость может обеспечиваться только при достаточно малых длинах ряда N и временах запаздывания θ .

1.11.2. Апробация методики

В соответствии с уравнением динамики от системы (1.39) генерировалась реализация длиной в $N = 100$ точек (10 единиц безразмерного времени), что составляло около 3,5 периодов колебания (см. рис. 1.22). Реализации близки к синусоидальным. Далее задавались стартовые догадки \vec{y}' для начальных условий в виде отрезка длиной $\theta = 10$. Изначально все стартовые догадки задавались идентичными и равными 0: $y'_i = 0$, потом вместо нуля использовалось среднее значение по наблюдаемой координате \bar{x} . Однако оба этих подхода не принесли успеха даже при стартовых догадках для всех параметров, равных их истинным значениям.

Тогда было решено приблизить стартовые догадки к истинным значениям, используя априорные знания о модели (1.33). Поскольку период колебаний подсистемы X составляет порядка 3 единиц безразмерного времени (30 точек) и существенно больше времени запаздывания, в предположении, что период колебаний ведущей подсистемы Y не существенно отличается от периода подсистемы X , было решено ограничиться представлением исходных стартовых догадок в виде отрезка прямой вида $y'_i = \alpha_1 i \Delta t + \alpha_0$, где значения параметров α_0 и α_1

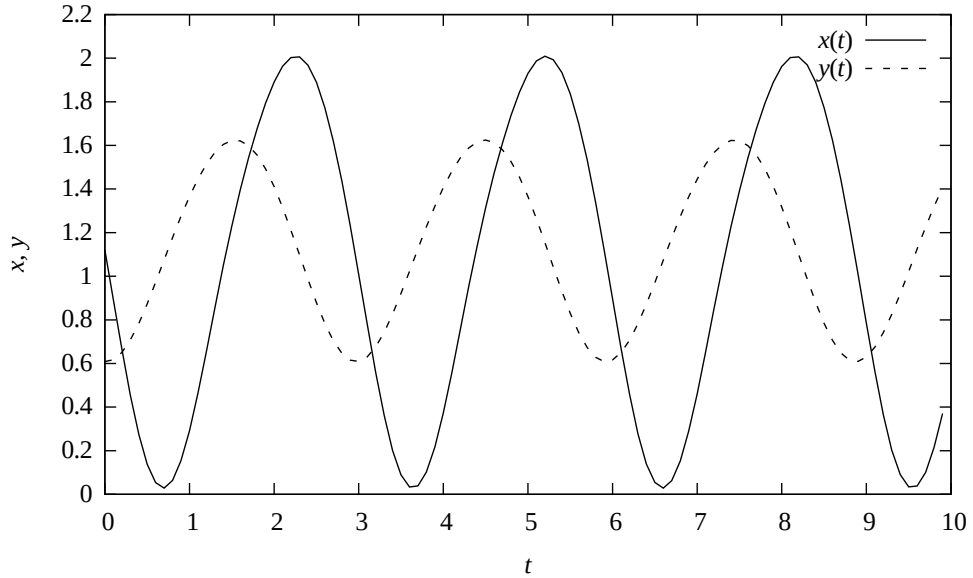


Рис. 1.22. Временные ряды модели (1.39): реализация ведущей подсистемы $y(t)$ и ведомой подсистемы $x(t)$ при значениях параметров $\lambda_x = 2.4$, $\lambda_y = 2.55$, $k = 0.3$, $\tau = 1$.

подбирались эмпирически. Такой подход дал возможность восстановить модель (1.39) при достаточно произвольных стартовых догадках с высокой точностью. Например, для реализации, приведённой на рис. 1.22, реконструкция удалась при следующих стартовых догадках: $\lambda'_x = 2.31$, $\lambda'_y = 2.66$, $k' = 0.21$, $\alpha_0 = 0.65$, $\alpha_1 = 0.06$, реконструированные значения параметров (для их обозначения используем тильду) составили $\tilde{\lambda}_x = 2.399949$, $\tilde{\lambda}_y = 2.549957$, $\tilde{k} = 0.300044$ при истинных значениях $\lambda_x = 2.4$, $\lambda_y = 2.55$, $k = 0.3$.

Чтобы понять, насколько достигнутый успех реконструкции случаен, необходимо провести реконструкцию при многих различных стартовых догадках. В работе [79] было ранее показано, что для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, на успех можно надеяться даже при достаточно удалённых от истинных значений стартовых догадках. Мы воспользовались предложенным в [79] подходом: зафиксировали стартовую догадку для параметра связи равную истинному значению, стартовые догадки для скрытой переменной были выбраны в виде отрезка прямой с коэффициентами $\alpha_0 = 0.65$ и $\alpha_1 = 0.06$, а стартовые догадки для параметров λ_x и λ_y варьировали в ши-

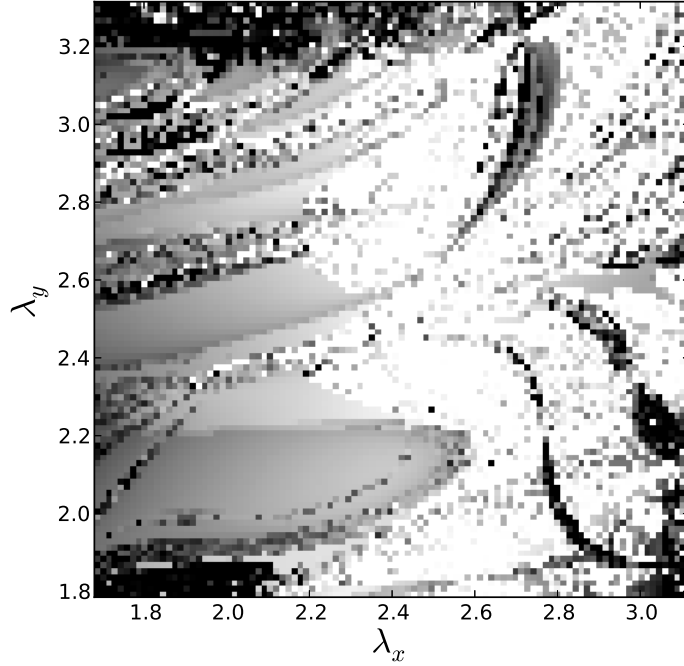


Рис. 1.23. Зависимость точности реконструкции параметров Δ_r системы (1.39) от стартовых догадок для параметров нелинейной функции λ_x и λ_y при фиксированных стартовых догадках для параметра связанности $k' = 0.3$ и стартовых догадках для скрытой переменной на времени запаздывания. Белый цвет соответствует $\Delta_r = 0$, чёрный цвет — $\Delta_r \geq 1$, различные градации серого — промежуточным значениям $0 < \Delta_r < 1$.

роких пределах. В качестве меры сходимости алгоритма было использовано нормированное на истинные значения расстояние в пространстве параметров от реконструированных значений до истинных Δ_r .

$$\Delta_r = \sqrt{\left(\frac{\lambda_x - \tilde{\lambda}_x}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_y - \tilde{\lambda}_y}{\lambda_y}\right)^2 + \left(\frac{k - \tilde{k}}{k}\right)^2} \quad (1.46)$$

Чтобы охарактеризовать двумерную зависимость $\Delta_r(\lambda'_x, \lambda'_y)$, было решено воспользоваться градациями серого (см. рис. 1.23).

На рис. 1.23 представлены результаты исследования сходимости метода при 10000 различных стартовых догадках для параметров λ_x и λ_y . Достижение глобального минимума оценивалось по ошибке аппроксимации ε , значения ε по порядку величины равные точности представления данных (6 знаков после десятичного разделителя), рассматривались как признак того, что метод

сошёлся к глобальному минимуму. Дополнительно контролировалась точность реконструкции параметров. Из рис. 1.23 видно, что при отклонении стартовых догадок на $\pm 50\%$ от истинных значений параметров для более чем четверти из них (27,46% от общего числа рассмотренных) метод сходится к глобальному минимуму.

1.12. Выводы

Предложены и апробированы в численном и радиофизическом эксперименте новые эффективные методы, позволяющие определить значения параметров элементов и архитектуру связей в ансамблях связанных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием, по временным рядам их колебаний, а также для неавтономных систем с запаздыванием. Подходы к реконструкции ансамблей основаны на минимизации методом наименьших квадратов целевой функции, характеризующей расстояние между точками реконструируемой нелинейной функции, отсортированными по величине абсциссы, для каждого элемента ансамбля. Предложенные подходы позволяют с высокой точностью восстановить времена запаздывания, параметры инерционности, нелинейные функции и коэффициенты связи всех элементов ансамбля.

Первый подход опирается на итерационный алгоритм добавления или исключения связей на основе контроля значимости по критерию Фишера. Он хорошо работает для небольших ансамблей (до 10 элементов) в случае, если число связей близко к минимально или максимально возможному. Его преимуществом является статистическая оценка значимости функций связи. Вторым подходом используется для разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые два алгоритма: кластеризацию восстановленных коэффициентов связи с помощью метода K -средних либо построение и последующий анализ зависимости суммы значений целевых функций всех элементов от количества коэффициентов связи в модельных уравнениях.

Первый из предложенных подходов использует нелинейный метод наименьших квадратов с использованием симплекс-метода для нахождения экстремума целевой функции. Теоретически это может быть полезно, поскольку повышает общность такого подхода, даёт возможность обобщения на другие сходные задачи. Однако на практике это ведёт к сужению области сходимости и росту вычислительных затрат. В рамках второго подхода целевая функция была переформулирована и использован обычный линейный метод наименьших квадратов, за счёт чего удалось на несколько порядков снизить время вычислений.

Для вычисления времени запаздывания в рамках первого подхода предложено опираться на ранее известные процедуры, разработанные для автономных систем с запаздыванием и учитывающие либо статистику экстремумов (для хаотических режимов), либо свойства автокорреляционной функции (для периодических). Второй подход позволяет за счёт существенного снижения времени расчётов провести сканирование пробных времён запаздывания в большом интервале с шагом, равным шагу выборки, и не прибегать к внешним процедурам.

Оба предложенных подхода можно применять к ансамблям, состоящим из неидентичных систем с запаздыванием с произвольным числом однонаправленных и взаимных связей между ними. Эффективность метода продемонстрирована на примере хаотических временных рядов ансамблей разностно связанных модельных систем Маккея–Гласса и Икеды, в том числе при наличии шума, а также на примере хаотических экспериментальных временных рядов резистивно связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Они могут быть также применены для реконструкции ансамблей с другими типами связи элементов, например, для ансамблей, состоящих из систем с запаздыванием, связанных через производную или через общее поле.

Дополнительно был предложен метод реконструкции неавтономных систем с запаздыванием при регулярном (периодическом или квазипериодическом) воздействии, который может быть полезен как сам по себе, так и в сочетании с подходами к реконструкции ансамблей для реконструкции сигнала

части элементов, измерить которые невозможно по каким-либо соображениям.

Ещё один способ решить проблему отсутствия сигнала части элементов ансамбля — использовать один из методов работы со скрытыми переменными. В данной работе рассмотрен только простейший случай — предложен подход к реконструкции двух однонаправленно связанных систем с запаздыванием по сигналу ведомой системы, позволяющий восстановить параметры отдельных систем, коэффициент связи и реализацию ведущей системы.

Результаты первой главы опубликованы в работах [88—94].

Реконструкция сетей колебательных систем без запаздывания в собственной динамике

2.1. Введение

Проблема реконструкции динамических систем по наблюдаемым временным рядам, также известная как проблема идентификации систем, известна уже на протяжении многих лет и большое число алгоритмов для её решения было разработано. Некоторые обзоры могут быть найдены в [80; 95; 96]. Большинство известных подходов могут поделены на классы по следующим критериям:

- речь идёт о реконструкции отдельной динамической системы или о сети;
- рассматриваются скалярные временные ряды, либо векторные, причём часть переменных может быть скрыта;
- рассматриваются динамические системы, в которых шум, если и присутствует, не играет существенной роли, либо рассматриваются стохастические системы, где роль шума определяющая, как в [97], причём в такой ситуации часто привлекается Байесов подход [98];
- подход изначально был нацелен на широкий класс объектов, как, например, изложенный в [29] метод ориентирован на системы, описываемые произвольными обыкновенными дифференциальными уравнениями, или наоборот на достаточно узкий, специальный класс; так, в работе [22] рассматриваются неавтономные уравнения под периодическим воздействием, в [23] — системы с запаздыванием первого порядка, в [99] — стохастические фазовые осцилляторы.

Интерес к задаче реконструкции обыкновенных дифференциальных уравнений по экспериментальным данным то падал, то возрастал вновь. Первый значительный результат был достигнут в [100]. В работе [86] был предложен метод множественной стрельбы, ориентированный на случай, когда модель в целом известна и может быть записана из первых принципов, но ряды части переменных и некоторые параметры недоступны измерению. Этот случай иногда называют «прозрачным ящиком», так как о системе почти всё известно. Затем был предложен другой, более общий, но гораздо менее грубый подход, использующий полиномиальную аппроксимацию нелинейных функций оператора эволюции и реконструкцию вектора состояния путём последовательного дифференцирования или методом временных задержек [29; 101]. Такой подход, напротив, называют «чёрным ящиком», поскольку в предполагается, что кроме временных рядов о системе почти ничего не известно.

Оказалось, однако, что оба подхода слишком сложно применить к экспериментальным данным. Когда это было осознано, начали развивать специализированные подходы, ранний обзор которых может быть найден в [102], включая неавтономные системы [22; 78] и системы с запаздыванием [23]. Поскольку использование разложения на базисы в общем виде для аппроксимации неизвестных нелинейных функций показало свою низкую эффективность, были предприняты некоторые усилия к их оптимизации [103]. Значительное число методов было разработано для реконструкции систем, в динамику которых для этого вносятся возмущения, в частности [104; 105]. Ряд работ посвящён реконструкции систем по временным рядам переходных процессов [106].

Относительно новый подход к проблеме был недавно предложен в [107—109], для которых ряды всех динамических переменных известны, а нелинейные функции первоначально представляются суммой большого числа разных типов нелинейностей, большая часть которых затем отбрасывается (подход известен как метод «разреженных функциональных матриц»). Его можно считать некоторым обновлением и упрощением задачи о «чёрном ящике», векторный

временной ряд системы известен и нет необходимости восстанавливать вектор состояния численно, хотя остальные сложности сохраняются. Метод, предложенный в [108], в теории позволяет восстановить также и ансамбль, а не только отдельную систему, хотя в действительности это достигается тем, что ансамбль рассматривается просто как целостная высокоразмерная система, а авторы подчёркивают, что эффективность метода для систем большой размерности низкая из-за очень быстрого роста сложности проблемы оптимизации функциональной матрицы с ростом размерности.

Существуют также специализированные методы для реконструкции систем с изменяющимися параметрами. Ранние подходы использовали те же методы, что и для стационарных рядов, но в скользящем временном окне [110]. Далее для этого же использовались искусственные нейронные сети в сочетании с алгоритмом Монте–Карло [111] и методы, ориентированные на разреженные матрицы [112]. Все эти подходы часто нацелены на предсказание бифуркаций.

Самый известный подход к реконструкции сетей — причинность по Грейнджеру [1], для которой существует целый ряд нелинейных расширений [2; 7; 113]. Та же идея лежит в основе энтропии переноса [6], которая может даже непосредственно сводиться к причинности по Грейнджеру в некоторых простых случаях [114]. Основной минус этих подходов состоит в том, что они, как правило, рассматривают только двусторонние связи, поэтому не прямое, опосредованное взаимодействие не может быть детектировано или принимается за непосредственное. Некоторым выходом из этого может случить использование условной причинности по Грейнджеру [7; 115]. Два неплохих частных обзора по реконструкции сетей осцилляторов можно найти в [116; 117], хотя они не исчерпывают всего многообразия работ.

В данной главе развивается подход к реконструкции сетей колебательных систем различной природы и сложности, начиная простых от линейных одномерных нейроосцилляторов [118], описываемых уравнениями первого порядка, и до обобщённых нелинейных осцилляторов ван дер Поля [119], включая осцил-

ляторы Рэля [120], Бонхёффера [121] и ФитцХью–Нагумо [122; 123].

2.2. Модель динамики частоты бёрстинга нейронов

Первая основная рассматриваемая модель была предложена в [118] и принадлежит к классу моделей эволюции основной частоты бёрстинга сети нейронов. Каждый узел описывается одним уравнением для трансмембранного потенциала x_i , находящимся под нелинейным внешним воздействием со стороны других нейронов $h(x_j)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j), \\ i &= 1, 2, \dots, D, \\ h(x) &= \text{th}(gx). \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $k_{i,j}$ суть элементы матрицы связанности \hat{K} , характеризующей эффективность синаптической передачи и распределённые нормально с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением J/\sqrt{D} , где J есть параметр, обобщённо характеризующий силу связей. В работе [118] было аналитически показано, что ансамбль (2.1) демонстрирует хаотическое поведение в термодинамическом пределе $D \rightarrow \infty$ при $(Jg) > 2$ для произвольной типичной матрицы \hat{K} .

Хотя это не было показано теоретически, хаотическое поведение может быть обнаружено и для конечных D , хотя с уменьшением D сначала начинают доминировать периодические режимы, а затем — устойчивые точки. Например, даже для относительно небольшой сети из $D = 16$ осцилляторов численное решение уравнений методом Рунге–Кутты 4-го порядка выявило 3 хаотических ансамбля из 120 пробных с разными случайными матрицами связей \hat{K} . Пример хаотического поведения (временные ряды и спектры) представлен на рис. 2.1. Чтобы определить, что поведения ансамбля действительно хаотическое, рассчитывался старший ляпуновский показатель. Правда, таким образом невозможно

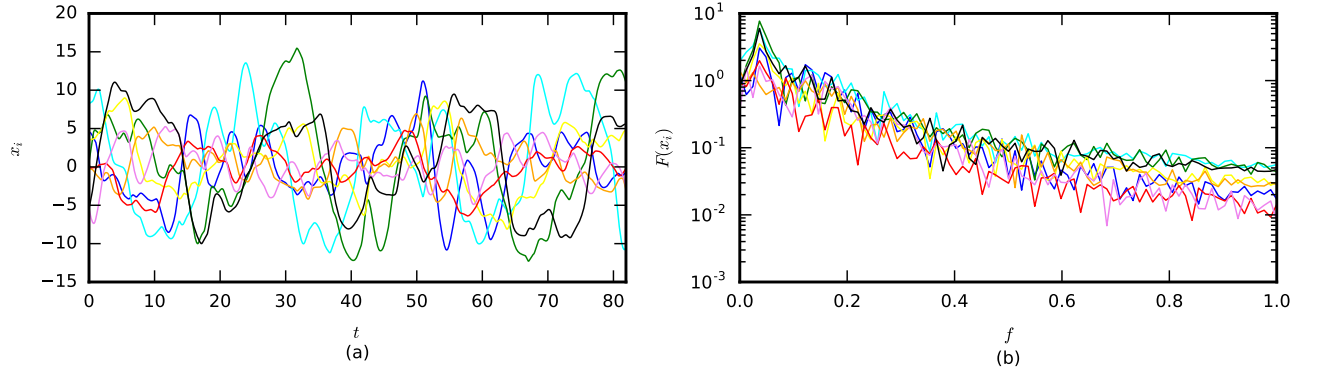


Рис. 2.1. (а) — временные ряды первых 8-ми осцилляторов ансамбля (2.1) из $D = 16$; (б) — спектры колебаний тех же первых 8-ми осцилляторов.

надёжно различить хаотический аттрактор и очень длинный переходный процесс. Это различие несущественно для предлагаемого далее метода, которому достаточно, чтобы ряд был нерегулярным. Доля матриц связи \hat{K} , соответствующих хаотическому поведению, возрастает с ростом размера ансамбля D .

2.3. Методика реконструкции

2.3.1. Реконструкция модели без запаздывания в связях

Рассмотрим сначала задачу реконструкции модели (2.1) без запаздывания в связях (оригинальной модели). Пусть имеются временные ряды колебаний всех узлов сети $\{x_i(t_n)\}_{n=1}^N$ длины N (полученные с шагом выборки Δt). Обозначим $x_i(n) = x_i(t_n)$ и $\dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(t_n)$ для простоты. Временные ряды производных рассчитаем численно по рядам $x_i(n)$ с использованием сглаживания [68]. С использованием введённых обозначений уравнение (2.1) может быть переписано как:

$$x_i(n) = -\dot{x}_i(n) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j(n)). \quad (2.2)$$

На следующем шаге для данного i отсортируем все измеренные значения $\{x_i(n)\}_{n=1}^N$, например, в порядке возрастания, но можно и в порядке убывания, это не имеет принципиального значения. Введём отображение Q_i аналогично

тому, как мы делали это для ансамблей систем с запаздыванием, ставящее в соответствие номеру n значения $x_i(n)$ в исходном ряде его номер $Q_i(n)$ в отсортированном. Также рассмотрим обратное отображение Q_i^{-1} , ставящее в соответствие номеру $Q_i(n)$ в отсортированном ряде её номер n в исходном. Таким образом, $Q_i^{-1}(Q_i(n)) = n$.

Рассмотрим два ближайших значения в отсортированном ряде, имеющие в исходном номера n и $p_n = Q_i^{-1}(Q_i(n) - 1)$, пусть в отсортированном ряде $x_i(p_n)$ стоит непосредственно перед $x_i(n)$. Тогда обозначим разницу между ними как $\delta_i(n)$:

$$\delta_i(n) = x_i(n) - x_i(p_n). \quad (2.3)$$

Также рассмотрим одновременные значения в рядах всех прочих узлов $\{x_j\}$: $x_j(n)$ и $x_j(p_n)$. Можно переписать (2.3) с использованием (2.2), выразив $\delta_i(n)$ следующим образом:

$$\delta_i(n) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \Delta h_{i,j}(n) - \Delta \dot{x}_i(n), \quad (2.4)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(n) - \dot{x}_i(p_n), \quad (2.5)$$

$$\Delta h_{i,j}(n) = h(x_j(n)) - h(x_j(p_n)). \quad (2.6)$$

Поскольку амплитуда колебаний конечна, значения $x_i(n)$ и $x_i(p_n)$, будучи соседними в отсортированном ряде, очень близки друг к другу, если N достаточно велико. Чтобы охарактеризовать эту близость в среднем, рассмотрим сумму квадратов $\delta_i(n)$:

$$S_i^2(\mathbf{k}_i) = \sum_{n=1}^N \delta_i^2(n) = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \Delta h_{i,j}(n) - \Delta \dot{x}_i(n) \right)^2, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{k}_i = (k_{i,1}, \dots, k_{i,D})$ и $Q_i(n) \neq 1$.

Далее рассмотрим правую часть уравнения (2.7). Вследствие хаотического и несинхронного поведения различных узлов близость $x_i(n)$ и $x_i(p_n)$ не ведёт к близости одновременных значений $x_j(n)$ и $x_j(p_n)$, как и производных $\dot{x}_i(n)$ и

$\dot{x}_i(p_n)$. Поэтому $\Delta h_{i,j}(n)$ и $\Delta \dot{x}_i(n)$ в общем случае не являются малыми. Следовательно, единственный путь добиться малости (2.7) состоит в том, чтобы найти правильные значения $k_{i,j}$ так, чтобы слагаемые $k_{i,j}\Delta h_{i,j}(n)$ и $\Delta \dot{x}_i(n)$ взаимно компенсировались.

Если функции связи h известны, формула (2.7) может рассматриваться как постановка задачи на наименьшие квадраты, где S_i^2 есть целевая функция, которую следует минимизировать. Здесь $\Delta \dot{x}_i(n)$ и $\Delta h_{i,j}(n)$ могут быть получены по временным рядам, первые — примерно вследствие ошибок численного дифференцирования. Таким образом, в результате минимизации S_i^2 может быть получена оценка матрицы связей \hat{K} .

Рассмотрим, как ведёт себя функция (2.7) в пределе $N \rightarrow \infty$ для того, чтобы охарактеризовать асимптотические свойства оценок. В таком случае при условии конечности амплитуды колебаний все $\delta_i(n)$ спадают в среднем по закону $\sim N^{-1}$, так что квадраты $\delta_i^2(n)$ спадают как $\sim N^{-2}$. Поэтому сумма (2.7) должна спадать как $\sim N \cdot N^{-2} = N^{-1}$. Это означает, что $S_i^2(\mathbf{k})$ стремится к нулю в пределе $N \rightarrow \infty$. Таким образом, оценки $\tilde{k}_{i,j}$ коэффициентов связи $k_{i,j}$, полученные представленным методом, асимптотически не смещены.

2.3.2. Интерполяционный алгоритм

Существует возможность улучшить предлагаемый метод, если производные высших порядков могут быть рассчитаны с достаточной точностью. Как видно из выше приведённого анализа, основным источником ошибок для конечного N является конечность величин $\delta_i(n) = x_i(n) - x_i(p_n)$. Можно использовать интерполяцию на промежутке между $x_i(n)$ и $x_i(p_n)$, чтобы получить значения, которые гораздо ближе друг к другу, чем реальные $x_i(n)$ и $x_i(p_n)$.

Рассмотрим величину $X_i(n)$, расположенную где-то между $x_i(n)$ и $x_i(p_n)$. Для простоты пусть это будет середина интервала:

$$X_i(n) = \frac{1}{2} (x_i(n) + x_i(p_n)) . \quad (2.8)$$

Рассматривая x как функцию времени, можно заменить $X_i(n)$ её разложением в ряд Тейлора, рассчитанным возле $x_i(n)$ — формула (2.9), — и другим разложением в ряд Тейлора, рассчитанным возле $x_i(p_n)$ — формула (2.10):

$$X_i(n) = x_i(n) + \dot{x}_i(n)T_i(n) + \frac{\ddot{x}_i}{2}T_i^2(n) + \dots, \quad (2.9)$$

$$X_i(n) = x_i(p_n) + \dot{x}_i(p_n)T'_i(n) + \frac{\ddot{x}_i}{2}T_i'^2(n) + \dots \quad (2.10)$$

Здесь $T_i(n)$ есть маленький временной отрезок, необходимый осциллятору с индексом i , чтобы переместиться в состояние $X_i(t)$ из состояния $x_i(t)$, следуя траектории, которая привела его в состояние $x_i(n)$ (величина $T_i(n)$ может быть отрицательна, то есть следует сдвинуться назад по траектории). Аналогично, $T'_i(n)$ есть другой малый временной шаг, необходимый, чтобы сдвинуться в $X_i(t)$ из значения $x_i(p_n)$, следуя траектории, на которой расположено значение $x_i(p_n)$.

Поскольку $T_i(n)$ и $T'_i(n)$ суть очень маленькие временные интервалы (в типичном случае они меньше или даже много меньше шага выборки Δt), членами второго и более высоких порядков в разложениях (2.9) и (2.10) можно пренебречь. Таким образом, $T_i(n)$ и $T'_i(n)$ несложно рассчитать по формулам (2.8, 2.9) и (2.8, 2.10) соответственно:

$$T_i(n) = \frac{x_i(p_n) - x_i(n)}{\dot{x}_i(n)}, \quad (2.11)$$

$$T'_i(n) = \frac{x_i(n) - x_i(p_n)}{\dot{x}_i(p_n)}. \quad (2.12)$$

Затем, подставим интерполированные значения $X_i(n)$ в уравнение (2.2):

$$X_i(n) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(X_j(n)) - \dot{X}_i(n). \quad (2.13)$$

Подставим (2.9) и (2.10) в (2.13), оставляя только члены первого порядка малости:

$$X_i(n) \approx \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j(n) + \dot{x}_j(n)T_i(n)) - (\dot{x}_i(n) + \ddot{x}_i(n)T_i(n)),$$

$$X_i(n) \approx \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j(p_n) + \dot{x}_j(p_n)T'_i(n)) - (\dot{x}_i(p_n) + \ddot{x}_i(p_n)T'_i(n)).$$

Таким путём получаются уравнения для $\delta_i(n)$, сходные с (2.4–2.6)

$$\delta_i(n) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \Delta h_{i,j}(n) - \Delta \dot{x}_i(n) - \Delta \ddot{x}_i(n) \approx 0, \quad (2.14)$$

$$\Delta h_{i,j}(n) = h(x_j(n) + \dot{x}_j(n)T_i(n)) - h(x_j(p_n) + \dot{x}_j(p_n)T_i'(n)), \quad (2.15)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(n) - \dot{x}_i(p_n), \quad (2.16)$$

$$\Delta \ddot{x}_i(n) = \ddot{x}_i(n)T_i(n) - \ddot{x}_i(p_n)T_i'(n). \quad (2.17)$$

Преимущество такого подхода в том, что значения $\delta_i(n)$ по определению будут гораздо меньше. Фактически, поскольку использовалась аппроксимация полиномом первого порядка, можно теперь ожидать, что δ будет убывать по закону N^{-2} с ростом длины ряда, а не N^{-1} , как описано в разделе 2.3.1.

Можно обобщить такой подход, используя производные и более высоких порядков, но численная оценка производных высоких порядков скорее всего приведёт к большим ошибкам, чем те, что вызваны конечностью $\delta_i(n)$.

2.3.3. Модель с запаздыванием в связях

Модель (2.1) может быть слегка модифицирована и обобщена, если рассмотреть возможность наличия запаздывания в связях:

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j(t - \tau_{i,j})), \quad (2.18)$$

где $\tau_{i,j}$ суть времена запаздывания, свои для каждого члена связи.

Введение задержек в связях увеличивает сложность модели, что даёт возможность получить хаотическое поведение для меньшего числа узлов, как это показано на рис. 2.2. Основная частота для большинства осцилляторов сдвинута в сторону существенно больших значений, см. рис. 2.2(b), и спектр имеет плато в диапазоне частот $f \in [0.3; 0.7]$, что означает вовлечение в динамику большего числа степеней свободы.

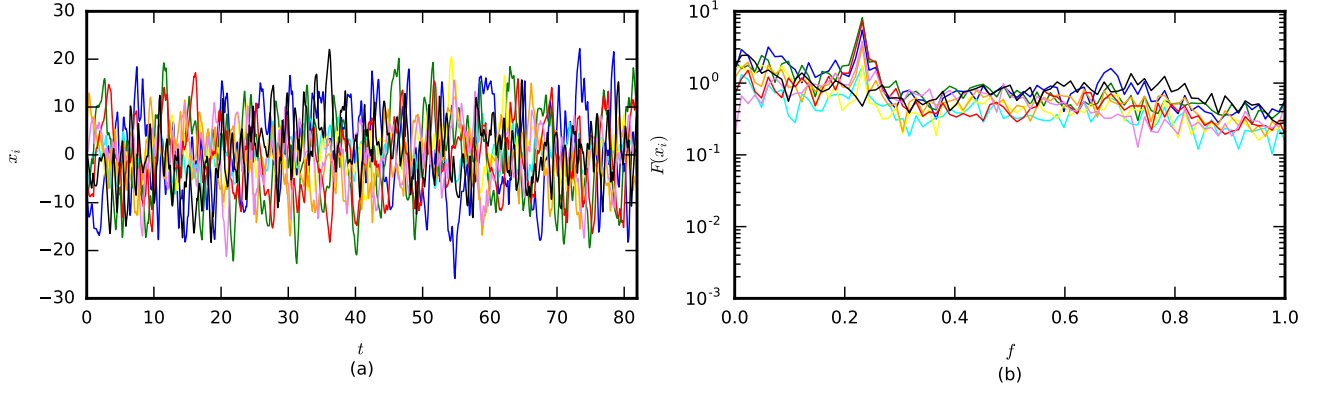


Рис. 2.2. (а) — временные ряды первых 8-ми осцилляторов ансамбля (2.18) из $D = 16$; (б) — спектры колебаний тех же первых 8-ми осцилляторов. Времена запаздывания были выбраны из равномерного дискретного распределения в диапазоне $\theta_{i,j} \in [50; 70]$ при $\Delta t = 0.05$.

2.3.4. Реконструкция модели с запаздывающими связями

Реконструкция модифицированной модели (2.18) может быть осуществлена примерно тем же способом, что и оригинальной, если времена запаздывания известны. Обозначим целочисленные времена запаздывания в шагах выборки как $\theta_{i,j} = \tau_{i,j}/\Delta t$. Тогда уравнение (2.2) может быть переписано как (2.19):

$$x_i(n) = -\dot{x}_i(n) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j(n - \theta_{i,j})). \quad (2.19)$$

Уравнение (2.3) не изменяется, но положение ближайшего предыдущего значения с номером $r_{i,j,n}$ вместо p_n становится:

$$r_{i,j,n} = Q_i^{-1}(Q_i(n - \theta_{i,j}) - 1).$$

Уравнение (2.6) переписывается как

$$\Delta h_{i,j}(n) = h(x_i(n - \theta_{i,j})) - h(x_i(r_{i,j,n})), \quad (2.20)$$

в то время как (2.4) и (2.5) не изменились за исключением замены $p_n \rightarrow r_{i,j,n}$. В формуле (2.7) нумерация изменяется с $n = 1$ к $n = \theta_i + 1$, где $\theta_i = \max_{j=1, \dots, D, j \neq i}(\theta_{i,j})$:

$$S_i^2(\mathbf{k}_i) = \sum_{n=\theta_i+1}^N \delta_i(n) = \sum_{n=\theta_i+1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \Delta h_{i,j}(n) - \Delta \dot{x}_i(n) \right)^2. \quad (2.21)$$

В результате, тот же подход, что был описан выше в разделе (2.3.1), может быть использован для реконструкции уравнений с запаздывающими связями.

2.3.5. Реконструкция времён запаздывания

Чтобы реконструировать времена запаздывания, если они неизвестны, можно провести сканирование всех возможных комбинаций $\theta_{i,j}$ для каждого i отдельно, как это предлагалось для систем с запаздыванием в [92]. Можно провести реконструкцию для всех пробных запаздываний в заданном диапазоне, и настоящее время запаздывания должно соответствовать минимуму (2.21). Поскольку величины $\tilde{\theta}_{i,j}$ могут принимать только неотрицательные целые значения, такой подход вполне возможен, но потребует колоссальных вычислительных мощностей, так как сканировать придётся в $(D - 1)$ -мерном пространстве.

Вместо этого мы предлагаем итерационный алгоритм, похожий на метод градиентного спуска. Сначала для фиксированного i задаются начальные пробные значения $\tilde{\theta}_{i,j}$. Затем проводится реконструкция для этого вектора, полученное значение целевой функции назовём $S_{i,0}^2$. Далее для одной из связей увеличим дискретное время задержки $\tilde{\theta}_{i,j}$ на 1 и найдем минимум $S_{i,+j}$ функции (2.7), после чего вернем прежнее значение $\tilde{\theta}_{i,j}$. Повторим эту процедуру по очереди для каждой связи. Далее найдем минимумы $S_{i,-j}$ функции (2.7) при поочередном уменьшении каждого $\tilde{\theta}_{i,j}$ на 1. Из $(D - 1)$ минимумов $S_{i,+j}$ и $(D - 1)$ минимумов $S_{i,-j}$ найдем наименьший $S_{i,\min}$. Если $S_{i,\min} < S_{i,0}$, то значения $\tilde{\theta}_{i,j}$, соответствующие $S_{i,\min}$, принимаются за новые стартовые догадки и процедура повторяется, пока не достигнет минимума.

2.4. Результаты апробации метода

2.4.1. Реконструкция сети нейроосцилляторов без запаздывания в связях

Были сгенерированы 100 ансамблей систем (2.1) при $D = 16$, $D = 24$, $D = 32$, $D = 48$ и $D = 64$ (всего — 500 ансамблей). Уравнения движения решались численно используя адаптивный метод Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом выборки $\Delta t = 0.01$. Переходной процесс длиной $2^{17}\Delta t$ был пропущен. Для определения динамического режима, старший ляпуновский показатель оценивался с использованием алгоритма Бенеттина [124]. Только ансамбли, демонстрирующие хаотическое поведение (их было 3, 6, 8, 20 и 38 для каждого из перечисленных выше D соответственно) рассматривались для реконструкции.

Временные ряды всех переменных длиной в $N = 2^{14}$ значений записывались для каждой сети, и реконструкция матрицы связей \hat{K} проводилась методом, описанным выше.

Чтобы охарактеризовать точность восстановления матрицы связей, была построена гистограмма относительных отклонений (2.22) оценок коэффициентов связи от их истинных значений, см. рис. 2.3.

$$\Delta\tilde{k}_{i,j} = (\tilde{k}_{i,j} - k_{i,j})/(J\sqrt{D}), \quad (2.22)$$

где $k_{i,j}$ суть исходные значения коэффициентов связи, а $\tilde{k}_{i,j}$ суть реконструированные. Поскольку среднеквадратичное отклонение распределения $k_{i,j}$ зависело от D по закону J/\sqrt{D} , соответствующая нормировка была добавлена в (2.22).

Не только абсолютные значения $\Delta\tilde{k}$, но и их распределение может свидетельствовать об эффективности метода. В идеале, распределение $\Delta\tilde{k}$ должно быть гауссовым с нулевым средним и оно действительно выглядит очень похожим на гауссово — см. рис. 2.3(a). Для того, чтобы проверить это более точно, был проведён t-тест Стьюдента на отличие среднего от нуля, см. рис. 2.3(b), и тест Колмогорова–Смирнова на отличие распределения от гауссова с нуле-

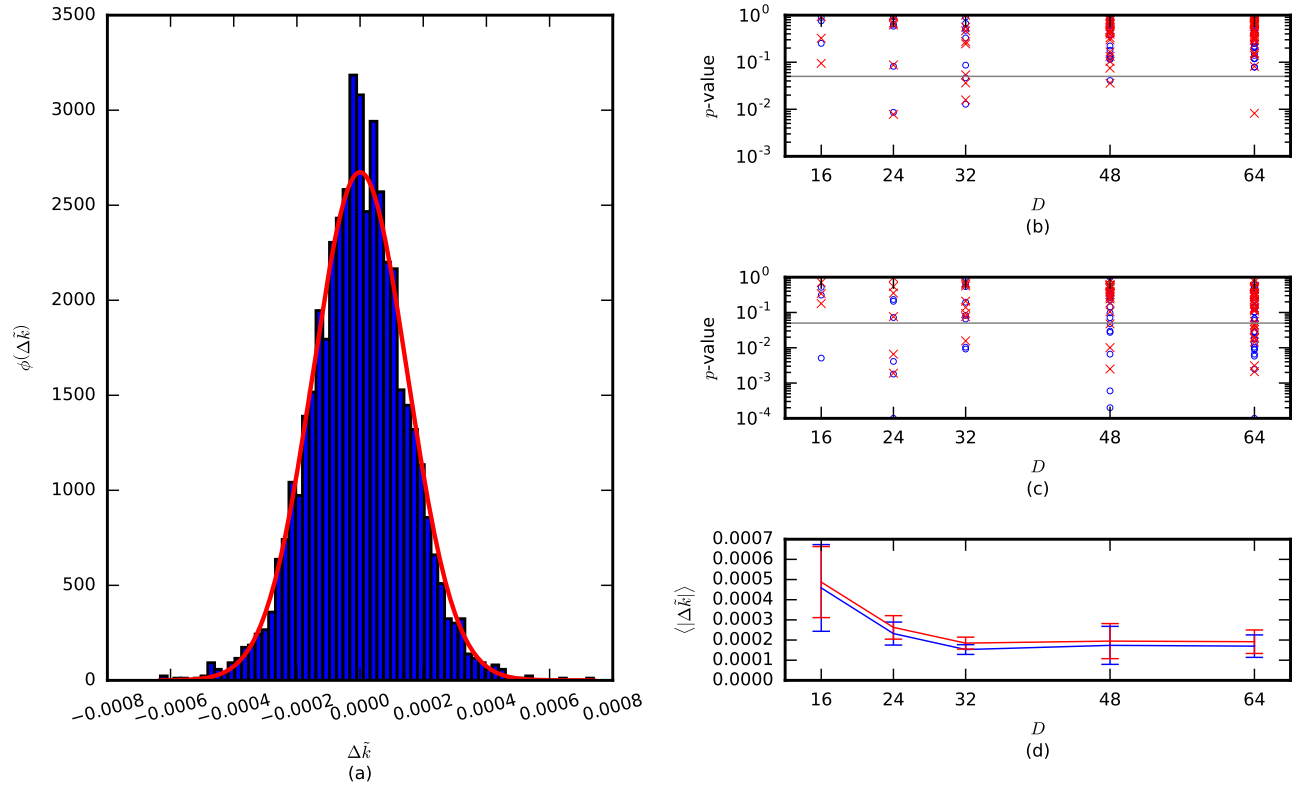


Рис. 2.3. (а) — гистограмма относительных отклонений $\Delta\tilde{k}_{i,j}$ оценок коэффициентов связи $\tilde{k}_{i,j}$, нормированных к единичной дисперсии, для ансамбля из $D = 64$ элементов и её аппроксимация гауссианом (красная кривая). (b) — доверительная вероятность t-теста Стьюдента при тестировании на нулевое среднее для $\Delta\tilde{k}$. (c) — доверительная вероятность теста Колмогорова–Смирнова при тестировании отклонений на нормальность. (d) — зависимость среднего значения $\Delta\tilde{k}$ от размерности ансамбля D с планками погрешностей, указывающими стандартное отклонение величин $\Delta\tilde{k}$ от среднего $\langle\Delta\tilde{k}\rangle$. На панелях (b–d) синие кружки соответствуют результатам исходного метода, см. подраздел. 2.3.1, а красные крестики — результатам интерполяционного подхода, описанного в подразделе 2.3.2.

вым средним (дисперсия рассчитывалась эмпирически), см. рис. 2.3(c). Тестирование проводилось для всех рассмотренных ансамблей. Можно видеть, что в большинстве случаев гипотеза о нулевом среднем не может быть отвергнута на уровне значимости 0.05 — см. серую линию на рис. 2.3(b). Так, гипотеза нулевого среднего должна быть принята для всех рассмотренных случаев при $D = 64$ и для всех за исключением одного при $D = 48$. Гипотеза о гауссовом распределении опровергается в 40% случаев — см. рис. 2.3(c). Из проведённого тестирования можно сделать вывод, что оценки коэффициентов оказываются несмещёнными, что, несомненно, хорошо, но предлагаемый метод не даёт оценок в смысле максимального правдоподобия (хотя и даёт близкие к ним), иначе $\Delta\tilde{k}_{i,j}$ следовали бы гауссову закону.

Для общности такой же подход был применён к сети из $D = 32$ узлов, но с коэффициентами $k_{i,j}$, распределёнными равномерно при той же дисперсии, что и ранее, и нулевом среднем. Такое распределение коэффициентов противоречит исходной работе [118], но при большом числе узлов такое изменение, возможно, не очень существенно, так как связи суммируются. Семь из ста случайно сгенерированных ансамблей демонстрировали хаотическое поведение. Ошибка результирующих оценок $\Delta\tilde{k}_{i,j}$ оказалась распределена очень сходным образом с тем, как это имело место для гауссова распределения $k_{i,j}$.

Внимательное рассмотрение рис. 2.3(b–d) показывает, что в общем случае интерполяционный метод не даёт значимого улучшения оценок, что скорее всего связано с ошибками оценки второй производной. В большинстве случаев результаты прямого метода (см. подраздел 2.3.1) и интерполяционного (см. подраздел 2.3.2) очень похожи. Однако для малых сетей, например, при $D = 16$, интерполяционный метод даёт даже несколько лучшие оценки. Если бы удалось измерять вторую или хотя бы первую производную напрямую, несомненно, интерполяционный метод дал бы лучшие результаты.

Были сгенерированы по 40 ансамблей осцилляторов числом $D = 16$, $D = 24$ и $D = 32$ в каждом (120 всего). Времена запаздывания выбирались из рав-

номерного распределения на отрезке $[2.5; 3.5]$. Из этих 40 ансамблей 19, 34 и 38 соответственно демонстрировали хаотическое поведение, что значительно больше, чем для сетей без запаздывания в связях, рассмотренных в предыдущем разделе. Уравнения решались численно методом Эйлера с шагом выборки $\Delta t = 0.01$ и шагом интегрирования $\Delta t/100$. Такой подход был выбран из-за наличия запаздывания в уравнениях и требовал больших вычислительных затрат, поэтому сети большего размера не рассматривались. Каждый раз опускался переходной процесс длины $2^{17}\Delta t$. Реконструировались только ансамбли с хаотическим поведением. Временные ряды длины $N = 2^{14}$ ото всех D осцилляторов записывались и матрица связей \hat{K} реконструировалась методом, предложенным в разделе. 2.3.4.

Результаты реконструкции матрицы связей при известных временах запаздывания показаны на рис. 2.4 тем же способом, что и на рис. 2.3 для осцилляторов с незадержанными связями. Для малых значений D средняя ошибка реконструкции коэффициентов связи существенно меньше для ансамбля с запаздывающими связями (2.18), чем для ансамбля без запаздывания в связях (2.1). Это может объясняться тем, что в ансамблях типа (2.1) для рассмотренных небольших D может наблюдаться только достаточно слабый хаос с малым старшим ляпуновским показателем, а при введении запаздывания в связи хаос усложняется. В сильно развитых хаотических режимах такие же ошибки в коэффициентах связи ведут к большему возрастанию целевой функции, поэтому метод оказывается более чувствительным к ошибкам и полученные с его помощью оценки оказываются в итоге точнее.

2.4.2. Реконструкция времён запаздывания

Чтобы реконструировать описанные выше сети осцилляторов с запаздывающими связями, необходимо знать все времена запаздывания $\tau_{i,j}$ или их дискретные аналоги $\theta_{i,j}$. Однако предполагать, что в реальном физическом или биологическом эксперименте они будут доступны или известны из первых прин-

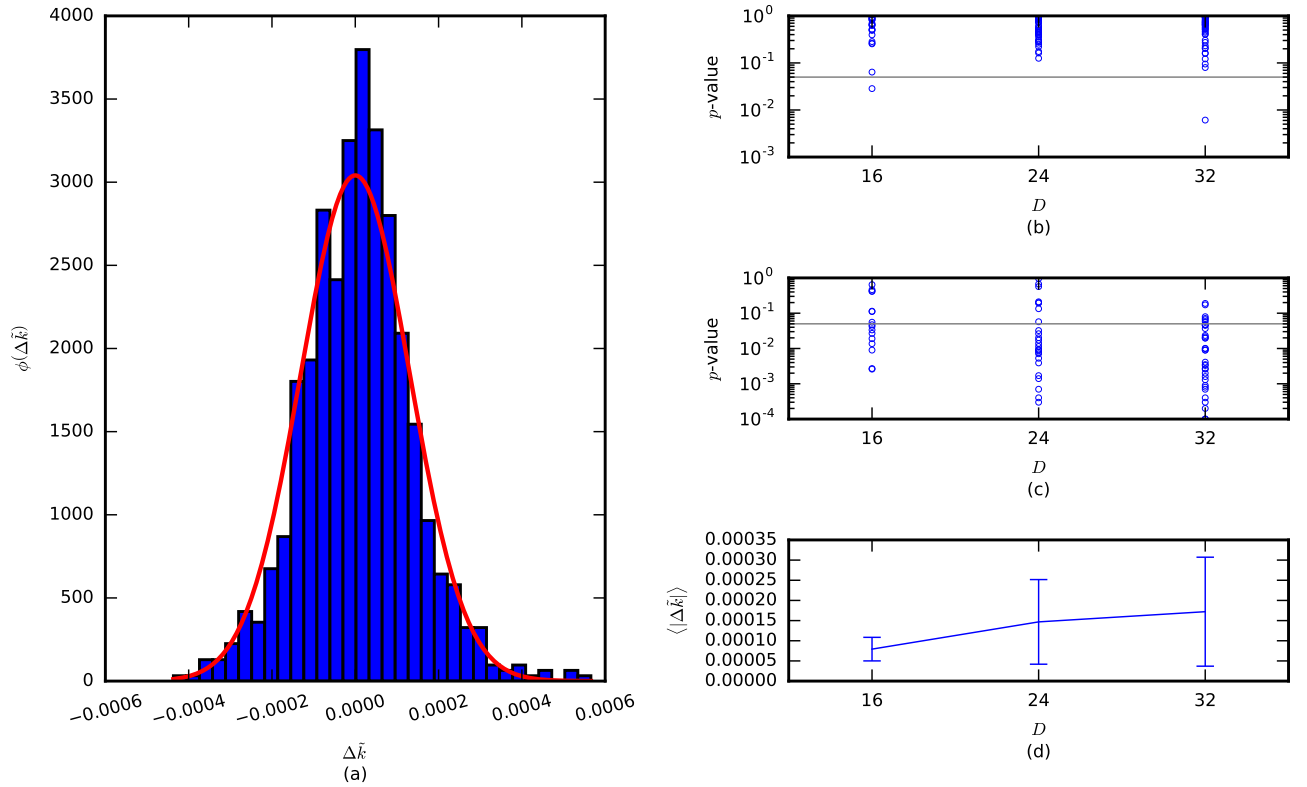


Рис. 2.4. (а) — гистограмма функции распределения относительных отклонений $\Delta\tilde{k}_{i,j}$ оценок коэффициентов $\tilde{k}_{i,j}$, для ансамбля из $D = 32$ узлов и её аппроксимация гауссианом (красная кривая). (б) — доверительная вероятность для t-теста Стьюдентана на нулевое среднее величин $\Delta\tilde{k}$. (с) — доверительная вероятность для теста Колмогорова–Смирнова на нормальность. (д) — зависимость среднего $\Delta\tilde{k}$ от размерности ансамбля D с планками погрешностей, обозначающими среднеквадратичное отклонение $\Delta\tilde{k}$ от среднего $\langle \Delta\tilde{k} \rangle$.

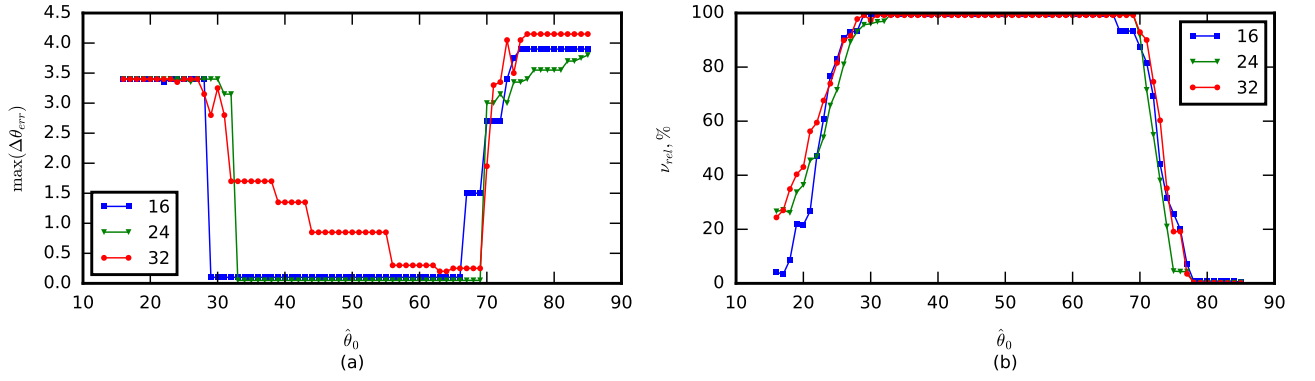


Рис. 2.5. (а) — максимальная среди всех абсолютная ошибка при оценке времён запаздывания в связях $\max(\Delta\theta_{err})$; (б) — процент ν_{rel} корректно определённых времён запаздывания.

ципов, — слишком оптимистично. Поэтому в разделе 2.3.5 был предложен итеративный подход к реконструкции времён запаздывания, тестируемый ниже. Чтобы изучить сходимость алгоритма, пробная реконструкция проводилась при различных стартовых догадках для времён запаздывания. В рассматриваемом случае при $D \geq 16$ узлов в сети (2.1) и от 240 связей и более рассмотреть все возможные комбинации стартовых догадок даже несмотря на то, что их значения дискретны с шагом, равным интервалу выборки. Поэтому мы ограничились весьма реалистичным сценарием, когда стартовые догадки $\hat{\theta}_0$ для запаздывания во всех связях принимаются равными. Чтобы охарактеризовать качество реконструкции, для каждого рассмотренного набора $\hat{\theta}_0$ рассчитывались две меры:

1. количество ν_{abs} (и процент ν_{rel}) корректно восстановленных времён запаздывания;
2. максимальная из всех ошибка реконструкции времени запаздывания $\max(\Delta\theta_{err})$.

Обе эти меры отложены на рис. 2.5.

Исходные значения времён запаздывания $\tau_{i,j}$ были сгенерированы из равномерного распределения на отрезке $[2.5; 3.5]$, то есть дискретные времена запаздывания лежали на отрезке $\theta_{i,j} \in [50; 70]$. Из рис. 2.5 можно видеть, что существует большая область значений $\hat{\theta}_0$ вокруг центра рассматриваемого диа-

пазона ($\hat{\theta}_0 = 60$), стартуя из которой значения запаздываний восстанавливаются очень точно: 2 ошибочных значения с отклонением от истинных на $\pm 1\Delta t$ для $D = 16$ из 240 коэффициентов связи, одна ошибка, равная $2\Delta t$ для $d = 24$ из 554 времён запаздывания, и 6 ошибок, не превышающих по модулю 6 для $D = 32$ из 992 связей. Если, однако, реконструкция начинается с очень больших или очень малых стартовых догадок, она проваливается при той же длине временного ряда. Для сети из $D = 32$ узлов максимальная ошибка $\max(\Delta\theta_{err})$ соответствовала всегда одной и той же единственной связи для всех стартовых догадок в широком диапазоне от $\hat{\theta}_0 = 32$ до $\hat{\theta}_0 = 69$, в то время как остальные запаздывания восстанавливались одинаково хорошо для всего диапазона. Эта связь соответствует относительно малому коэффициенту связи по модулю в 2.5 раза меньше среднего значения.

Чтобы убедиться в том, что полученные результаты не являются частным случаем для удачно выбранного нами ансамбля, времена запаздывания были рассмотрены для всех 19 ансамблей при $D = 16$, для которых режим был хаотическим (для ровного счёта мы нашли и добавили ещё 1). При этом мы ограничились случаем $\hat{\theta}_0 = 60$ для всех ансамблей и всех осцилляторов. На рис. 2.6 показана сходимость (зависимость целевой функции (2.7) от номера шага) предложенного метода для второго ансамбля с хаотической динамикой. Различия в стартовом и итоговом значении целевой функции определяются индивидуальными особенностями динамики отдельных осцилляторов и зависят от амплитуды колебаний, конкретных значений силы связи, начальных условий. Число шагов зависит от того, как далеко оказались стартовые догадки для времён запаздывания от итоговых значений. В результате реконструкции из 240 времён запаздывания для первого ансамбля верно оказались восстановлены 237, ещё в трёх были допущены ошибки $\Delta\theta_{err} = \tau'/\Delta t = 1$ для осциллятора №9, $\Delta\theta_{err} = 3$ для осциллятора №6 и $\Delta\theta_{err} = 4$ для осциллятора №10 (см. рис. 2.6).

Общие результаты по 20 ансамблям при длине ряда в 2^{12} точек приведены на рис. 2.7 в виде гистограммы. Всего из 5000 времён запаздывания неверно

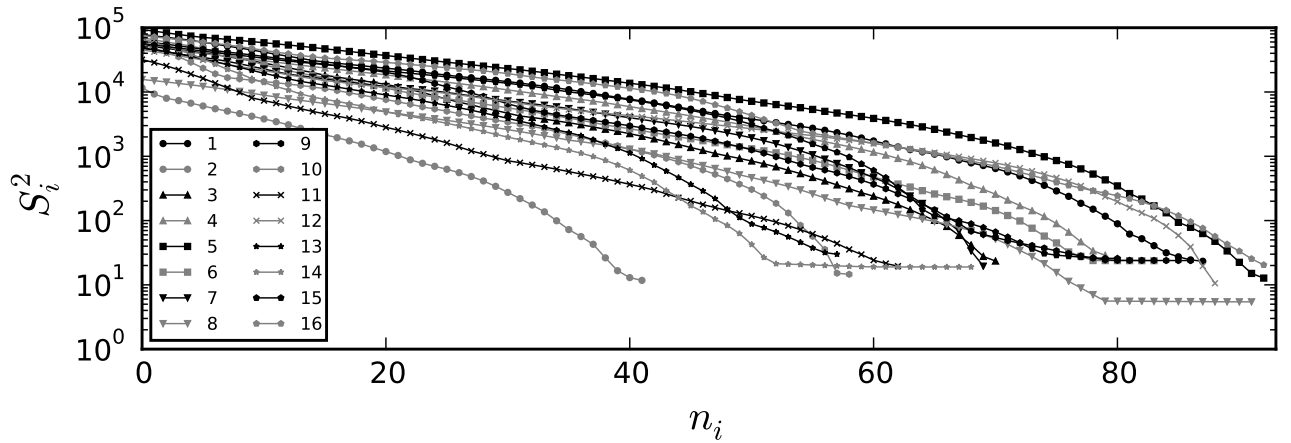


Рис. 2.6. Зависимость целевой функции (2.7) от номера шага при реконструкции времён запаздывания для всех 16 осцилляторов ансамбля.

были оценены 55 (1.1%), в том числе с ошибкой в ± 1 время дискретизации — 35 (0.7%). Для трёх ансамблей все времена запаздывания были восстановлены точно.

Результаты реконструкции задержек в связях сильно зависят от динамического режима. Для рис. 2.5 были выбраны только хаотические режимы с достаточно большим $\Lambda > 0.12$ старшим ляпуновским показателем. Для меньших Λ число ошибок может быть существенно больше, например, для ансамбля из $D = 24$ осцилляторов с $\Lambda \approx 0.04$ все коэффициенты связи могут быть корректно восстановлены с соответствующими им временами запаздывания только для 6 осцилляторов из 24, а число запаздываний, восстановленных с ошибками, превышает 60% даже для стартовых догадок $\hat{\tau}_0 = 3$.

2.4.3. Асимптотическая точность метода

При описании метода было показано, что он должен давать асимптотически точные оценки при $N \rightarrow \infty$. Чтобы подтвердить это в численном эксперименте, следует рассмотреть все существующие источники ошибок. Их четыре:

1. ошибки, связанные с недостаточно точным представлением экспериментальных данных (квантование, шумы измерения и проч.);

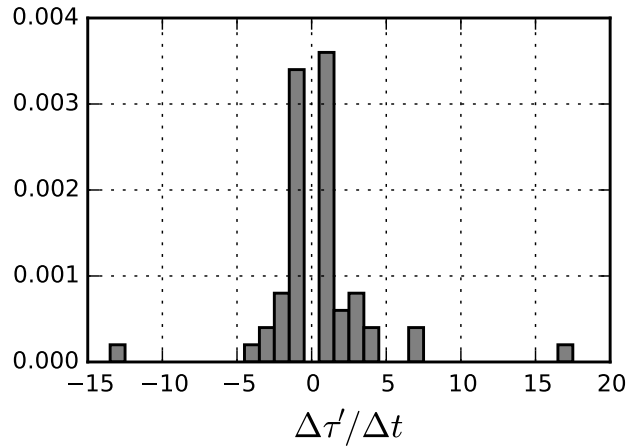


Рис. 2.7. Гистограмма плотности распределения ошибок оценок времён запаздывания. Столбец, соответствующий точной оценке (ошибка равна 0), вырезан, поскольку его высота слишком велика для наглядного представления других столбцов.

2. ошибки, возникающие при численном расчёте производной;
3. ошибки, обусловленные конечностью точности расчётов;
4. ошибки, вызванные неточностью метода при конечном N .

Чтобы показать, что метод действительно является асимптотически точным, необходимо понять, как ведут себя все типы ошибок при $N \rightarrow \infty$. В натурном эксперименте при наличии шумов измерений основной вклад дают ошибки первых двух типов, их вклад в целевую функцию (2.7) пропорционален N . В численном моделировании ошибкой первого типа можно пренебречь, если числа записаны с максимальной (родной) точностью, так как она заведомо не превышает погрешностей, возникающих при расчётах (тип 3).

Ошибкой второго типа можно пренебречь при стремлении шага выборки к нулю $\Delta t \rightarrow 0$. Однако на практике даже в численном эксперименте это невозможно, поэтому при исследовании асимптотических свойств метода мы дополнительно записали временные ряды производных для всех элементов ансамбля и использовали их вместо рядов производных, оцененных численно. Влияние, которое численная оценка производной оказывает на точность восстановления

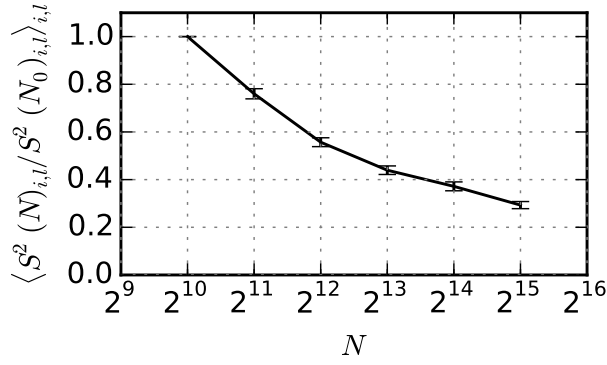


Рис. 2.8. Усреднённая по всем 16 осцилляторам и по всем 20 ансамблям нормированная зависимость значения целевой функции (2.7) и его стандартного отклонения от длины временного ряда N .

коэффициентов, очень невелико, но становится заметна при $N > 2^{13}$.

Ошибки, обусловленные конечностью точности расчётов, можно оценить теоретически, но это довольно сложно, так как используемые алгоритмы, реализованные в популярных библиотеках вроде `Lapack` или `numpy` имеют множество оптимизаций по точности. В любом случае, из-за матричных операций они имеют порядок не менее $N^{3/2}$. Оценить эти ошибки можно, если использовать различную точность расчётов. К сожалению, в настоящее время все основные библиотеки методов ограничиваются одинарной (32 бита) и двойной (64 бита) точностями при операциях с плавающей запятой. Численный эксперимент показал, что при одинарной точности даже при $N = 2^{10}$ ошибка точности расчётов вносит заметный вклад. В то же время при использовании двойной точности надёжно выявить её наличие при длинах ряда до $N = 2^{15}$ включительно не удалось.

Чтобы показать асимптотическую сходимость метода, была проведена реконструкция 20 ансамблей из 16 осцилляторов по хаотическим временным рядам различной длины: от $N = 2^{10}$ (данная длина как минимальная была обозначена N_0) до $N = 2^{15}$. Поскольку из-за различий во временах запаздывания и коэффициентах связи итоговые значения целевой функции $S_{i,l}^2$ (i соответству-

ет номеру осциллятора, l — номеру ансамбля) сильно варьировали, они были отнормированы на значение, соответствующее минимальной рассмотренной длине ряда $S_{i,l}^2(N_0)$, а затем усреднены по всем осцилляторам во всех ансамблях (см. 2.8).

Видно, что значение целевой функции уменьшается с ростом длины ряда N , что подтверждает гипотезу об асимптотической сходимости метода, при этом ошибки оценки среднего невелики и интервалы даже между соседними значениями N не пересекаются. Следует отметить, что при выбранном способе нормировки для $N = N_0$ разброс будет нулевым по определению. В то же время, падение, которое должно быть линейным по нашей гипотезе, не является таковым и замедляется при больших N , что может быть обусловлено конечностью точности расчётов.

2.5. Модернизированный подход

2.5.1. Описание модернизированного метода

Отметим два важных недостатка описанного в разделах 2.3.1 и 2.3.2 подхода, препятствующих его практическому применению. Во-первых, уравнения для отдельных узлов либо слишком просты (2.1), слишком специфичны и должны быть известны априорно. Во-вторых, функции связи предполагаются линейными, как в рассмотренной в главе о системах с запаздыванием модели (1.1) или известными заранее, как ранее в данной главе. Далее рассматривается задача о реконструкции ансамбля вида (2.23), являющегося обобщением (2.1) и (2.18) и содержащего произвольные непрерывные нелинейные собственные функции $f_i(x)$ для каждого узла и сигмоидные функции связи с параметрами $g_{i,j}$ (масштабный коэффициент) и $\zeta_{i,j}$ (сдвиг), входящие в уравнения (2.23) нелинейно.

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \operatorname{th} (g_{i,j}(x_j(t - \tau_{i,j}) - \zeta_{i,j})). \quad (2.23)$$

Обозначим максимальное из $\theta_{i,j}$ для данного i как θ_i и выразим нелинейную функцию $f_i(x)$ из (2.23) $\forall n = \theta_i + 1, \dots, N$:

$$f_i(x_i) = \dot{x}_i - \sum_{i=1, i \neq j}^D k_{i,j} \operatorname{th} (g_{i,j}(x_j(t - \tau_{i,j}) - \zeta_{i,j})). \quad (2.24)$$

Поскольку функция f_i по определению непрерывна, близким значениям x_i с номерами n и p_n в отсортированном ряде соответствуют близкие же значения функции $f_i(x(n))$ и $f_i(x(p_n))$ соответственно. Теперь разницу между ними обозначим как $\delta_i(n)$:

$$\delta_i(n) = f_i(x(n)) - f_i(x(p_n)) = \Delta \dot{x}_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D \Delta h_{i,j}(n - \theta_{i,j}), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_i(n) &= \dot{x}_i(n) - \dot{x}_i(p_n), \\ \Delta h_{i,j}(n) &= k_{i,j} \operatorname{th} (g_{i,j}x_j(n - \theta_{i,j}) - \zeta_{i,j}) \\ &\quad - k_{i,j} \operatorname{th} (g_{i,j}x_j(p_n - \theta_{i,j}) - \zeta_{i,j}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Аналогично рассмотренным ранее уравнениям, в частности, (2.14), величина $\delta_i(n)$ в уравнении (2.25) будет обращаться в 0 в пределе $N \rightarrow \infty$ только если будут верно выбраны все параметры $g_{i,j}$, $\zeta_{i,j}$ и $k_{i,j}$ в уравнении 2.26. Поэтому по прежнему сумму $\delta_i(n)$ можно рассматривать как целевую функцию S_i^2 , являющуюся функцией всех $g_{i,j}$, $\zeta_{i,j}$ и $k_{i,j}$:

$$S(k_{i,1}, \dots, k_{i,D}, g_{i,1}, \dots, g_{i,D}, \zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,D}) = \sum_{j=1, j \neq i}^D \delta_i(n). \quad (2.27)$$

Минимизация (2.27) даёт возможность вычислить значения $g_{i,j}$, $\zeta_{i,j}$ и $k_{i,j}$, после чего функции f_i определяются таблично из формулы (2.24). Минимизацию необходимо проводить одним из существующих специализированных подходов, например, методом Левенберга–Марквардта [125; 126] или методом отображения доверительных областей [127], в численном эксперименте были успешно опробованы оба подхода.

2.5.2. Тестирование модернизированного метода

В численном эксперименте рассматривались ансамбли с кубической функцией нелинейности вида (2.28), временной ряд первого осциллятора приведён на рис. 2.9(a).

$$f_i(x) = \gamma_i x + \alpha_i x^3. \quad (2.28)$$

Параметры $\zeta_{i,j}$, γ_i , $g_{i,j}$ и α_i получались как случайные числа из равномерного распределения на отрезках $[-1; 1]$, $[0.5; 1.5]$, $[0.5; 1.5]$ и $[0; 1]$ соответственно, значения $k_{i,j}$ — из нормального распределения с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением $6/\sqrt{D}$. Уравнения решались методом Рунге-Кутты 4-го порядка с адаптивным шагом и интервалом выборки $\Delta t = 0.05$. Результаты реконструкции нелинейной функции первого осциллятора и одной из его функций связи приведены на рис. 2.9(b) и рис. 2.9(c) соответственно.

В реальных сетях как естественного, так и искусственного происхождения далеко не все узлы связаны между собою. В главе 1 были предложены алгоритмы выявления и удаления незначимых (лишних) связей, основанные на кластеризации коэффициентов ансамбля методом K -средних. Эта процедура оказалась хорошо работоспособна и для предлагаемого обобщённого алгоритма. На рис. 2.9(d) приведена архитектура связей в ансамбле: все связи восстановились верно. Всего было рассмотрено 14 ансамблей, из них в 7 случаях архитектура была восстановлена без ошибок, в 4 случаях имелась 1 лишняя связь, в остальных 3 случаях имелись как лишние, так и пропущенные связи.

Поскольку в реальности значения времён запаздывания неизвестны или могут быть определены лишь примерно, предлагаемую методику можно модифицировать следующим образом. Вместо истинных $\theta_{i,j}$ используются некоторые догадки $\theta'_{i,j}$ и вся описанная процедура проводится для них при фиксированном i . Поскольку $\theta_{i,j}$ суть по определению целые числа, реконструкция проводится дополнительно $2(D - 1)$ раз для наборов значений $\theta'_{i,j}$ таких, что в каждом наборе только одно $\theta'_{i,j}$ отличается от исходных догадок на 1 в плюс

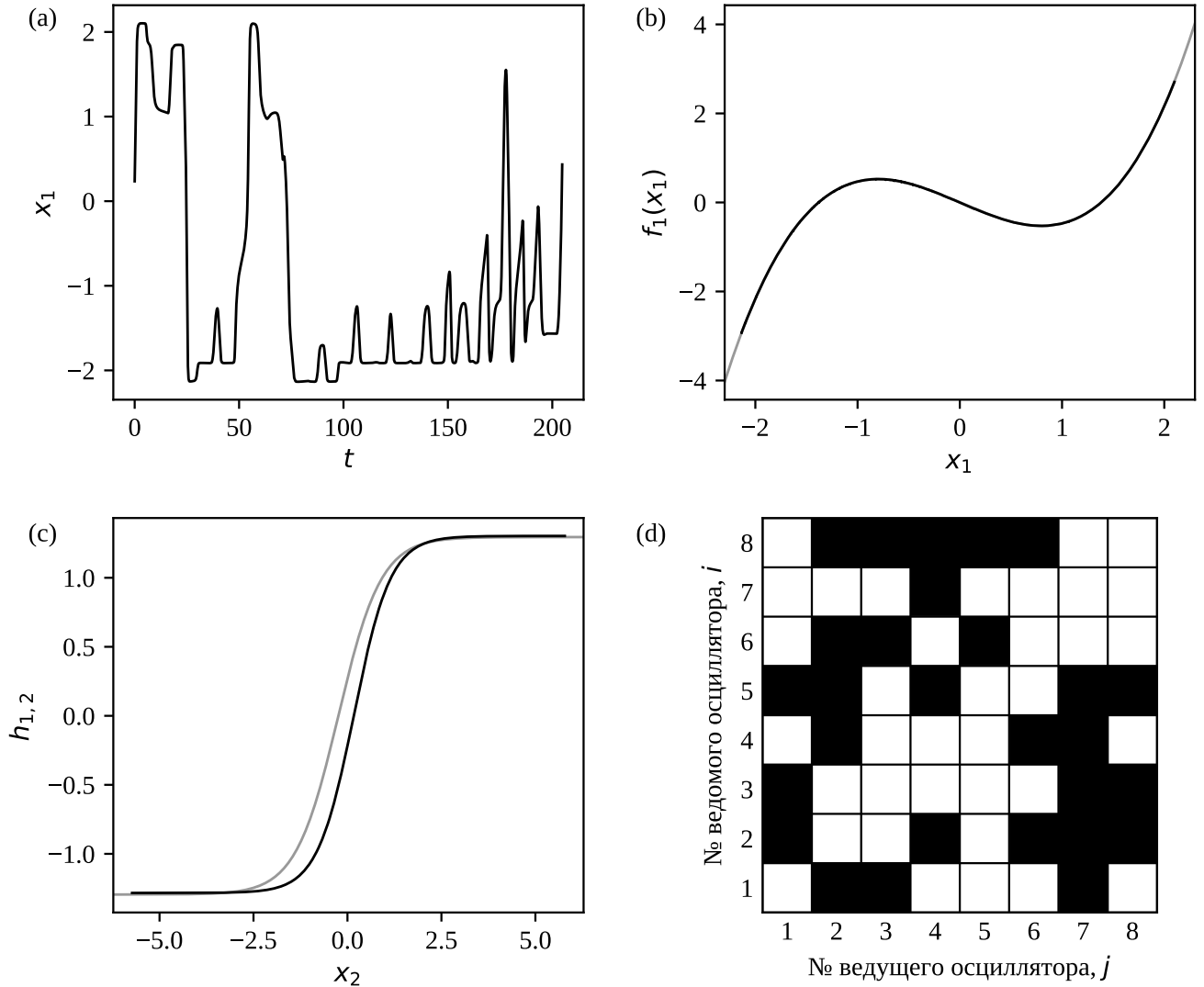


Рис. 2.9. Временной ряд колебаний первого осциллятора ансамбля (2.23) из 8 узлов — (а), восстановленная (серым жирным) и исходная (чёрным) нелинейная функция этого осциллятора — (b), восстановленная (серым) и исходная функция связи, соответствующая воздействию второго осциллятора на первый — (c), схема архитектуры связей — (d), где чёрными квадратами показаны реально существующие связи, а белыми — отсутствующие.

или минус (исходный набор в таком случае можно считать «центральным»). Затем выбирается такой набор $\{\theta'_{i,j}\}_{j=1,j \neq i}^D$, для которого целевая функция (2.27) минимальна. Если это исходный набор, работа прекращается и полученные значения объявляются оценками времён запаздывания. Если же минимум соответствует какому-либо смещённому набору $\{\theta'_{i,j}\}_{j=1,j \neq i}^D$, то теперь он выбирается в качестве центрального (догадки) и процедура повторяется уже вокруг него. Такой подход можно рассматривать как адаптацию метода градиентного спуска к дискретному случаю.

Предложенный алгоритм оказывается достаточно эффективен, если исходные догадки лежат вблизи истинных значений, например, отличаются от них на 5% по абсолютной величине. При больших ошибках в исходных догадках для $\theta_{i,j}$ часть времён запаздывания может определяться с погрешностями, поскольку алгоритм сходится к локальному, а не глобальному минимуму функции (2.27). Гораздо более скромная сходимость модифицированного подхода по сравнению с исходным вызвана, по-видимому, использованием нелинейного МНК. Исправить такие ошибки можно, сканируя область догадок с некоторым шагом, либо разрешив смещение по догадкам сразу на 2 шага по $\theta'_{i,j}$. Оба подхода существенно увеличивают вычислительные затраты, но могут быть эффективно распараллелены.

2.6. Метод реконструкции ансамблей осцилляторов второго порядка

Часто методы, ориентированные на реконструкцию сетей колебательных элементов фокусируются именно на архитектуре связей, в то время как уравнения, описывающие индивидуальные элементы выбираются по принципу «чем проще, тем лучше». Например, в работе [128] рассматриваются только авторегрессионные модели первого порядка, а в работе [99] осцилляторы Курамото. Хорошо известные методы реконструкции связей: причинность по Грейнджеру

[1] и частная направленная когерентность [8] также базируются на линейных регрессионных моделях, хотя ряд нелинейных обобщений также имеется [2; 7; 129]. В качестве исключения можно отметить работу [24], в которой рассматривается задача реконструкции сетей осцилляторов Рёсслера и Лоренца, а предложенный подход может быть обобщён на другие системы, если их уравнения известны априорно.

Основная проблем в том, что использование слишком простых моделей снижает практическую применимость предлагаемых методов, поскольку в большинстве задач радиосвязи, климатологии и биологии, для которых развиваемые методы были бы полезны, индивидуальные узлы представляют собою довольно сложные объекты, способные демонстрировать нетривиальное поведение.

Далее предложенный выше подход к реконструкции нейроосцилляторов вида (2.1) модифицируется для реконструкции ансамблей обобщённых осцилляторов ван дер Поля [119] с неизвестной нелинейной функцией. По сравнению с более прямолинейными подходами вроде предложенного в [130], где нелинейные функции каждого узла должны быть непосредственно параметризованы, наш метод уменьшает необходимую параметризацию и таким образом повышает грубость метода. Однако параметризация не устраняет полностью: она используется для реконструкции функций связи и функций диссипации.

Интерес к реконструкции именно таких ансамблей связан с тем, что осциллятор ван дер Поля представляет собою одну из базовых моделей теории колебаний, имеющую множество приложений. И это простейшая модель, способная демонстрировать автоколебания. Современный обзор, касающийся истории использования уравнения ван дер Поля в науке можно найти в [131]. Обобщённый осциллятор ван дер Поля также популярен вследствие того большого числа систем, которые он может описывать, см., например, [132; 133]. Примеры биологических приложений могут быть найдены в следующих работах: в [134] обобщённый осциллятор ван дер Поля описывает усиление сигнала в слуховой системе дрозофилы; в [135] и [136] генерация электрической активности ней-

ронами и миоцитами описывается сетями обобщённых осцилляторов ван дер Поля; обобщённый осциллятор Бонхёффера–ван дер Поля был реконструирован по экспериментальным сигналам при описании нейрона-пейсмейкера [121]; в [137; 138] осциллятор ван дер Поля использовался для моделирования акустических эффектов в человеческих голосовых связках, в [139] — для моделирования абсансных эпилептических приступов.

2.6.1. Ансамбли связанных осцилляторов с неизвестным потенциалом и известной функцией диссипации

Рассмотрим ансамбль разностно связанных обобщённых осцилляторов ван дер Поля с произвольными нелинейными потенциалами $f_i(x)$:

$$\ddot{x}_i - (r_i - x_i^2) \dot{x}_i + f_i(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j - x_i), \quad (2.29)$$

где i есть номер осциллятора (узла) в ансамбле, r_i есть параметр линейного затухания ($r_i = 0$ соответствует бифуркации Андронова–Хопфа), и D — число узлов.

Пусть как и ранее доступны скалярные временные ряды $\{x_i(t_n)\}_{n=1}^N$ длины N всех D осцилляторов, измеренные с шагом выборки Δt . По-прежнему для простоты обозначим $x_i(n) = x_i(t_n)$.

Следуя идее, предложенной выше, введём сортирующее отображение $Q_i(n)$, сопоставляющее номеру n значения $x_i(n)$ в исходном ряде его новый номер в отсортированном. Поскольку задача сортировки — найти временной вектор $\mathbf{x}(p_n) = (x_1(p_n), x_2(p_n), \dots, x_D(p_n))$, для которого i -тая компонента ближайшая к i -той компоненте данного и при этом гарантировать, что такой вектор будет использован для разных n лишь однажды, то неважно, будет ли проводиться сортировка по возрастанию или убыванию и каким методом. Если проводить поиск ближайших соседей иными методами, дополнительные усилия по удалению избыточных соседей могут потребоваться, как в [140]. Сортировка

производится независимо при реконструкции каждого узла, при этом векторы $\mathbf{x}(n)$ остаются неизменными. Обратное отображение обозначим как Q_i^{-1} , так что $Q_i^{-1}(Q_i(n)) = n$.

Далее рассмотрим два последовательных вектора в отсортированном ряде с номерами $Q_i(n)$ и $Q_i(n) - 1$, имеющие номера n и $p_n = Q_i(Q_i(n) - 1)$ в исходном. Как и ранее, при условии конечности дисперсии сигнала расстояние между значениями $x_i(n)$ и $x_i(p_n)$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Также будем считать функции f_i непрерывными или имеющими только небольшое по сравнению с N число разрывов первого рода. При таком условии близким значениям x_i будут соответствовать близкие значения f_i , поэтому величины $f_i(x_i(n))$ и $f_i(x_i(p_n))$ окажутся близки. Разницу между ними обозначим как $\delta_i(n)$:

$$\delta_i(n) = f_i(x_i(n)) - f_i(x_i(p_n)). \quad (2.30)$$

Выразим f_i из (2.29) и подставим в (2.30), что приведёт к следующим уравнениям:

$$f_i(x_i) = -\ddot{x}_i + (r_i - x_i^2) \dot{x}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j - x_i) \quad (2.31)$$

$$\Delta x_i(n) = x_i(n) - x_i(p_n) \quad (2.32)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(n) - \dot{x}_i(p_n) \quad (2.33)$$

$$\Delta \ddot{x}_i(n) = \ddot{x}_i(n) - \ddot{x}_i(p_n) \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \delta_i(n) = & -\Delta \ddot{x}_i(n) - (\dot{x}_i(n)x_i^2(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i^2(p_n)) + \\ & r_i \Delta \dot{x}_i(n) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Рассмотрим сумму квадратов всех $\delta_i(n)$ для данного i как функцию параметров связи $\mathbf{k}_i = (k_{i,1}, k_{i,2}, \dots, k_{i,D})$ и диссипации r_i :

$$S_i^2(r_i, \mathbf{k}_i) = \sum_{n=1}^N \delta_i^2(n), \quad (2.36)$$

где $Q_i(n) \neq 1$, поскольку для данной точки в отсортированном ряду нет предыдущей. Данный подход в некотором смысле аналогичен предложенным в [23] для систем с запаздыванием и в [141] для реконструкции нейронных сетей, но с использованием другого формализма.

Все слагаемые в сумме (2.36) принадлежат к одному из двух типов: два первых члена для каждого $\delta_i(n)$ суть константы, следующие D членов суть линейные комбинации известных величин с неизвестными коэффициентами перед ними (r_i и коэффициенты связи $k_{i,j}$, принимая во внимание, что $i \neq j$). Поскольку значение S_i^2 должно быть очень мало, можно приближённо свести задачу реконструкции к задаче минимизации целевой функции (2.36). Эта задача может быть решена как обычная линейная задача на наименьшие квадраты, то есть задача аппроксимации значений (2.37) линейной комбинацией величин $\Delta\dot{x}_i(n)$ и $(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n))$, которые можно рассматривать как значения базисных функций.

$$\beta_i(n) = \Delta\ddot{x}_i(n) + (\dot{x}_i(n)x_i^2(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i^2(p_n)) \quad (2.37)$$

Как уже говорилось, легко видеть, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_i(n) = 0$. Однако ни базисные функции $\Delta\dot{x}_i(n)$ и $(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n))$, ни величины $\beta_i(n)$ не стремятся к 0 с $N \rightarrow \infty$, поскольку близость значений x_i в отсортированном ряду не ведёт автоматически к близости x_j или производных \dot{x}_i , разве что только при условии обобщённой синхронизации.

Ранее отмечалось, что запаздывание в индивидуальной динамике [92] или в связях [142] может служить причиной успеха подобного подхода, основанного на сортировке значений. В действительности, это утверждение не совсем корректно, хотя запаздывания, безусловно, полезны, внося дополнительное согласование и увеличивая объём информации о системе.

Итак, можно оценить параметры диссипации r_i и коэффициенты связи $k_{i,j}$, минимизируя целевую функцию S_i^2 отдельно для каждого осциллятора в ансамбле. Затем функции f_i могут быть рассчитаны по формуле (2.31).

2.6.2. Ансамбли осцилляторов ван дер Поля, связанных линейно по координате и скорости

Рассмотрим первое обобщение системы (2.29), введя дополнительный член связи $(\dot{x}_j - \dot{x}_i)$:

$$\ddot{x}_i - (r_i - x_i^2) \dot{x}_i + f_i(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j - x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k'_{i,j} (\dot{x}_j - \dot{x}_i). \quad (2.38)$$

Производные \dot{x}_i имеют физический смысл скоростей в механике или токов в электродинамике, если x_i суть координаты или заряды соответственно; в нейронауке они также могут иметь другой, менее очевидный смысл.

Чтобы решить задачу реконструкции в присутствии дополнительных связей, переформулируем (2.35) введением дополнительного члена:

$$\begin{aligned} \delta_i(n) = & -\Delta \ddot{x}_i(n) - (\dot{x}_i(n)x_i^2(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i^2(p_n)) \\ & + r_i \Delta \dot{x}_i(n) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) \\ & + \sum_{j=1, j \neq i}^D k'_{i,j} (\Delta \dot{x}_j(n) - \Delta \dot{x}_i(n)) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Теперь реконструкция сводится к минимизации целевой функции (2.36) как и в ранее рассмотренном случае.

2.6.3. Ансамбли осцилляторов ван дер Поля с неизвестным потенциалом и неизвестной функцией диссипации

Рассмотрим другое обобщение модели (2.29), где функция диссипации $g_i(x)$ неизвестна:

$$\ddot{x}_i + g_i(x_i) \dot{x}_i + f_i(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j - x_i). \quad (2.40)$$

Метод можно обобщить на данный случай, если предложить некоторую подходящую аппроксимацию для $g_i(x)$. Простейший вариант — это либо разложе-

ние по базису, например, полиномиальному или тригонометрическому, либо использование локально-линейных моделей. В некоторых случаях радиальные и цилиндрические базисные функции могут также быть рассмотрены, поскольку по сути являются комбинацией этих двух подходов. Существует также альтернативный подход, предложенный в [143] и декларируемый авторами как непараметрический.

Если рассмотреть полиномиальное разложение $g_i(x)$ в форме (2.41) порядка P , тогда $\delta_i(n)$ могут быть переписаны как (2.42).

$$g_i(x) = \sum_{\nu=0}^{P_g} \rho_{i,\nu} x_i^\nu, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \delta_i(n) = & -\Delta \ddot{x}_i(n) - \sum_{\nu=0}^{P_g} \rho_{i,\nu} (\dot{x}_i(n) x_i^\nu(n) - \dot{x}_i(p_n) x_i^\nu(p_n)) + \\ & \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) \end{aligned} \quad (2.42)$$

В таком случае задача на наименьшие квадраты переформулируется следующим образом: $\Delta \ddot{x}_i(n)$ суть аппроксимируемые величины вместо $\beta_i(n)$, а общее число базисных функций в (2.36) увеличивается до $(D + P)$.

Если выбрать локально линейную аппроксимацию g_i , весь интервал измеренных значений x_i должен быть разделён на L бинов, далее обозначаемых как $[x_i]_l$, где $l = 1, 2, \dots, L$. Границы этих бинов могут быть найдены либо из соображений их одинаковой длины, либо из соображений одинакового числа точек в исходных данных, в них попавших. Последнее легко сделать в том числе потому, что уже имеется отсортированный ряд. Тогда $g_i(x)$ может быть представлено

как (2.43), что ведёт к формуле (2.45) для $\delta_i(n)$.

$$g_i(x) = \sum_{l=1}^L g_{i,l}(x), \quad (2.43)$$

$$g_{i,l}(x) = \begin{cases} \kappa_{i,l}x + \chi_{i,l}, & \text{if } x \in [x_i]_l, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \delta_i(n) = & -\Delta\ddot{x}_i(n) - \kappa_{i,l}(\dot{x}_i(n)x_i(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i(p_n)) - \chi_{i,l}\Delta\dot{x}_i(n) + \\ & \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Полиномы могут плохо вести себя (сильно осциллировать) на концах диапазона. В таком случае локально-линейная аппроксимация предпочтительна. Но для получения достаточно гладкой аппроксимации необходимо использовать достаточно большое число бинов, поэтому число коэффициентов в типичном случае будет значительно больше.

2.6.4. Ансамбли осцилляторов ван дер Поля с диссипацией высших порядков

Метод можно адаптировать для некоторых очень важных обобщений осциллятора ван дер Поля: осциллятора Рэля [120] и осциллятора Бонхёффера–ван дер Поля, который также известен как модель нейрона ФитцХью–Нагумо [122; 123]. Последнее наиболее интересно в приложении к нейрофизиологии.

Итак, рассмотрим следующее обобщение системы (2.38):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + g_i(x_i)\dot{x}_i + g'_i(x_i)\dot{x}_i^3 + g''_i(x_i)\dot{x}_i^5 + f_i(x_i) \\ = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(x_j - x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k'_{i,j}(\dot{x}_j - \dot{x}_i). \end{aligned} \quad (2.46)$$

В принципе, можно неограниченно увеличивать число диссипативных слагаемых сверх кубического члена по \dot{x}_i без потери общности, но это приведёт к неограниченному росту числа коэффициентов, делая процедуру реконструкции

всё менее надёжно. Система (2.46) уже включает в себя связанные осцилляторы Рэлея, а связанные системы ФитцХью–Нагумо могут быть переписаны к такому виду путём линейной замены переменных, поэтому было решено ограничиться данным видом.

Все функции $g_i(x)$, $g'_i(x)$ и $g''_i(x)$ приходится аппроксимировать явно. Далее рассматривается кусочно-линейная аппроксимация, аналогичная (2.43, 2.44). При такой аппроксимации формула для $\delta_i(n)$ переписывается к виду:

$$\begin{aligned}
\delta_i(n) = & -\Delta\ddot{x}_i(n) - \kappa_{i,l}(\dot{x}_i(n)x_i(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i(p_n)) - \chi_{i,l}\Delta\dot{x}_i(n) \\
& - \kappa'_{i,l}(\dot{x}_i^3(n)x_i(n) - \dot{x}_i^3(p_n)x_i(p_n)) - \chi'_{i,l}(\dot{x}_i^3(n) - \dot{x}_i^3(p_n)) \\
& - \kappa''_{i,l}(\dot{x}_i^5(n)x_i(n) - \dot{x}_i^5(p_n)x_i(p_n)) - \chi''_{i,l}(\dot{x}_i^5(n) - \dot{x}_i^5(p_n)) \\
& + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j}(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) \\
& + \sum_{j=1, j \neq i}^D k'_{i,j}(\Delta \dot{x}_j(n) - \Delta \dot{x}_i(n)).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Получившийся алгоритм требует оценки $D \cdot (6 \cdot L + 2 \cdot (D - 1))$ коэффициентов.

2.6.5. Ансамбли осцилляторов ван дер Поля с неизвестными функциями связи

Рассмотрим теперь случай, когда связь вводится нелинейно, а функция связи $h(x_j - x_i)$ неизвестна. В противоположность работе [140] рассмотрим возможность различных функций связи для разных осцилляторов. Тогда уравнения (2.29) переписываются как (2.48):

$$\ddot{x}_i - (r_i - x_i^2)\dot{x}_i + f_i(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^D h_{i,j}(x_j - x_i), \tag{2.48}$$

Каждая функция связи $h_{i,j}$ может быть разложена в ряд. Локально линейная аппроксимация не подходит для данной задачи, так как $(D - 1)$ разностей $(x_j - x_i)$ должны быть отсортированы по-разному и придётся ввести для них различные бины, что вызовет очень большую сегментацию данных. Фактически,

это аналогично введению бинов в $(D - 1)$ -мерном пространстве. Поэтому ограничимся рассмотрением только полиномиального разложения в форме (2.49).

$$h_{i,j}(x) = \sum_{\nu=1}^{P_h} \gamma_{i,j,\nu} x^\nu \quad (2.49)$$

Постоянный член в разложении (2.49) удалим из рассмотрения, поскольку он входит во все $h_{i,j}$ для данного i (иначе мы столкнёмся с проблемой линейной зависимости столбцов матрицы при решении задачи на наименьшие квадраты). Более того, предлагаемый подход не способен определить линейный сдвиг функции связи, поскольку для всех $x_i(n)$ и $x_i(p_n)$ эта константа будет одинакова и взаимно уничтожится при расчёте $\delta_i(n)$.

Рассматривая функцию диссипации исходного осциллятора (2.48) и полиномиальную аппроксимацию для g_i , формула для $\delta_i(n)$ может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_i(n) = & -\Delta \ddot{x}_i(n) + (\dot{x}_i(n)x_i^2(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i^2(p_n)) + r_i \Delta \dot{x}_i(n) + \\ & \sum_{j=1, j \neq i}^D \sum_{\nu=1}^{P_h} \gamma_{i,j,\nu} \left((x_j(n) - x_i(n))^\nu - (x_j(p_n) - x_i(p_n))^\nu \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Далее рассмотрим также более общий случай, когда как потенциальная функция $f_i(x)$, функция диссипации $g_i(x)$, так и функции связи $h_{i,j}(x)$ неизвестны. В таком случае уравнения ансамбля переписываются как (2.51):

$$\ddot{x}_i + g_i(x)\dot{x}_i + f_i(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^D h_{i,j}(x_j - x_i). \quad (2.51)$$

Используя полиномиальное разложение функции диссипации (2.42) и полиномиальное разложение функций связи (2.49) разницы $\delta_i(n)$ переписываются как:

$$\begin{aligned} \delta_i(n) = & -\Delta \ddot{x}_i(n) + \sum_{\nu=0}^{P_g} \rho_{i,\nu} (\dot{x}_i(n)x_i^\nu(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i^\nu(p_n)) + \\ & \sum_{j=1, j \neq i}^D \sum_{\nu=1}^{P_h} \gamma_{i,j,\nu} \left((x_j(n) - x_i(n))^\nu - (x_j(p_n) - x_i(p_n))^\nu \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Таким образом, задача сводится к задаче на наименьшие квадраты для $(P_h(D - 1) + P_g + 1)$ неизвестных коэффициентов.

Используя локально линейную аппроксимацию для функции диссипации (2.43), разности $\delta_i(n)$ переписываются следующим образом:

$$\delta_i(n) = -\Delta\ddot{x}_i(n) + \kappa_{i,l}(\dot{x}_i(n)x_i(n) - \dot{x}_i(p_n)x_i(p_n)) + \chi_{i,l}\Delta\dot{x}_i(n) + \sum_{j=1, j \neq i}^D \sum_{\nu=1}^{P_h} \gamma_{i,j,\nu} \left((x_j(n) - x_i(n))^\nu - (x_j(p_n) - x_i(p_n))^\nu \right), \quad (2.53)$$

где l определяется формулой (2.44). Так, задача сводится к задаче на наименьшие квадраты с $(P_h(D - 1) + 2L)$ неизвестными коэффициентами.

2.7. Апробация метода реконструкции ансамблей

обобщённых осцилляторов ван дер Поля в численном эксперименте

Чтобы протестировать предлагаемый подход, были проведены численные эксперименты с ансамблями всех рассмотренных в предыдущем разделе обобщений осциллятора ван дер Поля для различного числа элементов в ансамбле.

2.7.1. Реконструкция ансамблей с известной функцией диссипации и линейными связями

Для ансамблей осцилляторов вида (2.29) матрицы связей генерировались для различного числа элементов D от 4 до 64. Рассматривались основном ансамбли, демонстрировавшие хаотическое поведение. Среди демонстрировавших периодические колебания рассматривались ансамбли, временные ряды которых имели много экстремумов на периоде. В качестве потенциальных функций f_i были выбраны функции осциллятора Тоды (2.54).

$$f_i(x) = \omega_i^2(1 - e^{-x}), \quad (2.54)$$

где ω_i суть частоты малых почти гармонических колебаний, сгенерированные случайно из равномерного распределения на интервале $[0.4; 1.46]$, а параметры r_i генерировались из равномерного распределения на интервале $[0.1; 1.1]$. Поскольку такая потенциальная функция не может быть представлена точно конечным полиномом, предлагаемая методика непараметрической реконструкции нелинейной функции имеет дополнительный смысл. Интересно, что осциллятор ван дер Поля с таким потенциалом рассматривался в работе [144] в качестве модели лазера.

Коэффициенты связи $k_{i,j}$ генерировались из равномерного распределения на интервале с нулевой нижней границей и среднеквадратичным отклонением J/\sqrt{D} , где $J = 0.5$ в большинстве рассмотренных случаев.

Уравнения решались с использованием обычного адаптивного метода Рунге–Кутты 4-го порядка с интервалом выборки $\Delta t = 0.01$ со случайно заданных в окрестности аттрактора начальных условий. Переходной процесс длины $N_{trans} = 2^{15}\Delta t$ пропускался. От всех элементов ансамбля записывались временные ряды координаты x_i длины $N = 2^{14}$ значений. Временной ряд одного из осцилляторов ансамбля из $D = 16$ штук показан на рис. 2.10(а).

Ко временным рядам применялась процедура реконструкции, описанная в разделе 2.6.1. Поскольку метод должен быть чувствителен к шуму из-за численной оценки первой и второй производных, рассматривались также временные ряды с добавлением нормального несмещённого белого шума. Производные оценивались с использованием фильтра Савицки–Голэя [68] второго порядка с различным числом точек данных m в скользящем временном окне. Поскольку низкое временное разрешение — хорошо известный источник ложной причинности [14], мы рассматривали временные ряды, имевшие не менее 60 отсчётов на характерном периоде.

Чтобы оценить качество реконструкции отдельных узлов, реконструированные нелинейные функции сравнивались с исходными (сгенерированными), см. рис. 2.10(б) в обоих случаях, как при отсутствии измерительного шума, так

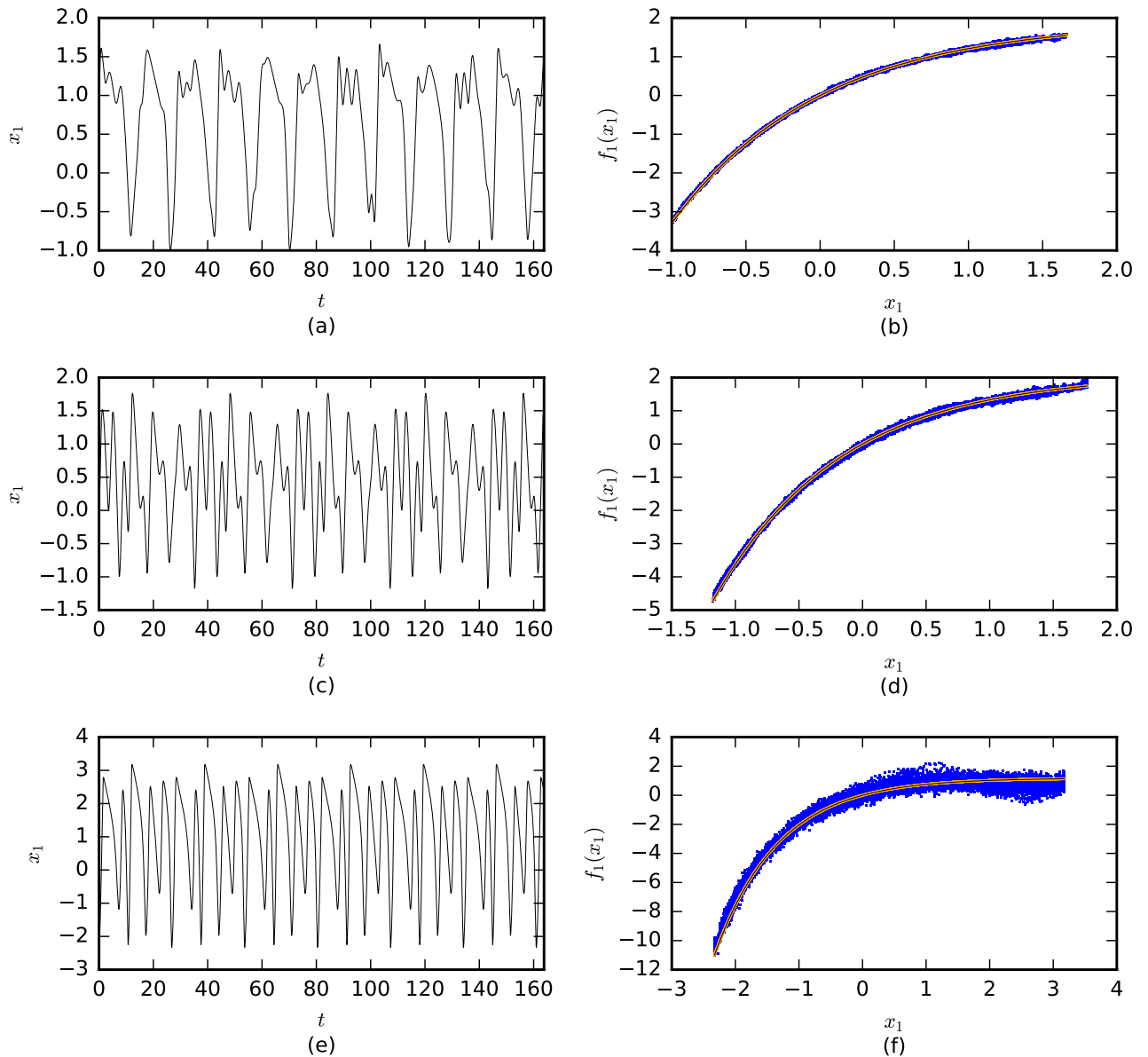


Рис. 2.10. Части (а, с, е) — временные ряды осциллятора №1 из ансамбля в $D = 16$ элементов; (b, d, f) — потенциал первого осциллятора f_1 , чёрным — оригинальная функция, оранжевым — реконструированная в отсутствие измерительного шума (специально изображена толще), синим — при наличии нормального измерительного шума с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением 0.002. Части (а, с) соответствуют ансамблю (2.29) в хаотическом режиме, части (b, d) — ансамблю (2.38) с дополнительными связями по производной, панели (е, f) — периодическим режимам в ансамбле (2.29)

и при его добавлении к рядам. Из рисунка видно, что наблюдается хорошее соответствие реконструированных функций исходным.

Чтобы оценить качество реконструкции коэффициентов связи, оценивалось распределение относительных ошибок оценки коэффициентов связей $\Delta\tilde{k}_{i,j} = 1 - \tilde{k}_{i,j}/k_{i,j}$, где $\tilde{k}_{i,j}$ суть значения, полученные предложенным методом, а $k_{i,j}$ суть исходные значения. Это распределение построено для всего ансамбля (240 коэффициентов) на рис. 2.11(a) и рис. 2.11(b) для чистых и зашумлённых рядов. Значения $\Delta\tilde{k}_{i,j} = \pm 1$ соответствуют 100%-ной ошибке при оценке величин коэффициентов. Можно видеть, что для «чистых» временных рядов ошибки оценки коэффициентов связи очень малы. Для зашумлённых рядов они значительно выше, но тем не менее, для более чем 90% коэффициентов ошибки реконструкции не превышают 10%.

Чтобы понять, как ошибка оценки коэффициентов связи и параметров диссипации ведёт себя в зависимости от числа узлов в сети, реконструкция проводилась для различного числа осцилляторов в ансамбле: $D = 8, 12, 16, 32, 48$ и 64. По четыре различных ансамбля с различными матрицами связей и разными параметрами r_i и ω_i были реконструированы для каждого D . Средняя относительная ошибка для r_i и $k_{i,j}$ была рассчитана по формулам (2.55) и (2.56) соответственно.

$$r_{\text{err}} = \left\langle \left| \frac{r_i - \tilde{r}_i}{r_i} \right| \right\rangle_{i=1,\dots,D}, \quad (2.55)$$

$$k_{\text{err}} = \left\langle \left| \frac{k_{i,j} - \tilde{k}_{i,j}}{k_{i,j}} \right| \right\rangle_{i,j=1,\dots,D, i \neq j}, \quad (2.56)$$

где \tilde{r}_i и $\tilde{k}_{i,j}$ суть оценки. Итоговые средние ошибки r_{err} и k_{err} изображены на рис. 2.11(c) для различных D . Можно видеть, что ошибка k_{err} растёт с увеличением числа элементов в ансамбле. Этот эффект является вполне ожидаемым из-за роста числа коэффициентов, которые нужно оценить для каждого конкретного осциллятора при реконструкции его уравнения. Режим поведения осциллятора в ансамбле также играет важную роль. В среднем, чем выше стар-

ший ляпуновский показатель в системе, тем меньше ошибки в реконструированных значениях коэффициентов связи и параметров диссипации, что мы уже наблюдали при реконструкции нейроосцилляторов, описываемых уравнением (2.1).

При наличии шума наблюдений число m точек для сглаживания, используемых при оценке производных, становится также важно. Причём для различных элементов в ансамбле оптимальное m может существенно различаться. Значение m можно подобрать эмпирически в каждом отдельном случае, принимая во внимание, что лучшие оценки, как правило, соответствуют меньшим значениям целевой функции (2.36).

2.7.2. Реконструкция ансамблей с двумя типами связи

В случае ансамблей с двумя типами связи (2.38) коэффициенты связи $k_{i,j}$ генерировались из равномерного распределения на отрезке с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением J/\sqrt{D} , а коэффициенты $k'_{i,j}$ — из нормального распределения с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением J/\sqrt{D} при $J = 0.3$. Типичные временные ряды колебаний можно видеть на рис. 2.10(с). Измерительный шум со среднеквадратичным отклонением 0.002 и нулевым средним добавлялся к полученным временным рядам.

Реконструированная нелинейная функция изображена на рис. 2.10(d). Ошибки реконструкции нелинейных функций в присутствии шума были больше, чем для ранее рассмотренного случая осцилляторов, связанных только по координатам (2.29). Однако качество реконструкции варьировало от осциллятора к осциллятору в ансамбле и от ансамбля к ансамблю. Как и ранее для каждого $D = 8, 12, 16, 32, 48$ и 64 рассматривались по четыре ансамбля, различавшиеся случайными матрицами связей и параметрами диссипации r_i .

Чтобы охарактеризовать точность восстановления коэффициентов r_i и $k_{i,j}$ в среднем, использовались формулы (2.55) и (2.56). Средняя относительная ошибка реконструкции коэффициентов $k'_{i,j}$ рассчитывалась аналогичным обра-

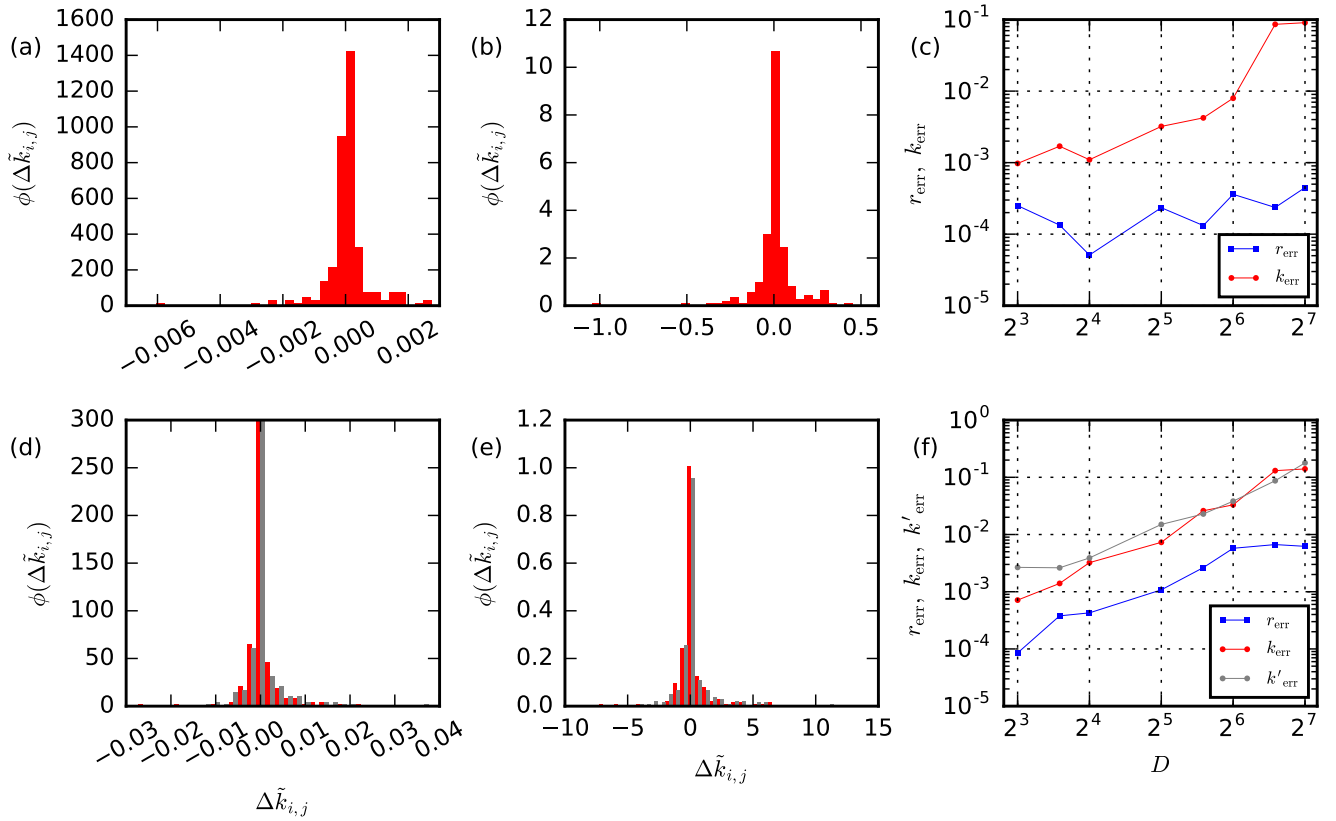


Рис. 2.11. Части (а, d): плотность вероятности распределения относительных ошибок оценок коэффициентов связи в ансамбле из $D = 16$ осцилляторов. Часть (а) соответствует ансамблю (2.29), а (d) — осцилляторам с дополнительными связями по производным (2.38), для которых ошибки в коэффициентах $k_{i,j}$ показаны красным, а ошибки в коэффициентах $k'_{i,j}$ — серым. Части (b, e) — то же, что и (а, d), но при добавлении к ряду измерительного шума со среднеквадратичным отклонением 0.002. Части (с, f) — зависимости средней относительной ошибки оценки коэффициентов связи $\tilde{k}_{i,j}$ и параметров диссипации \tilde{r}_i от числа D осцилляторов в ансамбле. Части (а, b, с) соответствуют случаю связанности только по координате, см. уравнение (2.29), панели (d, e, f) — случаю связи также по первой производной, см. уравнение (2.38).

зом по формуле (2.57).

$$k'_{\text{err}} = \left\langle \left| \frac{k'_{i,j} - \tilde{k}'_{i,j}}{k'_{i,j}} \right| \right\rangle_{i,j=1,\dots,D, i \neq j}. \quad (2.57)$$

Полученные оценки средних ошибок построены на рис. 2.11(f). Распределение ошибок оценки параметров для всех элементов ансамбля из 16 осцилляторов изображено на рис. 2.11(d) в отсутствие измерительного шума и на рис. 2.11(e) в его присутствии. Ошибки для коэффициентов связи через координату $k_{i,j}$ отложены красным, а ошибки для коэффициентов связи через производную $k'_{i,j}$ — серым. В отсутствие шума ошибки пренебрежимо малы, но и при его наличии в более чем 80% случаев коэффициенты восстанавливаются с относительными ошибками, не превышающими 25%.

Интересно, что значимое отличие в точности реконструкции коэффициентов $k_{i,j}$ и $k'_{i,j}$ не удалось обнаружить даже в присутствии шума, но сами эти ошибки для ансамбля типа (2.38) были гораздо больше, чем для ансамбля (2.29). Это может значить, что общее число неизвестных коэффициентов более важно, чем ошибка в оценке первой производной, которая в свою очередь незначительна при наличии ошибки в оценке второй.

Средние ошибки (2.55), (2.56) и (2.57) растут с ростом числа осцилляторов D в ансамбле при сохранении той же длины временного ряда N , см. рис. 2.11(f), что кажется вполне естественным.

2.7.3. Реконструкция ансамблей с неизвестной функцией диссипации и линейными связями

Для иллюстрации эффективности метода в случае неизвестной функции диссипации g_i , в качестве g_i был использован гауссиан (2.58), поскольку такая функция позволяет наблюдать режимы, близкие к режимам в исходном осцилляторе (2.29), но при этом не раскладывается в конечный степенной ряд.

$$g_i(x) = r_i - \mu_i \left(1 - e^{-x^2/\sigma_i^2} \right). \quad (2.58)$$

Шаг выборки Δt , длина временного ряда N и длина переходного процесса N_{trans} были оставлены теми же, что и ранее. Значения r_i также случайно выбирались из равномерного распределения на отрезке $[0.1; 1.1]$. Значения параметра μ_i выбирались как $\mu_i = 1 + r_i$, поскольку это позволяло получить устойчивую генерацию. Значения параметров σ_i случайно задавались из равномерного распределения на отрезке $[0.8; 1.2]$.

Рис. 2.12 показывает результаты реконструкции потенциала f_i и функции диссипации g_i при использовании полиномиальной аппроксимации для g_i (зелёные кривые) и локально линейной аппроксимации (оранжевые кривые). Порядок полинома был выбран равным $P_g = 12$, поскольку при таком значении целевая функция (2.36) достигала минимума. Как правило, обе функции f и g хорошо реконструируемы. Но для некоторых осцилляторов в ансамбле полиномиальная аппроксимация ведёт к заметным сильно осциллирующим хвостам, как это хорошо видно на рис. 2.12(d). Из-за этого колеблется и толщина восстановленной функции потенциала f_6 , хотя следуя предложенному подходу, f_i не раскладывались в ряд, а рассчитывались по формуле (2.31) после того, как были оценены все параметры.

Локально линейная аппроксимация g_i позволяет получить в целом лучшие результаты в сравнении с полиномиальной в ряде случаев: сравни, например, рис. 2.12(c,d) для осциллятора №6. За это приходится платить увеличением числа коэффициентов в модели. В частности, для рассмотренного примера при $L = 64$ бинах общее число коэффициентов в локально линейной модели составляло $D(D - 1) + 2L = 184$. В то же время, полиномиальная аппроксимация требовала только $D(D - 1) + P_g + 1 = 69$ коэффициентов. Значения целевой функции для 5 осцилляторов из 8 в ансамбле при двух рассмотренных способах аппроксимации оказались близки, но для трёх оставшихся, включая №6, значение полученной целевой функции было в 10–20 раз выше для полиномиальной аппроксимации.

Можно думать, что предпочтительный способ аппроксимации g_i сложно

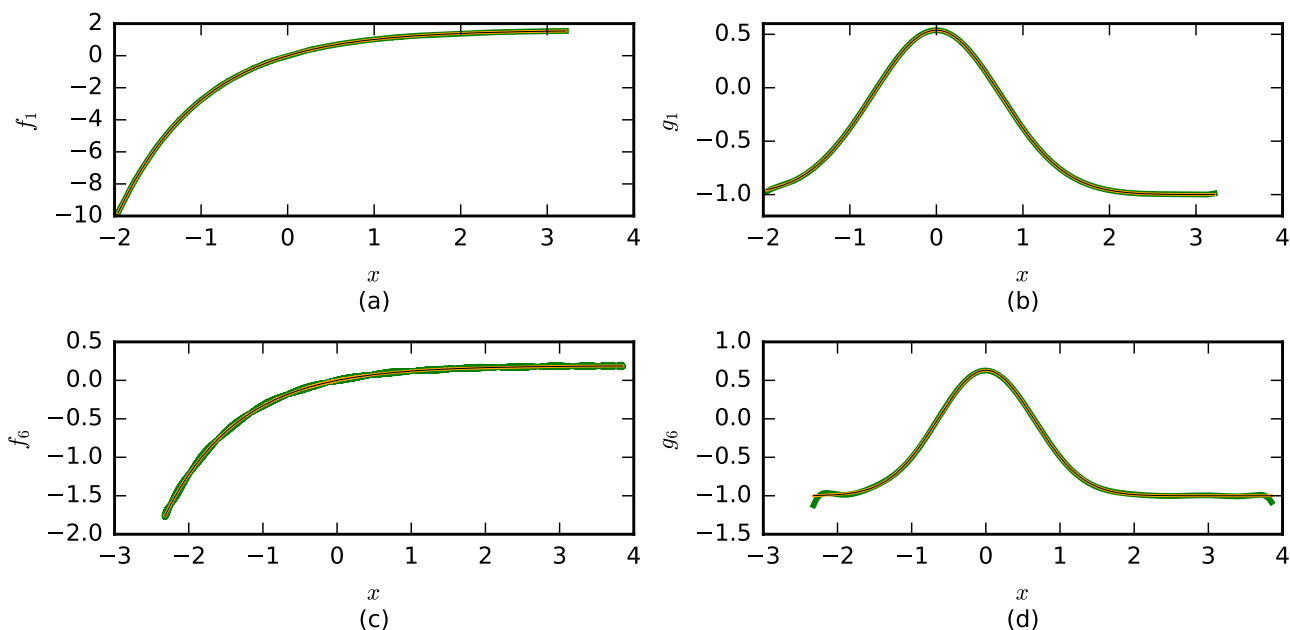


Рис. 2.12. Части (а,с) — результаты реконструкции потенциала f_i , чёрные линии показывают исходную (сгенерированную) функцию, оранжевые (специально отложенные более жирным) — результаты реконструкции с использованием локально линейной аппроксимации функции диссипации g_i , зелёные (специально отложены ещё более жирным) — результаты реконструкции f_i с использованием полиномиальной аппроксимации для g_i . Части (а) и (с) построены для двух разных осцилляторов из ансамбля в 8 узлов. Панели (b,d) отражают результаты реконструкции функции диссипации g_i для тех же двух осцилляторов, смысл цветов — тот же.

выбрать априорно, но можно ориентироваться на то, каковы значения целевой функции, перебирая различные аппроксимации. Это не потребует огромных затрат времени на вычисления и может быть реализовано автоматически, поскольку в каждом случае для оптимизации используется линейный МНК. Наиболее затратная с точки зрения вычислительных мощностей процедура — вычисление производных с использованием фильтра Савицки–Голэя, но эта задача хорошо подходит для расчётов на графическом ускорителе.

2.7.4. Реконструкция ансамблей осцилляторов с диссипацией высших порядков

Реконструкция ансамблей вида (2.46) с диссипацией старших порядков при наличии связи одновременно по координате и скорости — сложная, но важная задача, поскольку к такому виду сводятся связанные осцилляторы Рэлея и модели нейронов ФитцХью–Нагумо. В рассмотренном нами случае функции g_i выбирались в виде гауссиана по формуле (2.58). Функции $g'_i(i)$ и $g''_i(x)$ представляли собою параболы второго порядка, как показано ниже:

$$g'_i(x) = \gamma'_i + \alpha'_i x^2, \quad (2.59)$$

$$g''_i(x) = \gamma''_i + \alpha''_i x^2, \quad (2.60)$$

где все коэффициенты γ'_i , γ''_i , α'_i и α''_i генерировались случайно из равномерного распределения с параметрами $[0, 0.5]$. Такой выбор соответствует «нормальной», то есть положительной диссипации. Рассматривались ансамбли из $D = 8$ и $D = 16$ осцилляторов. Длина временных рядов составляла $N = 2^{14}$ значений, как и ранее. К рядам добавлялся нормальный некоррелированный шум с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением 0.002.

Результаты реконструкции всех функций: потенциала $f(x)$, обычной функции диссипации $g(x)$ и функций диссипации старших порядков $g'(x)$, $g''(x)$ изображены на рис. 2.13 в отсутствие шума (оранжевые линии) и в его присутствии (синие линии) для двух различных осцилляторов. Для функций диссипации использовалась локально линейная аппроксимация с числом бинов $L = 64$ для незашумлённых рядов и числом бинов $L = 8$ для зашумлённых, поскольку такой выбор соответствовал лучшим статистическим свойствам оценок. Как можно видеть, потенциальная функция и основная функция диссипации g_i оказались восстановлены с приемлемым качеством даже при наличии шума. Функции диссипации старших порядков также неплохо реконструируются при отсутствии шума, но внесение шума приводило к значительным ошибкам в их оценке, особенно на крайних бинах.

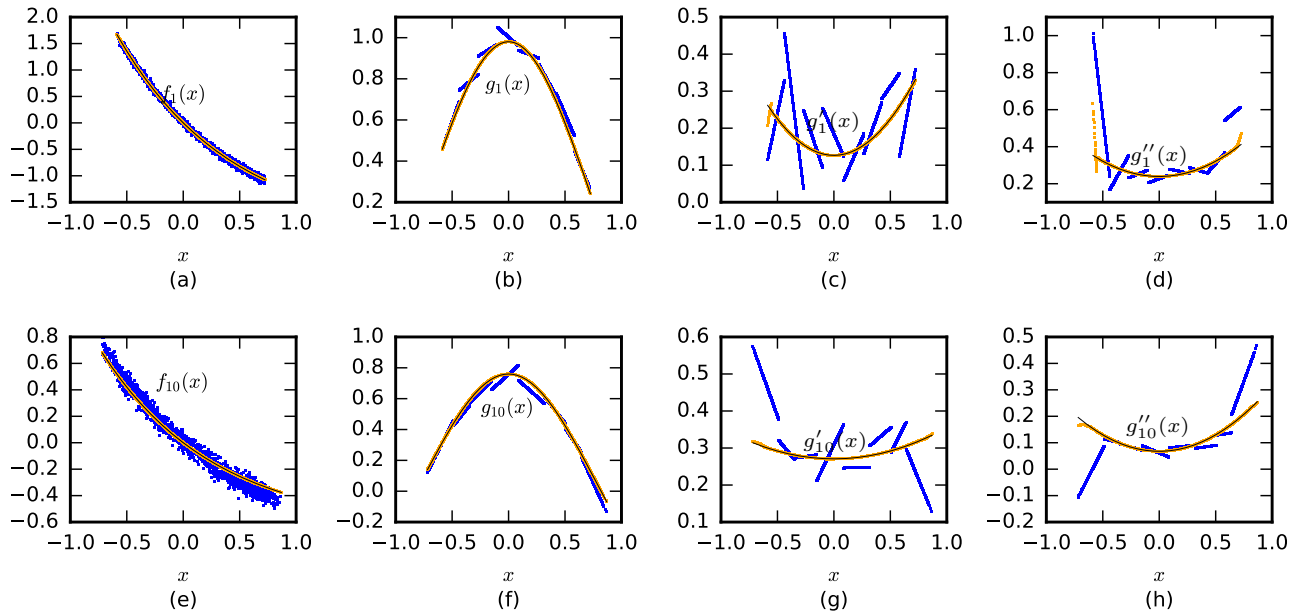


Рис. 2.13. Результаты реконструкции для двух в ансамбле из $D = 16$ осцилляторов типа (2.46) при наличии диссипации старших порядков и связи через координату и через скорость. Верхний ряд (а–d) соответствует осциллятору №1, нижний ряд (е–h) — осциллятору №10. На (а, е) показаны результаты реконструкции потенциала $f_i(x)$, на (b, f) — результаты реконструкции функции диссипации $g_i(x)$, на (с, g) и (d, h) — результаты реконструкции функций диссипации старших порядков $g'_i(x)$ и $g''_i(x)$ соответственно. Исходные функции изображены чёрным, жирным оранжевым — функции, восстановленные в отсутствие шума, а функции, восстановленные по зашумлённым временным рядам — синим.

В отсутствие шума удалось хорошо реконструировать почти все коэффициенты связи, значения погрешностей находились на том же уровне, что и представленные на рис. 2.11. Добавление шума приводило к большим ошибкам в реконструкции коэффициентов. Некоторое противоречие, связанное со сравнительно неплохим качеством восстановления функций f_i и g_i при больших ошибках в коэффициентах связи, может быть объяснено частичной синхронизацией элементов в ансамбле, когда воздействия от многих осцилляторов могут быть с небольшими погрешностями взаимно заменяемы с точки зрения их влияния на ведомый осциллятор. Эта гипотеза подтверждается тем фактом, что для осциллятора, у которого было только 5 достаточно больших связей, а все остальные

оказались случайно малы, результаты реконструкции этих пяти коэффициентов связи оказались довольно неплохими: $\Delta \tilde{k}'_i \in [0, 0.2]$.

2.7.5. Реконструкция ансамблей с неизвестными функциями связей

Чтобы продемонстрировать применимость предложенного подхода в случае неизвестной нелинейной функции связи $h_{i,j}$, рассматривалась функция связи в виде арктангенса (2.61), поскольку наряду с линейными сигмоидные функции с насыщением очень распространены в различных моделях, в том числе в радиофизике и биофизике.

$$h_{i,j}(x) = k_{i,j} \operatorname{arctg}(x), \quad (2.61)$$

где коэффициенты $k_{i,j}$ генерировались так же, как и ранее.

Для случая осциллятора ван дер Поля с исходной функцией диссипации величины $\delta_i(n)$ записывались как (2.50). Результаты аппроксимации двух случайно выбранных функций связи изображены на рис. 2.14(a,b) для ансамбля из 8 осцилляторов. Для всех 56 связей использовалась полиномиальная аппроксимация $h_{i,j}$ степенным полиномом порядка $P_h = 11$. Чем больше коэффициент связи $k_{i,j}$, тем лучше реконструированная функция повторяет исходную, например, можно сравнить рис. 2.14(a) и (b). Такое поведение метода, по всей видимости, является результатом того, что большие по амплитуде функции связи вносят больший вклад в динамику ведомого осциллятора и потому его временной ряд содержит о них больше информации. Для улучшения качества реконструкции малых по амплитуде функций связи может помочь увеличение длины ряда N . Осцилляции аппроксимирующего полинома на краях диапазона измерений хорошо видны на рис. 2.14(b).

Для более общего случая, когда неизвестны ни функция диссипации, ни функция связи результаты реконструкции функции связи отложены на рис. 2.14(c,d) для ансамбля из 8 осцилляторов. Для аппроксимации функции диссипации использовалась локально линейная модель с $L = 64$ бинами. Резуль-

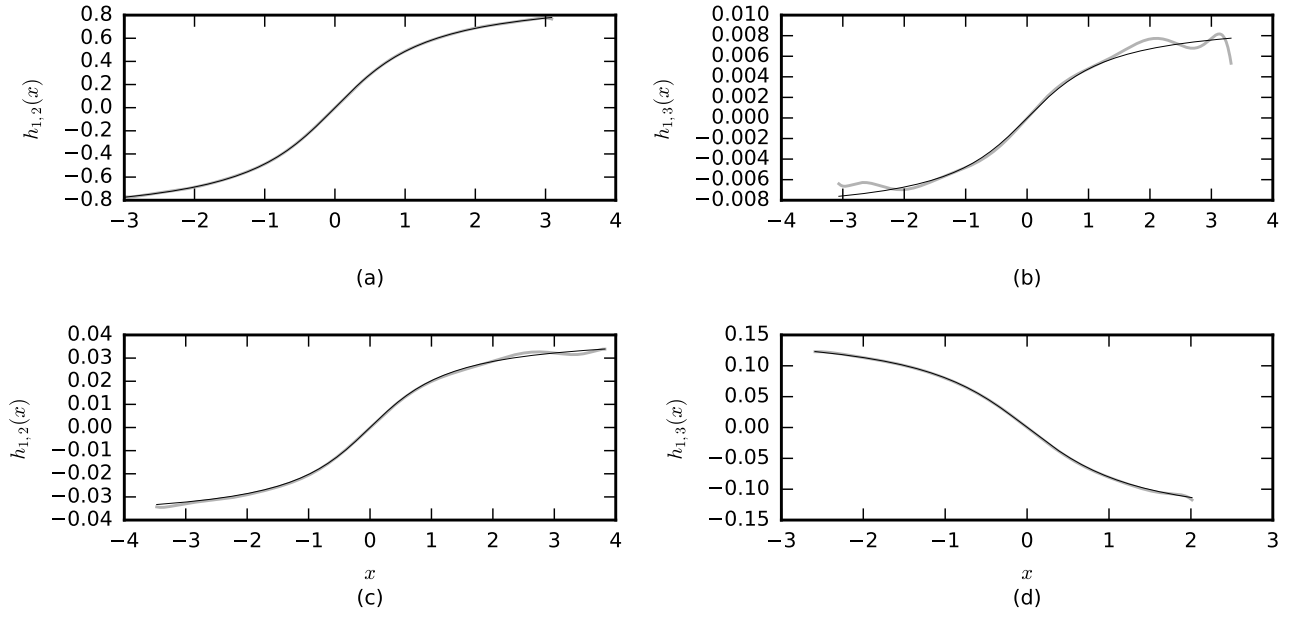


Рис. 2.14. Результаты реконструкции функций связи для ансамбля из $D = 8$ осцилляторов. Исходные функции отложены чёрным цветом, реконструированные — жирным серым. Части (a,b) соответствуют ансамблю (2.48) — двум различным функциям связи. Части (c,d) соответствуют модифицированному ансамблю (2.51) с неизвестными функциями диссипации (в действительности гауссовыми), для которого также приведены две разные функции связи. Во всех случаях для аппроксимации $h_{i,j}$ использовался степенной полином порядка $P_h = 11$.

таты реконструкции почти не уступают тем, что получены при реконструкции с известной функцией затухания.

2.7.6. Зависимость результатов от длины ряда

Для реконструкции больших ансамблей из десятков и сотен осцилляторов необходимо много данных, иначе задача реконструкции коэффициентов связи и коэффициентов в функциях диссипации оказывается плохо определённой. В данном подразделе предлагаемый метод применяется к рядам различной длины, рассматриваются сети исходных осцилляторов (2.29) и осцилляторов с дополнительными связями через производную (2.38). Для них по формулам (2.55), (2.56) и (2.57) были рассчитаны зависимости средних ошибок реконструкции параметра затухания r_i и коэффициентов связи $k_{i,j}$ и $k'_{i,j}$ от длины ряда N .

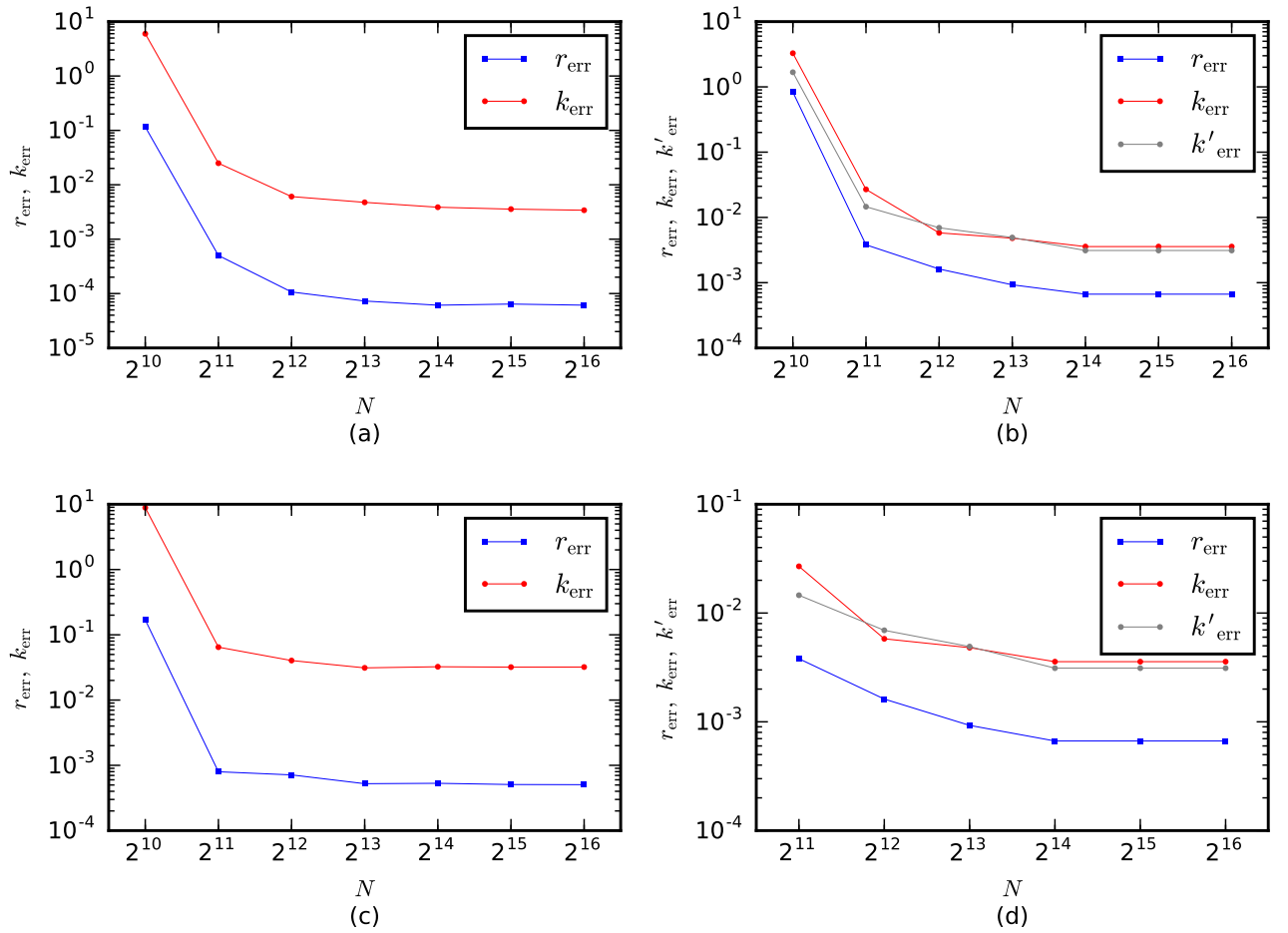


Рис. 2.15. Зависимость усреднённых относительных ошибок реконструкции параметров затухания r_i и коэффициентов связи $k_{i,j}$ и $k'_{i,j}$ от длины используемого временного ряда N . Части (а, с) соответствуют осцилляторам (2.29), а части (b, d) — ансамблям осцилляторов с дополнительными связями через производную (2.38). Части (а, b) показывают результаты для хаотических временных рядов, а (с, d) — для сложных периодических.

Результаты изображены на рис. 2.15.

Коэффициенты связи $k_{i,j}$ и $k'_{i,j}$ имеют значительно большие относительные ошибки реконструкции, чем параметр нелинейности r_i , что может объясняться как большим влиянием r_i на динамику узла, в том числе потому, что он влияет на изменение частоты колебаний, так и возможными эффектами частичной синхронизации элементов ансамбля и взаимной компенсации ошибок в значениях полученных коэффициентов связи.

Также зависимости ошибок от N для периодических режимов лежат как

правило выше (см. рис. 2.15(c,d)), чем для хаотических (см. рис. 2.15(c,d)), что не удивительно, поскольку для периодических рядов объём информации о системе фактически ограничивается тем, что доступно на одном периоде. Для них возможное улучшение результатов реконструкции с ростом N может быть только следствием лучшего усреднения шумов измерений и того факта, что интервал выборки и период колебаний не находятся в общем случае в целочисленном соотношении.

Поскольку число коэффициентов связи растёт как $O(D^2)$ с ростом размера ансамбля, в то время как объём доступных данных пропорционален $(N \cdot D)$ и потому растёт по закону $O(D)$ с ростом D , с увеличением числа элементов могут потребоваться более длинные ряды для успеха реконструкции.

2.8. Выводы

Предложен метод восстановления архитектуры связей в ансамблях нейроноподобных колебательных систем, описанных в работах [118; 145] при как в отсутствии, так и при наличии запаздывания в связях по их хаотическим временным рядам. Показано, что метод даёт возможность восстановить как все коэффициенты связи, так и времена запаздывания в связях. Метод основан на той же идее, что и подход, что и предложенный в [90] (описан в главе 1) для систем с запаздыванием в собственной динамике: при известных временах запаздывания члены модели, ответственные за связь, рассматриваются как базисные функции и сами коэффициенты связи восстанавливаются как коэффициенты при них методом наименьших квадратов.

Для восстановления времён запаздывания в связях использована модификация метода градиентного спуска, адаптированная к дискретному случаю. Это необходимо, поскольку одновременно для каждого из D осцилляторов восстанавливаются $D - 1$ времён запаздывания, следовательно, простой перебор, использованный в [90], уже неприменим.

Далее метод был обобщён на случай более сложных уравнений для отдельных узлов сети с произвольными нелинейными собственными функциями (2.23) и неизвестными сигмоидными функциями связи. Такой модифицированный метод потребовал использования нелинейного МНК для оптимизации целевой функции, что значительно увеличило время вычислений и несколько уменьшило область сходимости подхода, особенно при реконструкции времени запаздывания. Тем не менее, такой подход кажется более перспективным для практического применения, поскольку содержит существенно меньше предположений о свойствах объекта.

Далее был рассмотрен ещё более сложный случай, когда каждый отдельный узел сети описывается уравнением второго порядка — обобщённым уравнением ван дер Поля. При этом для каждого осциллятора измеряется реализация только одной переменной. Несколько последовательных обобщений позволили показать, что метод работоспособен также и для реконструкции связей в ансамблях обобщённых осцилляторов Рэлея и моделей нейрона ФитцХью–Нагумо, в том числе при наличии небольшого измерительного шума, при связях как через координаты, так и через производные, при неизвестной функции диссипации, наличии неизвестных функций диссипации высших порядков и неизвестных функциях связи. В ряде случаев метод оказывается эффективен для ансамблей большого размера: до 64 обобщённых осцилляторов.

Результаты второй главы опубликованы в работах [142; 146—148].

Разработка подходов к оценке связанности в ансамблях на основе нелинейного метода причинности по Грейнджеру для сигналов с выраженным временным масштабом

3.1. Введение. Метод причинности по Грейнджеру

Исследование связанности между сложными системами по записям их колебаний (временным рядам) является актуальной задачей в приложении ко многим областям знания: теории передачи информации, нейрофизиологии, кардиологии, климатологии и др. В настоящее время получили распространение подходы к определению связанности путём детектирования причинно-следственных связей между настоящим состоянием одного объекта и прошлыми состояниями другого (или нескольких других). К таким подходам можно отнести причинность по Грейнджеру [1], энтропию переноса [6] и частную направленную когерентность [63]. В ряде простейших случаев эти подходы сводятся один к другому [114].

Метод причинности по Грейнджеру основан на построении по наблюдаемым временным рядам эмпирических прогностических моделей, первоначально только линейных регрессионных. Впоследствии был предложен целый ряд нелинейных обобщений: с использованием полиномиальных [7; 113], радиальных [2] и ядерных [3] базисных функций. Основным преимуществом метода является то, что он способен выявить направленную произвольную функциональную связанность между объектами исследования, в то время как подходы, основанные на взаимной корреляционной функции, функции когерентности, анализе фазовой и обобщённой синхронизации выявляют только линейную связь и не могут

определить её направление, а теоретико-информационные непараметрические методы (функция взаимной информации, энтропия переноса) требуют, как правило, больших объёмов данных.

Идея подхода заключается в том, что если система Y воздействует на систему X , то значения временного ряда $\{y_n\}_{n=1}^N$ системы Y , являются причиной изменений временного ряда $\{x_n\}_{n=1}^N$ системы X . Следовательно, учёт данных от системы Y должен помочь в предсказании будущих значений временного ряда $\{x_n\}_{n=1}^N$. На первом этапе строится собственная модель (3.1), предсказывающая следующее значение во временном ряде $\{x_n\}_{n=1}^N$ по D_s предыдущим:

$$x_{n+\tau} = f(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, \mathbf{c}^s) + \xi_n^s, \quad (3.1)$$

где f — аппроксимирующая функция, τ — дальность прогноза, l — лаг модели, D_s — собственная размерность модели, \mathbf{c}^s — неизвестные коэффициенты, а $\{\xi_n^s\}$ — остатки. Коэффициенты \mathbf{c}^s оцениваются методом наименьших квадратов, среднеквадратичная ошибка прогноза ε_s^2 равна дисперсии остатков $\{\xi_n^s\}_{n=1}^N$.

Следующим шагом строится совместная модель (3.2), использующая для предсказания $\{x_n\}_{n=1}^N$ также D_a значений из ряда $\{y_n\}_{n=1}^N$:

$$x_{n+\tau} = g(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, y_n, y_{n-l}, \dots, y_{n-(D_a-1)l}, \mathbf{c}^j) + \xi_n^j, \quad (3.2)$$

где D_a — размерность добавки, \mathbf{c}^j — коэффициенты совместной модели, f и g — полиномы общего вида степени P . Ошибка прогноза модели (3.2) ε_j^2 равна дисперсии остатков $\{\xi_n^j\}$.

Случай $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$ показывает, что данные из ряда системы Y помогли предсказать поведение системы X . В таком случае говорят, что система Y действует на систему X по Грейнджеру. В качестве количественной меры воздействия используется величина PI — улучшение прогноза, определяемое по формуле (3.3):

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2}. \quad (3.3)$$

Важнейшими характеристиками любого метода определения связанности являются его *чувствительность* и *специфичность*. Под чувствительностью,

как правило, понимают способность метода определять реально имеющиеся связи при как можно меньшей их силе (меньшей величине коэффициента связи) и/или в как можно большем числе экспериментов (например, если есть помехи и шумы, даже в приложении к сигналам одной и той же природы связи могут детектироваться или нет для различных реализаций даже при одной и той же силе взаимодействия). Недостаточная чувствительность приводит к *ошибкам второго рода*, когда реально присутствующие связи не обнаруживаются.

Под специфичностью, как правило, понимают способность метода не обнаруживать связи там, где их в действительности нет, то есть не допускать сложных срабатываний. Недостаточная специфичность приводит к *ошибкам первого рода* — обнаружению несуществующих связей.

В данной главе на численно смоделированном материале — временных рядах различным образом связанных эталонных систем нелинейной динамики [72; 149–152] и моделей радиотехнических генераторов [16; 18] — проверяется работоспособность нелинейного метода причинности по Грейнджеру в различных случаях, формируются критерии его эффективности (повышения чувствительности и специфичности) и даются рекомендации к практическому применению для сигналов с разными свойствами и при наличии некоторых априорных данных; в первую очередь для сигналов с выраженным характерным временным масштабом.

3.2. Тестирование метода причинности по Гренджеру для однонаправленно связанных систем при различной степени несовершенства модели

Остаётся открытым вопрос влияния вида предсказательной модели на оценку причинно-следственных связей методом причинности по Грейнджеру. Ответ на него целесообразно искать, используя в качестве объектов эталон-

ные связанные уравнения, так как модели реальных объектов, как правило, не единственны и вопрос их адекватности требует доказательств. При таком выборе объекта нам известна структура объекта, включая наличие и характер связей, что позволяет проверить правильность оценок с помощью причинности по Грейнджеру.

Целью данного раздела является на тестовых примерах — связанных эталонных динамических системах — проверить при различных значениях коэффициента связи работоспособность метода и значимость результатов причинности по Грейнджеру в случае, когда структура модели в той или иной степени отлична от структуры объекта. Рассматривается модификация метода с полиномиальными нелинейными функциями [7].

В качестве аппроксимирующих функций в совместной и индивидуальной модели нами использовались полиномы произвольной степени со всевозможными перекрестными слагаемыми по аналогии с [7]. Степень полинома P варьировала от 1 до 6, размерность индивидуальной модели D_s изменялась от 1 до 4, размерность добавки D_a — от 1 до 2. Несмотря на то, что такой подход нельзя назвать наилучшим во всех случаях — вполне возможно, что для тех или иных объектов будет лучше использовать иной базис, например, радиальные базисные функции [2] — полиномиальный базис является самым распространенным и простым в использовании, требует меньшего объема данных, чем радиальные базисные или вейвлетные функции вследствие отсутствия локализации в фазовом пространстве (далее в работе также рассмотрен вариант использования локально линейных моделей). В данной главе рассматривалась только ситуация, когда системы были связаны без запаздывания.

В реальной ситуации всегда присутствуют шумы, длина временного ряда ограничена, точность вычислений конечна и т.п., поэтому требуется проводить проверку значимости выводов — оценку вероятности, что полученный результат не случаен. Известны различные виды такого тестирования: теоретические оценки [153], использование суррогатных данных [30; 154]. Мы ограничились

одним видом суррогатов, приготовленных из временных рядов тех же систем, что использовались в качестве объектов моделирования, но без связи, и оценивали статистическую значимость полученных значений показателя PI . Для этого строились ансамбли реализаций из 100 рядов суррогатных данных эталонных систем с добавлением каждый раз новой реализации динамического шума и стартуя с новых, выбранных случайно начальных условий (переходной процесс отсекался) и оценивалась 95%-ая квантиль.

3.2.1. Связанные отображения окружности

В качестве объекта использовались два однонаправленно связанных отображения окружности (3.4) со связью вида $k \sin y_n$. Связь вносилась таким образом, т. к. переменная в отображении окружности имеет смысл фазы колебаний. Коэффициент связи k варьировался в пределах от 0.01 до 0.08 с шагом 0.002. В каждое отображение добавлялся нормально распределённый динамический шум с дисперсией, равной 0.001. Численным решением получались временные ряды длиной в 4096 точек, переходной процесс предварительно отсекался. Параметры для обоих отображений выбирались таким образом, чтобы при нулевой связи и отсутствии шума они соответствовали хаотическому поведению: $\Delta_x = 0.001$, $\Delta_y = 0$, $\kappa_x = 3.98$, $\kappa_y = 3.88$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + \kappa_x \sin x_n + k \sin y_n + \xi_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta_y + \kappa_y \sin y_n + \eta_n \end{aligned} \quad (3.4)$$

В состав отображения окружности входит непрерывная неполиномиальная функция $\sin(x)$. Поскольку данная функция может быть разложена в бесконечный степенной ряд, можно ожидать, что результат работы метода нелинейной причинности по Грейнджеру будет зависеть от степени полинома P , используемого в модели.

На графиках на рис. 3.1 представлены результаты применения метода причинности по Грейнджеру — значения показателя улучшения прогноза в зависи-

мости от уровня связи k . В качестве аппроксимирующих функций использовались полиномы различного порядка от 1 до 6, размерность совместной модели равнялась 2 ($D_s = 1$, $D_a = 1$). Видно, что при использовании в качестве аппроксимирующей функции полиномов первого и второго порядков серая и черная линия на графике зависимости $PI(k)$ (определение наличия связи в верном и неверном направлении) принимают приблизительно одинаковые значения и лежат выше пунктирной линии — 95% суррогатного уровня, это говорит о том, что метод не может различить связь в правильную и неправильную сторону. Использование полиномов более высоких порядков позволяет диагностировать направленную связь в верном направлении, т.к. значения PI , полученные при этом, возрастают с ростом коэффициента связи k , оказываются значимыми и, более того, стремятся к 1. Это можно объяснить тем, что с увеличением степени полиномиальной функции происходит все более точная аппроксимация синусоидальных нелинейностей, включая нелинейность в связи.

В случаях, когда метод демонстрирует хорошую работоспособность, нелинейная функция исходной эталонной системы хорошо аппроксимируется входящим в предсказательную модель полиномом, что видно на рис. 3.3. Также можно сравнить динамику исходной системы, временной ряд которой получен при значении коэффициента связи $k = 0.05$, и построенной совместной модели (рис. 3.2(a)). Для этого исходная временная реализация $\{x_n\}$ была наложена на реализацию, полученную путем итерирования реконструированного отображения (3.2) с начальными условиями, взятыми также из исходного ряда при использовании реализации $\{y_n\}$ (рис. 3.2(b)) в качестве внешнего воздействия. Видно, что полученная в результате работы метода совместная модель достаточно хорошо качественно описывает динамику поведения исходной системы.

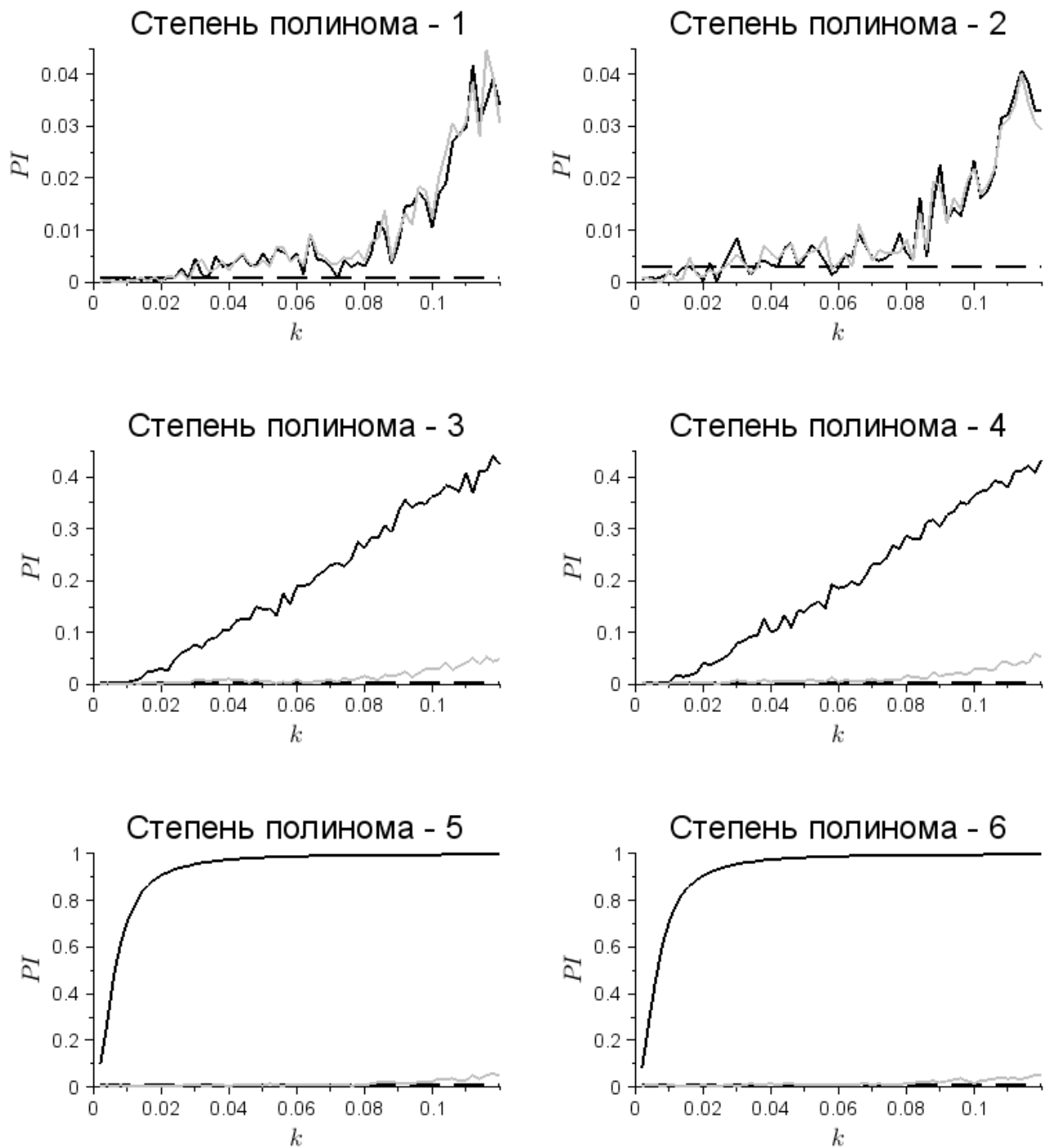


Рис. 3.1. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных отображениях окружности. Непрерывной черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верную сторону, серой линией — значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y), пунктирной черной линией — 95% суррогатный уровень.

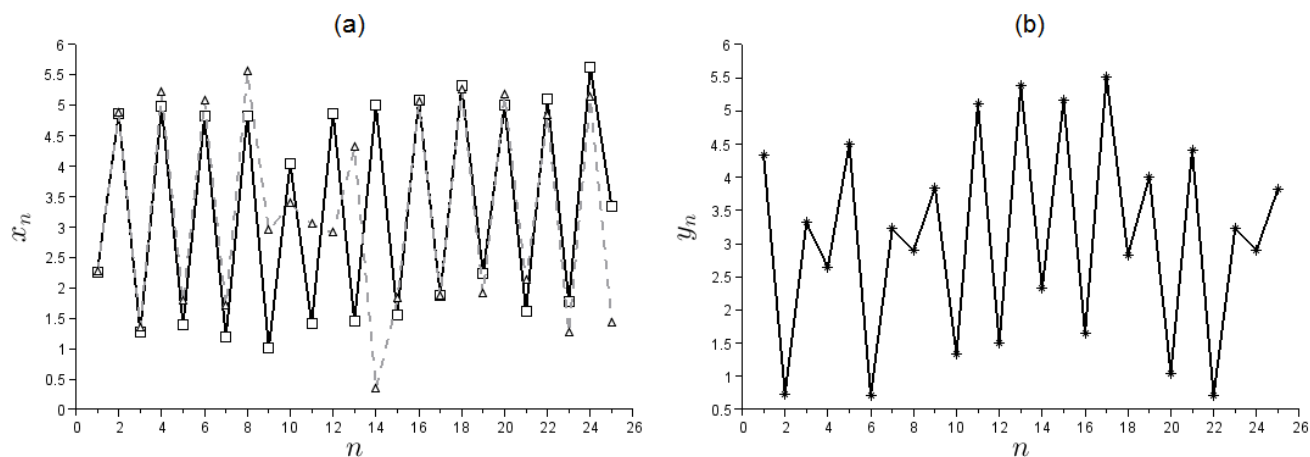


Рис. 3.2. Качественная проверка построенной модели: (а) — черной линией показаны значения наблюдаемого временного ряда отображения окружности (3.4), пунктирной серой — значения временного ряда, восстановленного с помощью совместной модели вида (3.2), модель итерировалась с начальными условиями, взятыми из исходного ряда (при построении предсказательной модели использовался степенной полином степени 3 размерности 3); (б) — черной линией показаны значения наблюдаемого временного ряда воздействующей системы (ряд значений Y).

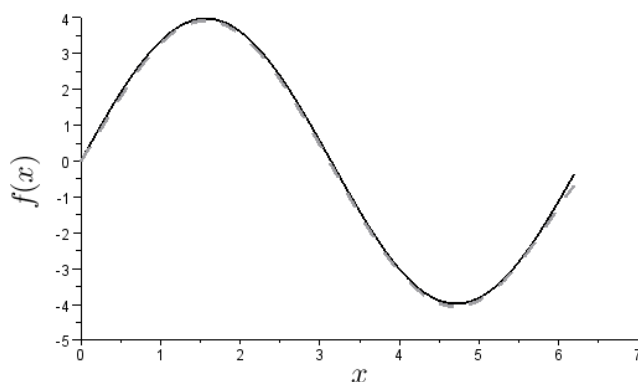


Рис. 3.3. Качественная проверка построенной модели: непрерывной черной линией показаны значения нелинейной функции отображения окружности, а пунктирной серой — значения, полученные при её аппроксимации совместной моделью. Для получения серой пунктирной кривой функция совместной модели $g(x_n, y_n)$ рассчитывалась для всех пар значений (x_n, y_n) из экспериментального ряда, получался набор трёхмерных векторов (точек в трёхмерном пространстве) $(x_n, y_n, g(x_n, y_n))$, затем строилась проекция этого набора на плоскость $(x_n, g(x_n, y_n))$, при этом точки сортировались по возрастанию x_n .

3.2.2. Связанные отображения Икеды

В качестве второго примера были взяты два отображения Икеды [72] (3.5), связанных однонаправленной нелинейной связью вида $k \cos(y_n^2 - x_n^2)$, где y — первая переменная воздействующего отображения. Связь вносилась таким образом, поскольку переменная в отображении Икеды имеет смысл фазы колебаний. Коэффициент связи k варьировался в пределах от 0.005 до 0.5 с шагом 0.005, к обоим отображениям добавлялся динамический шум ξ_n и η_n с дисперсией, равной 0.001.

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_x + B_x[x_n \cos(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x) - u_n \sin(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x)] \\ \quad + k \cos(y_n^2 - x_n^2) + \xi_n \\ u_{n+1} = B_x[x_n \sin(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x) + u_n \cos(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x)], \\ y_{n+1} = A_y + B_y[y_n \cos(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y) - v_n \sin(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y)] + \eta_n, \\ v_{n+1} = B_y[y_n \sin(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y) + v_n \cos(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y)] \end{cases} \quad (3.5)$$

Данная система сложнее для аппроксимации моделями вида (3.1, 3.2), поскольку кроме непрерывной неполиномиальной функции, разложимой в бесконечный степенной ряд, имеется также скрытая (скрытыми называют переменные, входящие в уравнения модели, но недоступные измерению или наблюдению [155; 156]) переменная u_n — ряд u_n считался ненаблюдаемым, т. е. не использовался при построении прогностической модели. Это делает невозможным точную или асимптотически точную аппроксимацию исходных эталонных уравнений, таким образом затрудняя решение задачи о поиске связанности.

От каждого отображения получался временной ряд длиной в 4096 точек, переходной процесс предварительно отсекался. По карте режимов выбирались параметры для обоих отображений такими, чтобы при нулевой связи и в отсутствии шума они соответствовали хаотическому поведению: $A_x = 4$, $B_x = 0.2$, $\phi_x = 0.5$, $A_y = 6$, $B_y = 0.13$, $\phi_y = 0.4$.

На графиках, представленных на рис. 3.4, показаны зависимости показа-

теля улучшения прогноза от силы связи в случае использования в качестве аппроксимирующей модели полиномов разной степени (степень варьировалась от 1 до 6), размерность совместной модели бралась равной 3 ($D_s = 2, D_a = 1$). Из графиков видно, что использование в качестве аппроксимирующей функции полинома первой степени не позволяет выявить направленную связь, т.к. значения показателя улучшения прогноза как в правильном, так и в заведомо ложном направлении оказываются незначимыми, как и для связанных отображений окружности. Увеличение степени полинома позволяет детектировать связь. Значения показателя улучшения прогноза при поиске связи в неправильную сторону не возрастают с ростом связи во всех случаях. Однако при больших степенях полинома, используемого в качестве аппроксимирующей функции, они оказываются значимыми, что может говорить о ненадёжности подхода, использующего слишком большие модели. Значения PI при поиске связи в правильном направлении растут с ростом коэффициента связи k .

Отдельно следует отметить, что при использовании полиномов 5 и 6 порядка показатели улучшения прогноза при малых значениях коэффициента связи принимают отрицательные значения. Теоретически это невозможно, но происходит на практике вследствие недостаточной точности вычислений. Одним из факторов, приводящих к этому, является то, что использование полиномов большой степени при аппроксимации синусоидальной нелинейности приводит к большим ошибкам в определении минимума целевой функции. Используемая нами модель допускает применение линейного метода наименьших квадратов, т.е. проблема не может быть обусловлена попаданием в локальный минимум и лежит главным образом в точности вычислений. В работах [157; 158] показано, что при использовании для решения задачи наименьших квадратов QR -разложения и в форме вращения Хаусхолдера, и ортогонализации Грамма–Шмидта, ошибка в решении пропорциональна норме матрицы базисных функций. При использовании полиномов высоких порядков эта норма больше. Этот недостаток начинает сказываться, когда число коэффициентов

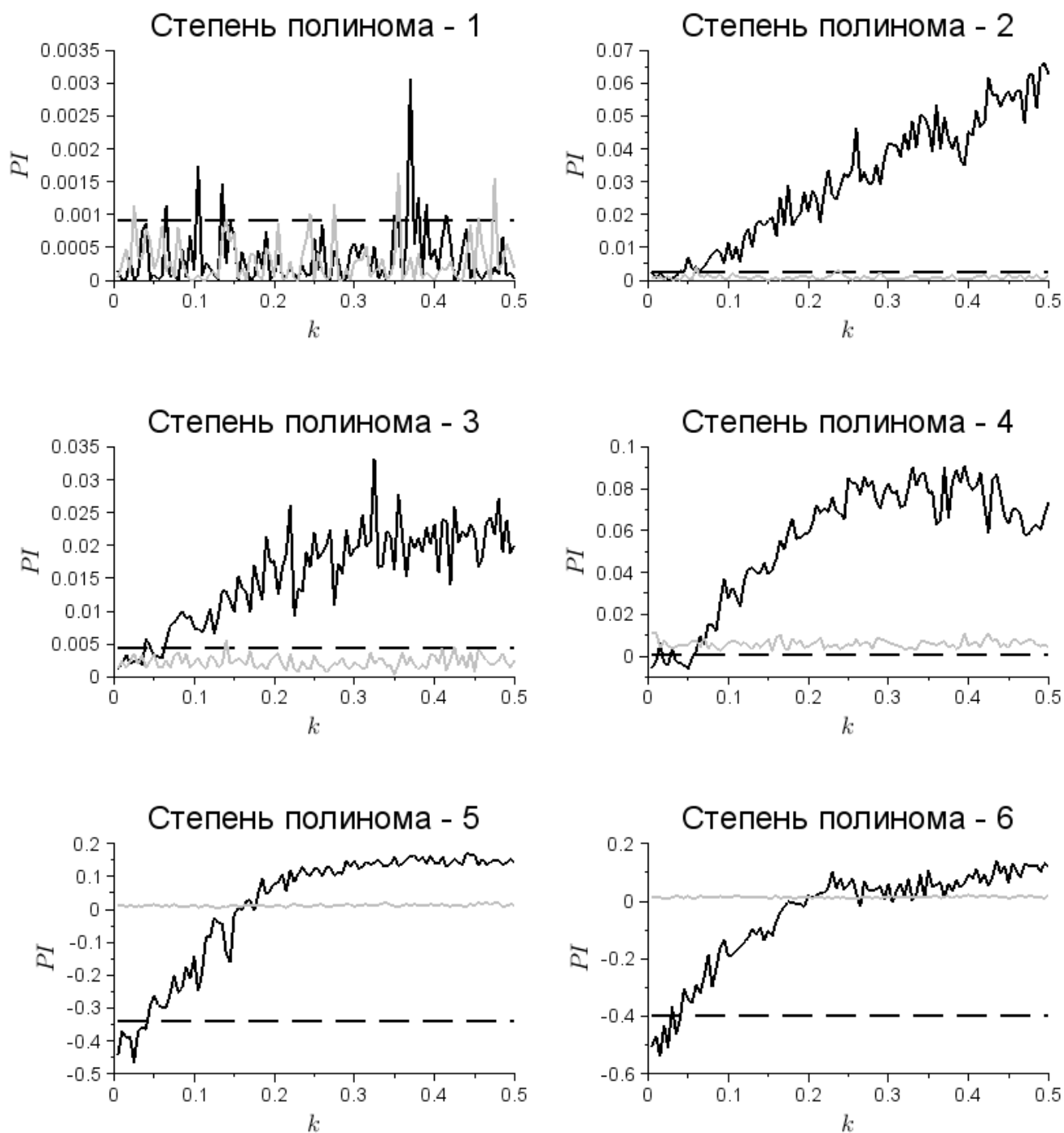


Рис. 3.4. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных отображениях Икеды. Непрерывной черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верную сторону, серой линией — значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y), пунктирной черной линией — 95% суррогатный уровень.

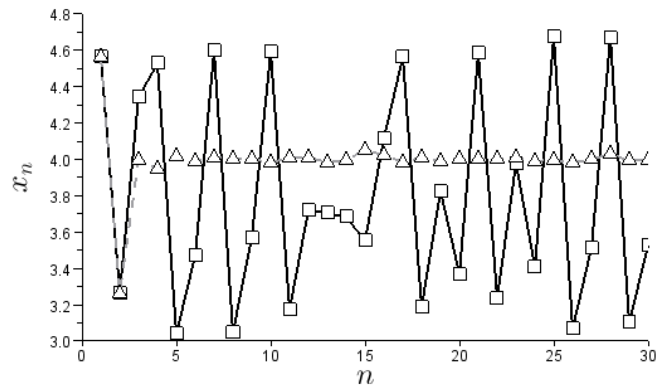


Рис. 3.5. Качественная проверка построенной модели: черной линией показаны значения наблюдаемого временного ряд отображения Икеды (3.5), пунктирной серой — значения временного ряда, восстановленного с помощью совместной модели вида (3.2), модель итерруется с начальными условиями, взятыми из самого исходного ряда. При построении предсказательной модели использовался степенной полином степени 3 размерности 3.

оказывается слишком велико (сам размер матрицы возрастает), поэтому для совместной модели ошибка больше, чем для индивидуальной.

Поскольку не все переменные модели наблюдались, восстановить нелинейную функцию, как это было сделано для отображения окружности на рис. 3.3, невозможно. Потому мы построили только временные ряды исходной системы при значении коэффициента связи $k = 0.5$, и реконструированной — на рис. 3.5. Видно, что качественно динамика оригинальной эталонной системы и предсказательной модели различны: неплохо аппроксимируя непосредственно следующее значение, модель в перспективе не повторяет качественно динамику объекта, а вместо хаотического ряда демонстрирует устойчивое положение равновесия, возмущаемое сигналом второго отображения. Тем не менее, метод нелинейной грейнджеровской причинности демонстрирует хорошие чувствительность и специфичность.

В приведённом на рис. 3.2 примере рассмотрен случай $D_s = 2$. Поскольку вектор состояния в данной ситуации нельзя восстановить точно, можно предполагать, что результаты могут различаться при различных D_s : например, ожидать, что оптимальные результаты могут быть достигнуты при размерности

$D_s = 5$ согласно теореме Такенса [159]. Однако проведённые численные эксперименты показывают, что размерности $D_s = 2$, как правило достаточно, чтобы выявить существующую связь и признать связь в заведомо неверном направлении незначимую; при увеличении размерности результаты качественно не меняются.

3.2.3. Связанные отображения Заславского

Следующим объектом для исследования были выбраны два отображения Заславского [152] (3.6), связанные односторонней линейной связью вида ky_n , где y — первая переменная воздействующего отображения. Коэффициент связи варьировался в пределах от 0.01 до 1 с шагом 0.01, к обоим отображениям добавлялся динамический шум с дисперсией 0.001. Нелинейные функции отображения Заславского (3.6) являются более трудным для аппроксимации, чем для отображения окружности и Икеды, поскольку, помимо прочего (наличие скрытой переменной, отображение содержит неполиномиальную функцию), одна из них также является разрывной за счёт взятия остатка от деления на 2π .

$$\begin{cases} x_{n+1} = (x_n + \Delta_x + \kappa_x \sin x_n + a_x u_n + ky_n + \xi_n) \bmod 2\pi, \\ u_{n+1} = au_n + \kappa_x \sin x_n. \\ y_{n+1} = (y_n + \Delta_y + \kappa_y \sin y_n + a_y v_n + \eta_n) \bmod 2\pi, \\ v_{n+1} = av_n + \kappa_y \sin y_n. \end{cases} \quad (3.6)$$

От каждого отображения получался временной ряд первой координаты длиной в 4096 точек, переходной процесс предварительно отсекался. Для того, чтобы получить хаотические режимы для систем X и Y , выбирались следующие значения параметров: $\Delta_x = \pi$, $\Delta_y = 4$, $\kappa_x = 4.59$, $\kappa_y = 4.9$, $a_x = 0.78$, $a_y = 0.58$.

Результаты работы метода причинности по Грейнджеру в случае использования в качестве аппроксимирующих функций полиномов первого — шестого порядков (размерность совместной модели равнялась трем ($D_s = 2$, $D_a = 1$))

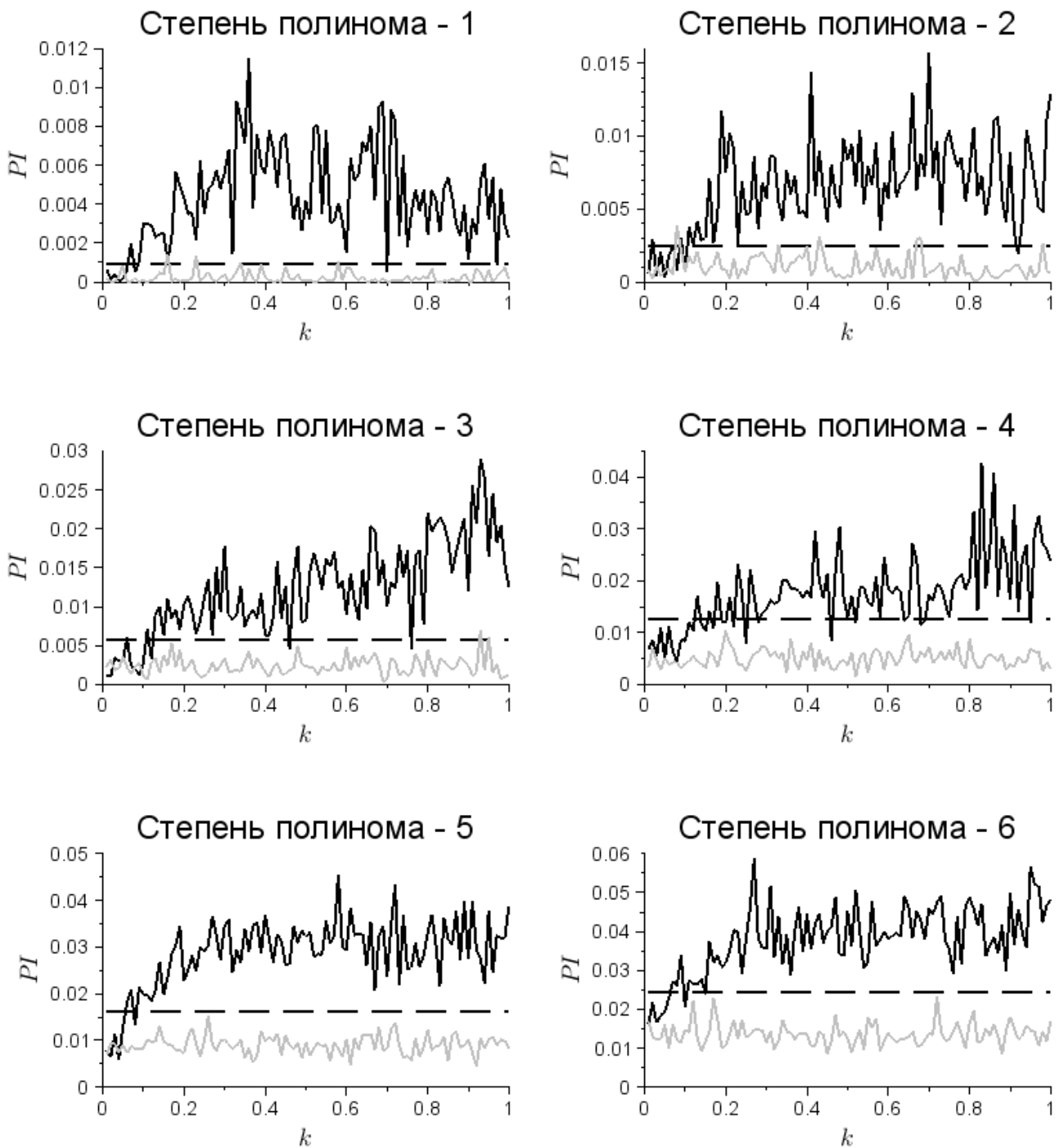


Рис. 3.6. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных отображениях Заславского. Непрерывной черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верную сторону, серой линией — значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y), пунктирной черной линией — 95% суррогатный уровень.

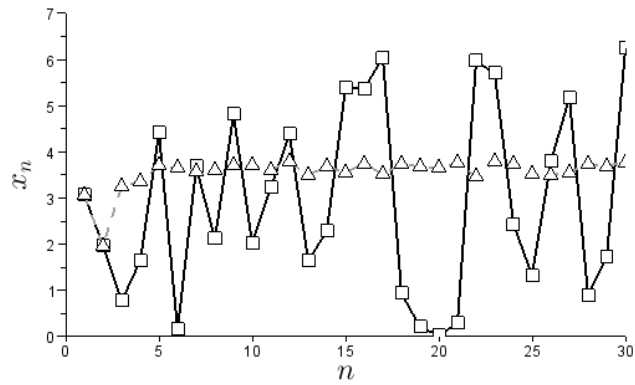


Рис. 3.7. Качественная проверка построенной модели: черной линией показаны значения наблюдаемого временного ряда отображения Заславского (3.6), пунктирной серой — значения временного ряда, восстановленного с помощью совместной модели вида (3.2), модель итерируется с начальными условиями, взятыми из самого исходного ряда. При построении предсказательной модели использовался степенной полином степени 3 размерности 3.

представлены на рис 3.6. В случае использования полинома первого порядка результаты оказываются значимы, в то время как для отображения Икеды подобная модель была неспособна обнаружить связь, скорее всего, вследствие того, что связь вводилась линейно. Тем не менее, использование в качестве аппроксимирующих функций полиномов более высокого порядка позволяет достигнуть лучшей специфичности — число ложных обнаружений связи в заведомо неправильную сторону для них заметно меньше. Также при использовании полиномов второго и выше порядков показатель улучшения прогноза растет с увеличением значения коэффициента связи, в то время как при использовании первого порядка наблюдается уменьшение значения PI при больших значениях коэффициента k . Таким образом, даже при рассмотрении линейно связанных систем использование нелинейных моделей может давать некоторые преимущества.

Сравнивая временной ряд объекта, построенный при значении коэффициента связи $k = 0.5$, и ряд, сгенерированный восстановленной совместной моделью, на рис. 3.7, можно видеть, что динамика модели и объекта существенно различна. Как и для отображения Икеды, воспроизвести наблюдаемый режим

качественно не удается. Это не удивительно, поскольку вектор состояния наблюдался не полностью, а сложные тригонометрические нелинейные функции с разрывами аппроксимировались полиномами низких порядков. Несмотря на это, метод причинности по Грейнджеру демонстрирует разумные результаты.

3.2.4. Связанные системы Лоренца

В предыдущих разделах метод причинности по Грейнджеру применяли для определения связанности по рядам эталонных систем с дискретным временем. Рассмотрим в качестве объекта две связанные однонаправленной связью системы с непрерывным временем — системы Лоренца [149] (3.7):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1(r_1 - x_3) - x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - b_1x_3 + ky_3. \\ \dot{y}_1 = \sigma_2(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 = y_1(r_2 - y_3) - y_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - b_2y_3. \end{cases} \quad (3.7)$$

Следует отметить, что в принципе такая постановка задачи не слишком отличается от ранее рассмотренных, поскольку аппроксимация дифференциальных уравнений разностной схемой возможна (требуется проверить также условие сходимости). Однако в рассмотренном случае две из трёх переменных каждой подсистемы системы (3.7) считались ненаблюдаемыми, что существенно усложняет построение модели: ситуация аналогична рассмотренной для двух связанных отображений Икеды, но дополнительно присутствует специфика, связанная с тем, что временные ряды получены от системы с непрерывным временем, в частности большие времена корреляции, спектр с выраженными максимумами, большое расстояние между экстремумами в реализации. Эти особенности отличают данную ситуацию от ранее рассмотренных.

Линейная аддитивная связь вида ky_3 вносилась в уравнение для третьей

координаты x_3 , коэффициент связи k варьировался в пределах от 0.01 до 1 с шагом 0.01, шаг интегрирования брался равным 0.001. От каждой системы получались временные ряды длиной в 20480 точек на аттракторе. Чтобы получить хаотические режимы, для систем выбирались следующие параметры: $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 10.5$, $r_1 = 30$, $r_2 = 31$, $b_1 = 8/3$, $b_2 = 8/3$.

Для графиков, представленных на рис. 3.8, в качестве моделей использовались полиномы первого и второго порядков с индивидуальной и совместной размерностью, равными 1 — рис. 3.8(a, b) и 2 — рис. 3.8(c, d). Лаг $l = 1$. В случае использования в качестве линейной модели полинома 1 степени (рис. 3.8 (a, b)) результаты оказываются значимы только при больших значениях размерности (рис. 3.8(b)) и то при значениях коэффициента связи $k \approx 0.8$. Нелинейная модель (рис. 3.8 (c, d)) с полиномом второго порядка в качестве аппроксимирующей функции позволяет выявить связь (рис. 3.8 (d)), начиная с вдвое меньших значений коэффициента связи $k \approx 0.5$, а значения показателя улучшения прогноза PI оказываются больше, чем при использовании линейной модели.

При поиске связи в заведомо ложном направлении присутствует небольшой рост значений PI , однако результаты оказываются незначимы с точки зрения суррогатов для всех рассмотренных значений коэффициента связи.

На рис. 3.9 представлено сравнение исходного временного ряда, построенного при значении коэффициента связи $k = 0.6$, и ряда, полученного с помощью совместной модели, видно, что модельное уравнение полностью не описывает динамику системы. Однако метод нелинейной причинности по Грейнджеру и в этом случае позволяет получить значимые результаты в заведомо верном направлении и незначимые — в заведомо ложном, т. е. проходит проверку как на чувствительность, начиная с некоторого значения коэффициента связи, так и на специфичность.

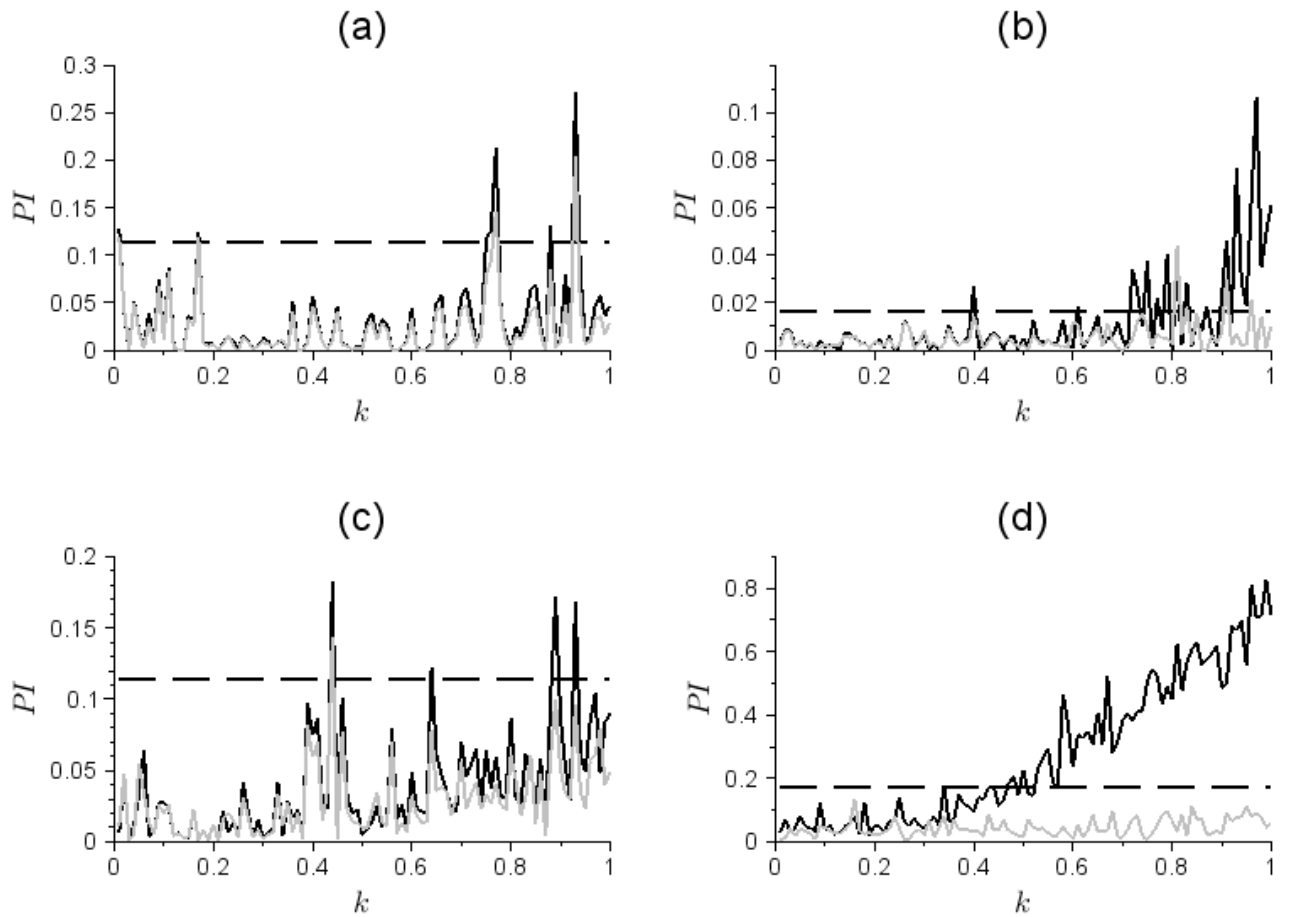


Рис. 3.8. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных однонаправленной связью системах Лоренца при использовании: (a), (b) — линейной модели (размерность совместной модели 2 и 4 соответственно), (c), (d) — нелинейной модели с порядком полинома 2 (размерность совместной модели 2 и 4 соответственно). Непрерывной черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верную сторону, серой линией — значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y), пунктирной черной линией — 95% суррогатный уровень.

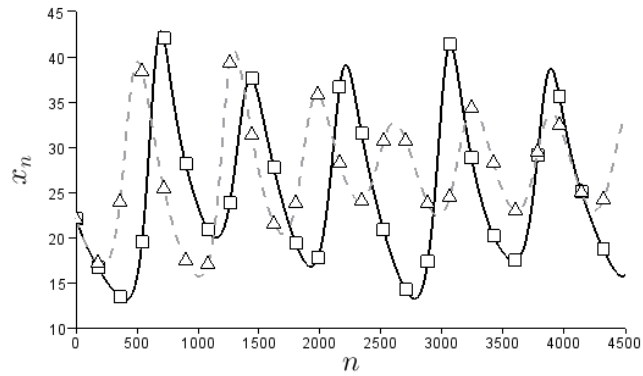


Рис. 3.9. Качественная проверка похожести временных рядов: наблюдаемый временной ряд третьей координаты системы Лоренца (сплошная черная линия) и временной ряд, восстановленный совместной моделью вида (серый пунктир), модель интегрируется с начальными условиями, взятыми из самого исходного ряда. При построении предсказательной модели использовался степенной полином степени 2, размерности 4.

3.3. Определение запаздывания в связях

3.3.1. Модельные системы

В ходе численного моделирования анализировались сигналы стохастических осцилляторов, связанных в общем случае с задержкой. В качестве первой эталонной системы использовался осциллятор Ван-дер-Поля (3.8) в периодическом режиме с параметрами $r = 0.05$ и $\omega_y = 1$ с шумом $\xi_v(t)$ (нормальный некоррелированный шум со среднеквадратичным отклонением $\sigma_v = 0.5$ и нулевым средним). Осциллятор ван дер Поля и его обобщения часто рассматриваются при описании систем самой различной природы [131]. В качестве второй системы использовался возбуждаемый шумом ξ_l (нормальный некоррелированный шум со среднеквадратичным отклонением $\sigma_l = 0.5$ и нулевым средним) линейный диссипативный осциллятор (3.9) с параметрами $\gamma = 0.15$ и $\omega_x = 1$. Такая система часто рассматривается как простейшая модель во многих приложениях, включая эконометрику и нейрофизиологию. Так, уравнениями линейного осциллятора, как показано в работе [160], может быть в первом приближении описана динамика поверхностной энцефалограммы. Системы (3.8) и (3.9) реша-

лись численно методом Эйлера с шагом $h = 0.01$. Для сопоставления результатов с экспериментом полагали, что $h = \Delta t = 0.005$ с, длина временного ряда бралась равной 8000 значений. Методы применялись при различных значениях параметров связи.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (r - y^2) \frac{dy}{dt} + \omega_y^2 y = \xi_v(t) + K_{xy}(x(t - \Delta_{xy}) - y(t)) + \mu_{xy}(x(t - \Delta_{xy}) - y(t))^3, \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_x^2 x = \xi_l(t) + K_{yx}(y(t - \Delta_{yx}) - x(t)) + \mu_{yx}(y(t - \Delta_{yx}) - x(t))^3, \quad (3.9)$$

где Δ_{yx} и Δ_{xy} — временные задержки распространения сигнала между системами (3.8) и (3.9).

3.3.2. Результаты тестирования на моделях

На рис. 3.11 представлены результаты применения методов линейной и нелинейной грейнджеровской причинности для выявления связей между (3.8) и (3.9) для $\Delta_{xy} = 50$ мс и $\Delta_{yx} = 0$ и параметров связи $K_{yx} = 0.15$, $K_{xy} = 0.05$, $\mu_{yx} = 0.05$ и $\mu_{xy} = 0.15$. При этом, несмотря на то, что линейная компонента воздействия присутствует в связи в обоих направлениях, в направлении от (3.9) к (3.8) линейная модель даже достаточно высокой размерности ($D_s = 50$ и $D_a = 50$) не может выявить значимую связь; в то время как нелинейная модель низкой размерности ($D_s = 3$, $D_a = 1$) с полиномом 3-го порядка не только обнаруживает её, но и позволяет достаточно точно определить значение задержки Δ_{xy} . Аналогичные результаты были получены и при других значениях параметров при различных уровнях шума — значениях σ_l^2 и σ_v^2 .

Таким образом, результаты подтверждают целесообразность применения нелинейных моделей в задаче оценки связанности между системами по их сигналам при наличии запаздывания в связях несмотря на дополнительные пробле-

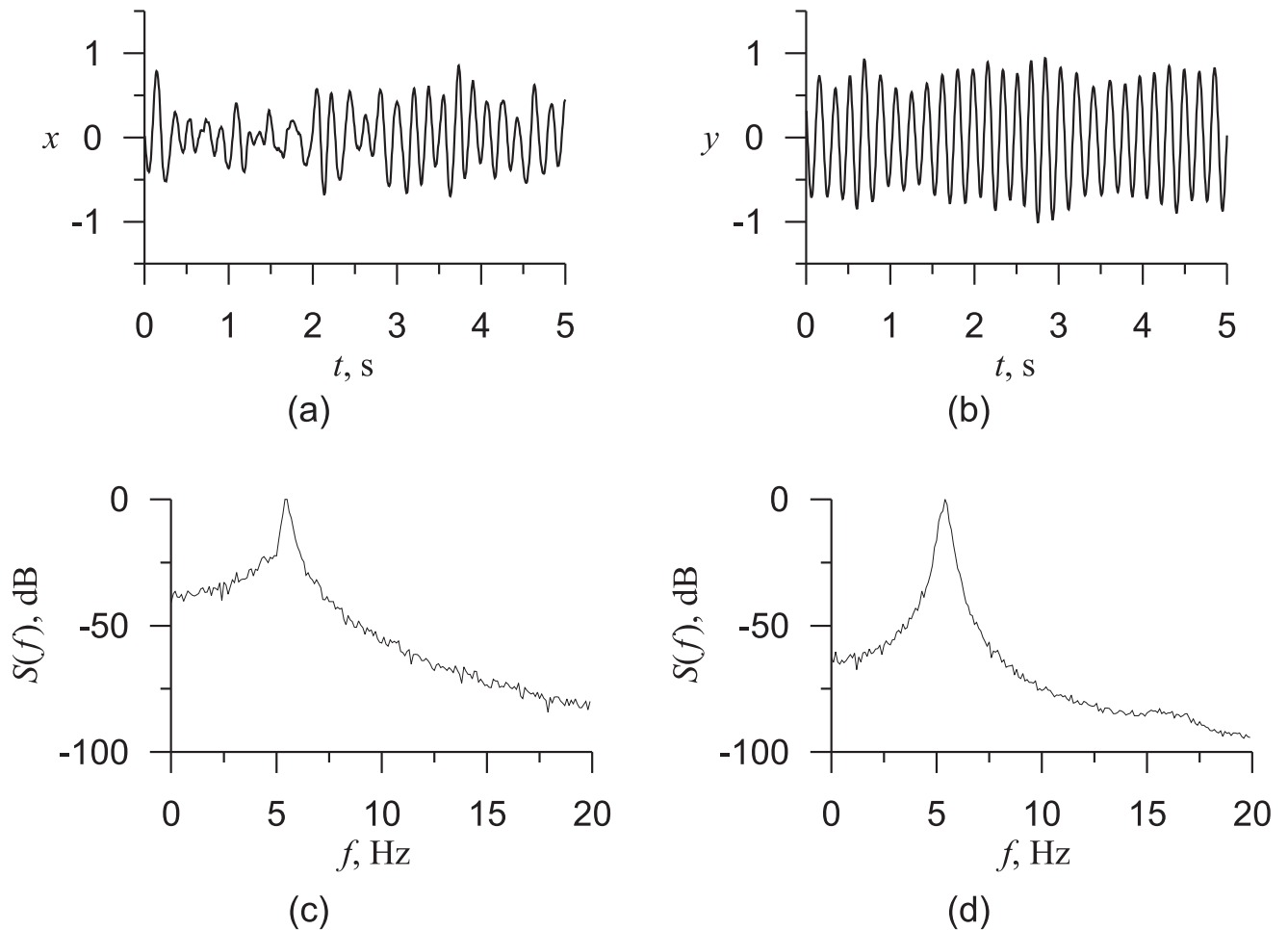


Рис. 3.10. (a, b) — временные ряды модельных систем (3.8) и (3.9), (c, d) — их спектры мощности.

мы, возникающие при использовании нелинейного подхода, такие как зависимость результатов от конкретного вида нелинейности и чрезмерное увеличение числа коэффициентов при использовании аппроксимирующих функций общего вида (алгебраических и тригонометрических полиномов), что, в свою очередь, повышает влияние шумов и требования к длине временной реализации.

3.4. Выбор временных масштабов при построении эмпирической модели

В данном разделе рассматривается задача оптимального учёта временных масштабов исходного временного ряда при построении эмпирических прогно-

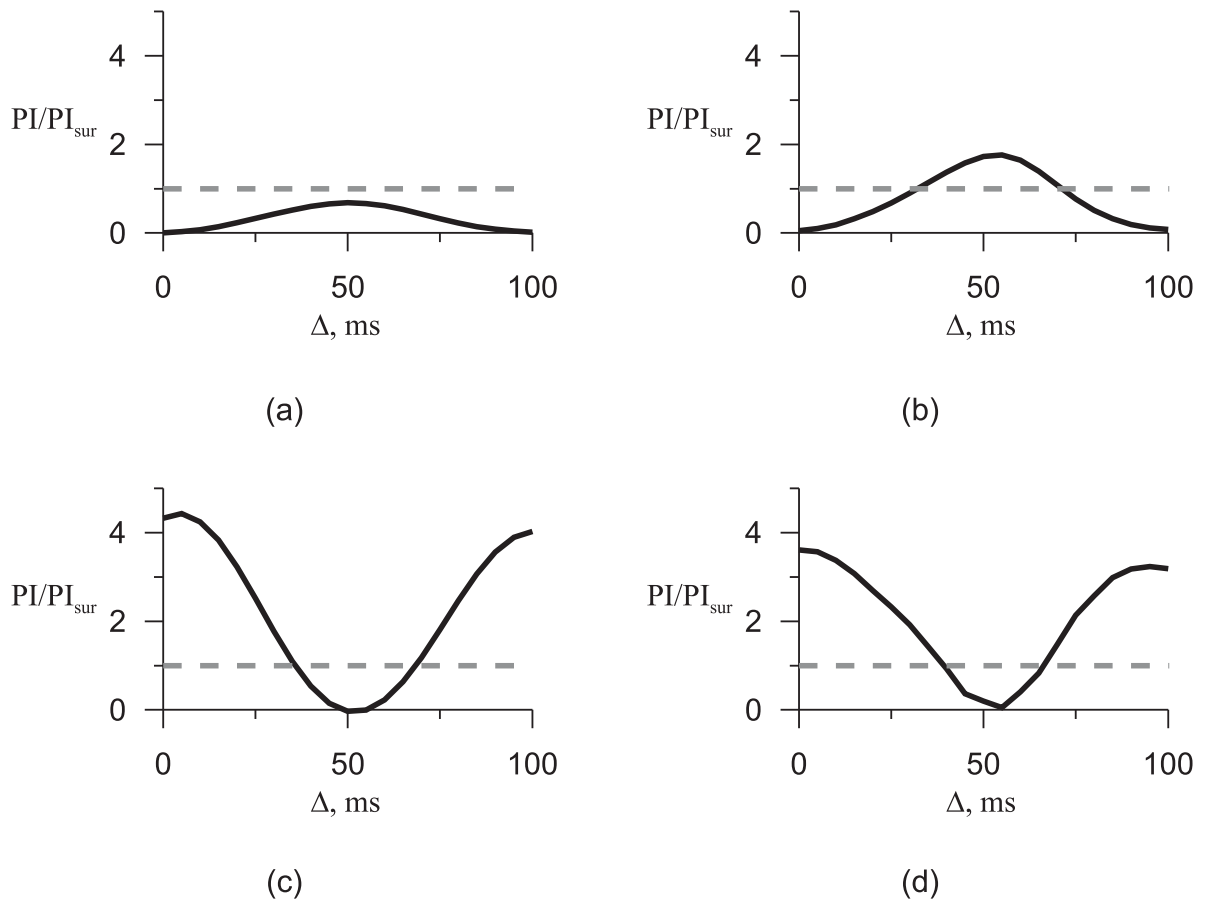


Рис. 3.11. Зависимость улучшения прогноза PI , нормированного на полный 95%-ный квантиль PI_{abs} , от временной задержки Δ (чёрная сплошная линия): (а, с) для линейной модели, (b, d) для нелинейной; (а, b) в направлении от (3.9) к (3.8) и (с, d) от (3.8) к (3.9). Штриховая серая линия обозначает 95%-ный квантиль (равен 1 вследствие нормализации). Значения, превышающие 1, признаются значимыми с вероятностью 95%.

стических моделей, используемых далее для оценки причинности по Грейнджеру. Предлагается для сравнительно коротких временных рядов, характерных, в частности, для медико-биологических приложений, использовать комбинацию из дальности прогноза и лага — различных по величине. Для подбора дальности прогноза и лага построены автоматизированные методики. Предложенный подход апробируется на большом числе различных эталонных систем, по итогам формулируются конкретные рекомендации по выбору дальности прогноза.

В данной работе модели строились в виде нелинейного отображения последования вида (3.1) для индивидуальной модели и (3.2) — для совместной.

При построении модели часто ограничиваются единственным лагом (он же и дальность прогноза), равным единице. Однако такой подход нередко приводит к малоэффективным и громоздким моделям с большой размерностью и огромным числом коэффициентов. В ряде работ, например, в [161] предлагаются алгоритмы выбора оптимальных величин и количества временных лагов. Недостатком этих подходов является требование большого объёма данных: нужно иметь длинные временные ряды или их ансамбли. Далее предлагается компромиссный подход к учёту имеющихся в системе временных масштабов — использовать две различные величины: дальность прогноза и лаг. Таким образом, по сравнению с введением двух различных лагов можно уменьшить вычислительные затраты на подбор и использовать сравнительно короткие временные ряды, что типично, например, для медико-биологических приложений.

Влияние дальности прогноза и лагов на причинность по Грейнджеру исследуется с помощью тестовых примеров, поскольку в них известны все параметры (размерность, порядок полинома), а направленность и силу связи (коэффициент k) мы можем задать сами.

В качестве тестовых примеров использовались следующие связанные системы:

1. Процессы авторегрессии первого порядка:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha x_n + k y_n + \xi_n \\ y_{n+1} &= \beta y_n + \eta_n,\end{aligned}\tag{3.10}$$

где $\alpha = 0.99$, $\beta = 0.98$.

2. Процессы авторегрессии второго порядка:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_{n-1} + k y_n + \xi_n \\ y_{n+1} &= \beta_1 y_n + \beta_2 y_{n-1} + \eta_n,\end{aligned}\tag{3.11}$$

где $\alpha_1 = \beta_1 = 1.99$, $\alpha_2 = \beta_2 = -0.99$.

3. Системы Фитцхью–Нагумо:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= x_1(a - x_1)(x_1 - 1) - x_2 + I_a + ky_2 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= bx_1 - \gamma x_2 \\
 \frac{dy_1}{dt} &= y_1(a - y_1)(y_1 - 1) - y_2 + I_a \\
 \frac{dy_2}{dt} &= by_1 - \gamma y_2,
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

$a = 0.8$, $b = 0.008$, $\gamma = 0.0033$, $I_a = 0.84$. Уравнения интегрировались методом Эйлера с шагом $h = 0.5$, поскольку в систему вводился динамический шум со среднеквадратичным отклонением $\sigma_n = 0.02\sigma_s$, где σ_s — среднеквадратичное отклонение сигнала. Устойчивость алгоритма тестировалась путём проверки на меньших шагах; далее временной ряд перебирался с шагом $\Delta t = 3h$, чтобы получить $\sim 10^2$ отсчётов на характерном периоде.

4. Системы Рёсслера:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -(x_2 + x_3) + ky_1, & \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + a_x x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= b_x - x_3(x_1 - c_x), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -(y_2 + y_3), & \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + a_y y_2, & \frac{dy_3}{dt} &= b_y - y_3(y_1 - c_y),
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

где $a_x = 0.398$, $b_x = 2$, $c_x = 4$, $a_y = 0.2$, $b_y = 0.2$, $c_y = 5.7$ для хаотического режима и $a_x = 0.3$, $b_x = 0.2$, $c_x = 1.5$, $a_y = 0.25$, $b_y = 0.2$, $c_y = 2$ для периодического. В периодическом режиме система интегрировалась методом Эйлера с шагом $h = 0.0001$ и динамическим шумом ~ 2 , данные перебирались с интервалом $\Delta t = 500h$; в хаотическом — методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.005$ без динамического шума, и данные перебирались с шагом $\Delta t = 10h$.

5. Системы Лоренца:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_x(x_2 - x_1) + ky_1, & \frac{dx_2}{dt} &= x_1(b_x - x_3) - x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - c_x x_3, \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_y(y_2 - y_1), & \frac{dy_2}{dt} &= y_1(b_y - y_3) - y_2, & \frac{dy_3}{dt} &= y_1y_2 - c_y y_3,\end{aligned}\tag{3.14}$$

где $a_x = 10$, $b_x = 46$, $c_x = 8/3$, $a_y = 10.01$, $b_y = 47$, $c_y = 8/3$ для хаотического режима. Система интегрировалась методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.001$ без динамического шума, и данные переывыбирались с шагом $\Delta t = 4h$.

Во всех случаях к сгенерированным временным рядам добавлялись реализации измерительного нормального некоррелированного шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_m = 0.01\sigma_s$. От каждой системы записывались короткие временные ряды длиной 2000 отсчётов, или $\sim 20 - 30$ характерных периодов. Такая длина рядов была выбрана, поскольку она типична для разного рода физиологических данных, например, сигналов элетроэнцефалограмм, магнитоэнцефалограмм, электрокардиограмм и др.

3.4.1. Выбор оптимального лага и дальности прогноза

Причинность по Грейнджеру показывает максимально корректные результаты, если индивидуальная модель подобрана наилучшим образом, поскольку иначе улучшение прогноза может быть обусловлено наличием во втором сигнале информации, присутствующей также и в первом, но недостаточно учтённой. Например, такое может быть, если на самом деле воздействие одностороннее, но направлено в сторону, противоположную предполагаемой, либо обе рассматриваемые системы находятся под некоторым общим внешним воздействием. Поэтому оптимальный лаг l подбирался по критерию минимизации ошибки аппроксимации именно индивидуальной модели — ε_s^2 , при этом осуществляется перебор значений в определённом диапазоне, начиная от единицы. Такой подбор осуществляется при каждой дальности прогноза. Из рис. 3.12(a, b, c, d)

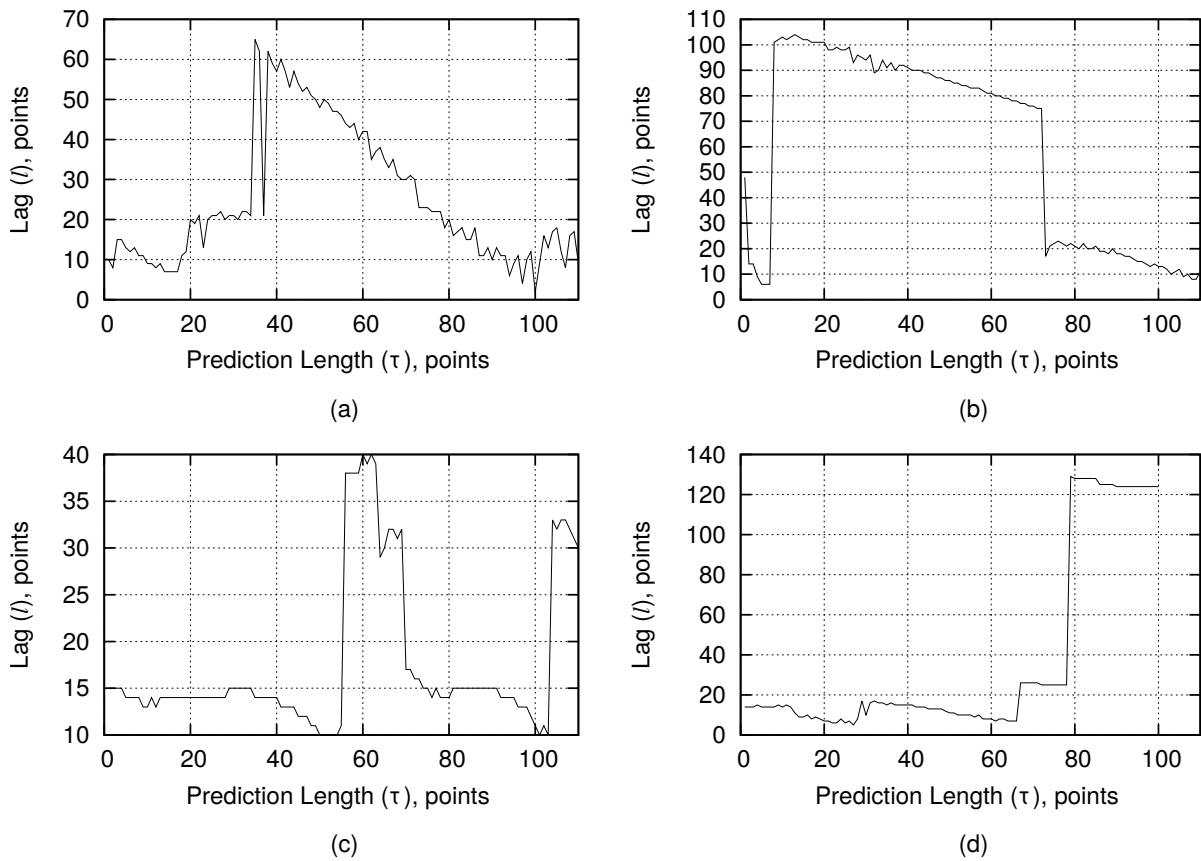


Рис. 3.12. Зависимость оптимального лага l от дальности прогноза τ . Сверху типичные картинки для периодических временных реализаций: (a) — от систем Фитцью–Нагумо и (b) — от систем Рёсслер), снизу — для хаотических временных реализаций (c) — систем Рёсслера и (d) — систем Лоренца. Везде порядок полинома $P = 5$.

видно, что на графиках зависимости оптимальных лагов от дальности прогноза как для периодических, так и для хаотических процессов наблюдаются склоны и горизонтальные участки. Склоны на графиках соответствуют ситуациям, когда оптимальным является учёт точки, отстоящей на определенное расстояние от предсказываемой.

Методика исследования зависимости причинности по Грейнджеру от дальности прогноза заключалась в следующем:

1. Генерировалось 100 пар рядов без связи ($k = 0$), для каждой пары рассчитывается улучшение прогноза PI , 95-е по величине значение выводим на график (чёрная горизонтальная линия на рис. 3.13). Таким образом осуществляется проверка значимости на уровне 5%.

2. Генерировались ряды с однонаправленной связью. Для каждого значения k — 100 пар рядов, для каждой пары рассчитывался показатель улучшения прогноза PI , и вычислялось среднее значение, которое выводилось на график для каждой силы связи (серая линия на рис. 3.12).
3. Если среднее значение PI для данной силы связи k лежало выше 95%-ого уровня (т. е. на рисунке серая линия лежит выше чёрной), улучшение прогноза считалось значимым. Обозначим пересечение этих двух линий \bar{k} . Чем раньше пересечение (т. е. чем меньше \bar{k}), тем выше чувствительность метода.
4. Описанные выше наги повторялись для различных значений дальности прогноза. По результатам таких вычислений строились графики зависимости порога чувствительности от дальности прогноза $\bar{k}(\tau)$. Закрашенная серым на рис. 3.14 область показывает диапазон значений коэффициента связи, в котором обнаруживается значимая связь. Закрашенная на рис. 3.14 белым область — диапазон, в котором метод считает связь незначимой.
5. Подобные графики зависимости порога чувствительности от дальности прогноза $\bar{k}(\tau)$ строятся для связи в правильную и неправильную сторону (рис. 3.14(a, b) соответственно).

Оптимальная дальность прогноза определяется по двум показателям:

1. чувствительность метода: значимая связь в правильную сторону обнаруживается при как можно меньшем значении коэффициента связи;
2. специфичность метода: значимая связь в неверную сторону должна определяться как можно реже, при как можно больших значениях силы связи (в идеале не определяться вообще).

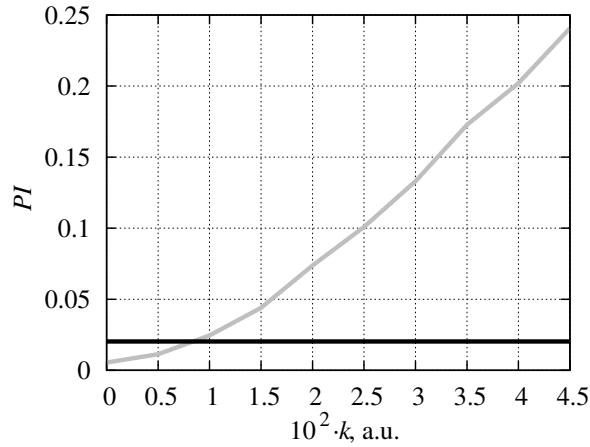


Рис. 3.13. Зависимость улучшения прогноза PI от коэффициента связи k при фиксированной дальности прогноза τ . Чёрная горизонтальная линия — 95-ое по величине улучшение прогноза PI для $k = 0$ (проверка значимости); серая линия — среднее значение улучшения прогноза для каждого коэффициента связи.

Если ориентироваться на чувствительность метода, то получаются следующие результаты. Для процессов авторегрессии первого порядка с ростом дальности прогноза чувствительность метода падает, т. е. предпочтительными являются единичные дальности прогноза. Это согласуется с тем фактом, что такие сигналы не имеют выделенного временного масштаба. Для периодических режимов: процессов авторегрессии второго порядка, систем Фитцхью–Нагумо, систем Рёсслера в периодическом режиме практически для всех дальностей прогноза чувствительность метода одинаковая, причём для единичных дальностей прогноза чуть лучше. Только при дальности прогноза, равной или характерному периоду T или его половине, чувствительность падает, поскольку улучшение предсказательной способности индивидуальной модели ухудшает работу метода. Для хаотических режимов систем Рёсслера и Лоренца чувствительность метода на всех дальностях прогноза примерно одинаковая. Чуть лучше метод работает при $\tau \sim \frac{T}{2}$ и $\tau \sim T$. И чуть хуже при единичных дальностях прогноза.

Однако качество модели для определения связанности невозможно оценить, анализируя только чувствительность метода, так же как и нельзя сделать

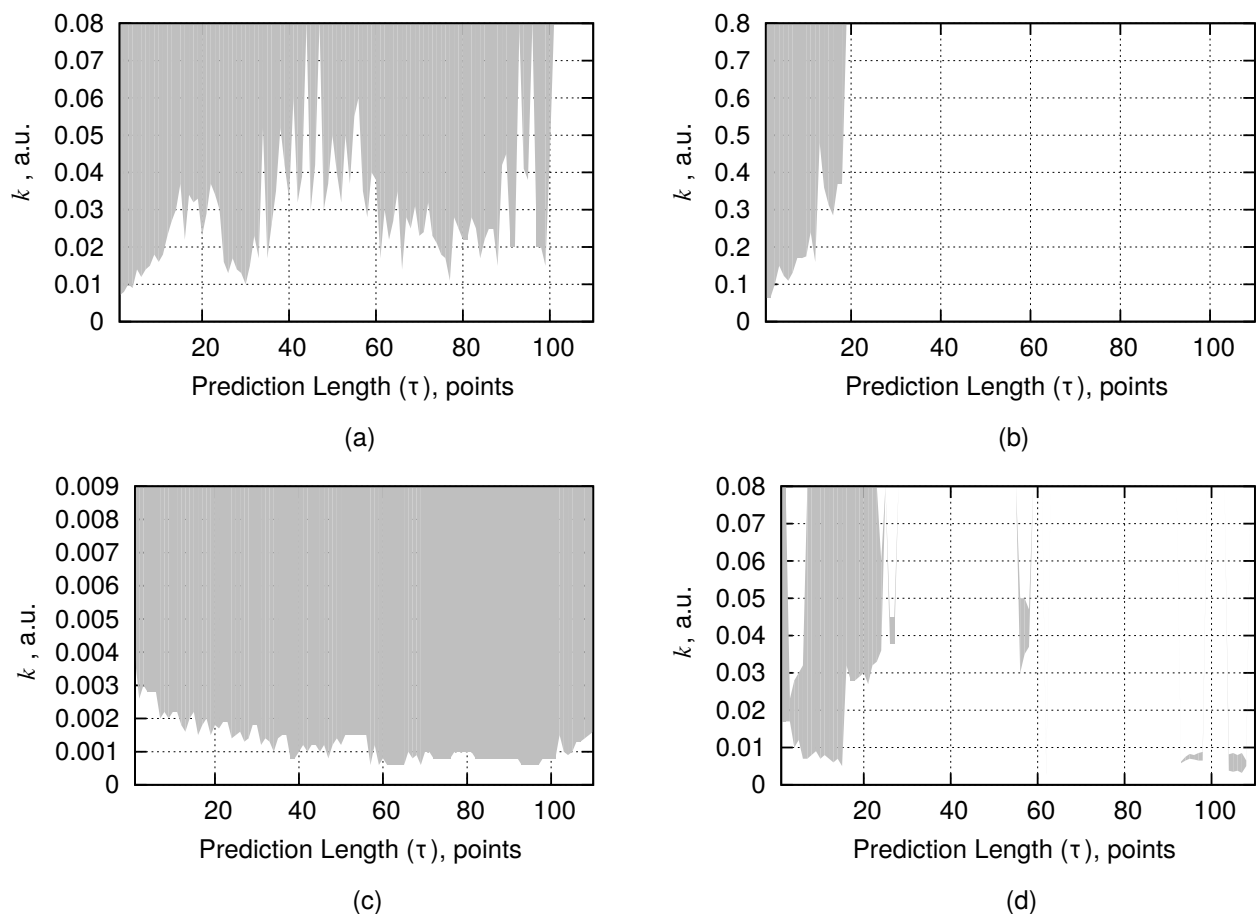


Рис. 3.14. Зависимость порога чувствительности \bar{k} от дальности прогноза τ в заведомо верную сторону (слева) и в заведомо неверную (справа). Сверху типичная картинка для периодических, снизу — для хаотических процессов. Серая область — диапазон значений коэффициента связи, в котором обнаруживается значимая связь. Белая область — диапазон значений коэффициента связи, в котором связь расценивается как незначимая.

это, опираясь только на собственные прогностические её свойства, как это было показано в предыдущем разделе. Ошибки первого рода (найденные «лишние» связи) часто гораздо опаснее, чем ошибки второго — пропущенные связи. Поэтому далее мы проанализировали также специфичность метода, т. е. Для процессов авторегрессии первого и второго порядка специфичность у метода очень хорошая, связь не обнаруживается для всех дальностей прогноза в широком диапазоне связей. Это, по-видимому, обуславливается хорошим соответствием структуры модели объекту, так как по сути авторегрессионные модели описывают процессы, порождённые авторегрессионными же системами. Имеет место

ситуация, близкая к описанной ранее для связанных отображений окружности.

Для систем Фитцхью–Нагумо связь обнаруживается для маленьких дальностей прогноза; для систем Рёсслера — для маленьких дальностей прогноза и для дальностей прогноза в районе половины характерного периода ($\tau \gtrsim \frac{T}{2}$). Для хаотических процессов от систем Рёсслера и Лоренца связь в заведомо ложную сторону обнаруживается для малых τ и при $\frac{T}{2} < \tau < T$.

Подводя итог, для систем из описанных классов можно дать предварительную рекомендацию брать дальность прогноза, равную четверти характерного периода ($\tau = \frac{T}{4}$). Хотя в отдельных примерах это может быть не самым оптимальным выбором, в среднем оказывается, что в таком случае мы получаем хорошую специфичность метода при достаточно хорошей чувствительности. То есть вероятность ложных выводов относительно направления связи, определяемой методом Грейнджера, мала. Из общих теоретических соображений этот вывод может быть подтверждён тем, что четверть характерного периода примерно соответствует нулю автокорреляционной функции — расстоянию между отсчётами, на котором они статистически линейно не связаны, таким образом последовательно включённые в вектор состояния точки несут максимально возможное количество информации (по крайней мере, для линейных моделей). Вследствие этого индивидуальная модель лучше описывает наблюдаемый сигнал, снижая вероятность получения ложных положительных результатов о наличии связей, что подтверждается результатами численных экспериментов.

3.5. Интегрированные критерии эффективности метода

Ясно, что достижение наивозможно высокой чувствительности и максимальной специфичности метода причинности по Грейнджеру одновременно невозможно, поскольку эти требования являются взаимно исключающими. В предыдущем разделе были сформулированы некоторые рекомендации к выбору параметров. Идея предложенного там подхода фактически сфор-

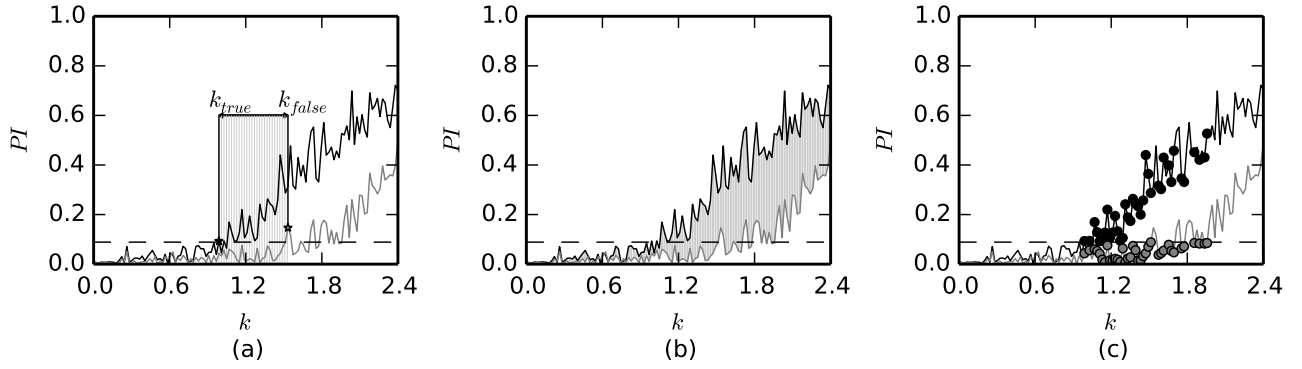


Рис. 3.15. Зависимость улучшения прогноза PI от коэффициента связи k для однонаправленно связанных колебательных систем. Рис. (а) — типичный график зависимости $PI(k)$, где k_{true} минимальное значение коэффициента связи, при котором связанность определяется как значимая в заведомо верную сторону (пересечение чёрной ломаной и горизонтальной штриховой линии, соответствующей суррогатному уровню), и k_{false} есть минимальная величина коэффициента связи, при которой связь определяется как значимая в заведомо ложную сторону (пересечение горизонтальной штриховой линии и серой ломаной). Рис. (б) иллюстрирует критерий (3.15), его геометрический смысл — отношение площади закрашенной области к общей площади графика. Рис. (с) иллюстрирует критерий (3.16), здесь значение критерия можно определить как отношение числа жирных точек (чёрных или серых — всё равно), при которых $\delta = 1$ в формуле (3.16) к общему числу исследованных коэффициентов связи (в данном случае — 100).

мулирована на рис. 3.13. При оценке однонаправленной связи этот рисунок можно переработать, отложив на нём кроме две зависимости $PI(k)$: зависимость PI_k при оценке связанности в заведомо верную сторону (чёрная линия на рис. 3.15) и аналогичную зависимость в заведомо ложную сторону (серая линия на рис. 3.15).

Однако для достижения нашей цели — изучения зависимости результатов от двух параметров: лага l и дальности прогноза τ — полученные зависимости $PI(k)$ нуждаются в дополнительной обработке, поскольку в действительности следует рассматривать трёхмерную зависимость $PI(k, l, \tau)$, так как значение коэффициента связи в действительности неизвестно. Такую зависимость невозможно отобразить графически интуитивно понятным образом. Поэтому необхо-

димым оказывается разработать интегральные критерии эффективности, учитывающие все возможные значения k и отражающие как чувствительность, так и специфичность метода. Нижняя граница диапазона коэффициентов связи соответствует отсутствию связей — $k = 0$. За верхнюю границу следует принять значение k , соответствующее синхронизации ведущей и ведомой систем, поскольку за порогом синхронизации (в синхронном режиме) детектирование направления связи более невозможно. Чтобы оценить верхнюю границу возможных значений $k = k_{\max}$, оценивался коэффициент фазовой синхронизации. Для этого использовался подход, предложенный в [162].

Далее предлагаются два численных критерия (3.15) и (3.16) для определения оптимальных с точки зрения сочетания чувствительности и специфичности значений лага l и дальности прогноза τ . В некотором смысле они похожи на хорошо известный критерий Шварца [31], часто используемый для определения оптимальной размерности и числа базисных функций при эмпирическом моделировании. Сходство заключается в том, что предлагаемые критерии основаны на числе успешно найденных действительно существующих связей и вводят штраф за обнаруженные ложные связи.

$$S_1 = \langle PI_{true}(k) - PI_{false}(k) \rangle_k \quad (3.15)$$

$$S_2 = \frac{1}{Z_k} \sum \delta(k),$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & PI_{true} > PI_{sign} \wedge PI_{false} < PI_{sign}, \\ 0, & PI_{true} \leq PI_{sign} \vee PI_{false} \geq PI_{sign}, \end{cases} \quad (3.16)$$

где PI_{true} , PI_{false} — значения показателя улучшения прогноза, полученные при поиске связи в заведомо верном и ложном направлении соответственно, PI_{sign} — некоторый уровень значимости, k — предполагаемое значение коэффициента связи между системами.

Первый критерий позволяет оценить среднюю разницу между значениями PI_{true} и PI_{false} по всем значениям коэффициента связи k — см. 3.15(b).

Второй критерий отражает количество специфичных и одновременно значимых выводов о наличии связи, нормированное на общее количество выводов — см. рис. 3.15(с). По построению первый критерий может варьировать на отрезке $[0; 1]$, а второй — на отрезке $[-1; 1]$. Причём значения $S_1 = S_2 = 1$ соответствуют одновременно идеальной чувствительности и идеальной специфичности, значения $S_1 = S_2 = 0$ — случаю, когда метод не может определить направление связанности (связь либо оценивается как двунаправленная, либо вообще не восстанавливается), а случай $S_2 < 0$ означает, что метод путает направление связи. При этом критерии дополняют друг друга. Так, критерий (3.15) отражает преимущественное направление воздействия, но не учитывает выводов о значимости. Таким образом, он может использоваться также для двунаправленно связанных систем при условии существенной асимметрии в силе связи в противоположных направлениях. Критерий (3.16) более строгий и позволяет охарактеризовать ширину области значений коэффициента связи, в которой возможно гарантированное однозначное определения направления связи без учёта её силы.

3.5.1. Численный эксперимент. Связанные уравнения генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича

Рассмотрим связанные уравнения радиотехнического генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича [16]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.15x_1 + x_2 - 0.93x_3 + ky_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \\ 0.2\dot{x}_3 = x_1 - f(x_3), \\ \dot{y}_1 = 0.23y_1 + y_2 - 0.755y_3 \\ \dot{y}_2 = -y_1 \\ 0.2\dot{y}_3 = y_1 - f(y_3), \\ f(p) = 8.592p - 22p^2 + 14.408p^3 \end{cases} \quad (3.17)$$

Эти уравнения интересны тем, что демонстрируют хаотический режим, очень близкий к регулярному, в спектре которого выражен один основной временной масштаб (см. рис. 3.16 а), автокорреляционная функция спадает очень медленно (см. рис. 3.16 б) и фаза может быть легко введена безо всяких дополнительных преобразований.

Как и в предыдущих разделах, уравнения генераторов решались численно адаптивным методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом выборки $\Delta t = 0.01$. Рассматривались временные ряды из $N = 20480$ отсчётов, переходный процесс длиной $T_{trans} = 1000$ единиц безразмерного времени обрезался. Аналогичные значения Δt , N и T_{trans} были использованы далее для всех рассмотренных в данном разделе систем. Основной временной масштаб T примерно равен 611 отсчётам (6.11 единиц безразмерного времени). Коэффициент связи варьировал от 0 до 0.038. Старший ляпуновский показатель как ведущей, так и ведомой системы был примерно равен $\Lambda_1 \approx 0.059$, в то время как их параметры немного отличались (см. (3.17)). Эффективный коэффициент диффузии фазы ведомой системы был очень мал и составлял $< 10^{-5}$.

Из рис. 3.16(d–g) можно видеть, что значения l , примерно равные характерному временному масштабу колебаний ведомой системы или его половине, являются наихудшими для обоих типов модели — как с полиномиальными, так и локально линейными функциями. Это не удивительно, поскольку в таком случае компоненты реконструированного вектора состояния оказываются близки к линейно зависимым из-за высокой регулярности сигнала. Также видно, что значение τ , равное одному шагу выборки, не является хорошим выбором, по крайней мере для полиномиальной модели, что соответствует нашим результатам, полученным в предыдущем разделе для отдельных коэффициентов связи на других системах.

Как видно из рис. 3.16(g), использование локально линейных моделей ведёт к достаточно слабым результатам. Даже при наилучшем выборе l и τ удаётся верно идентифицировать имеющиеся связи только в 20% случаев, при усло-

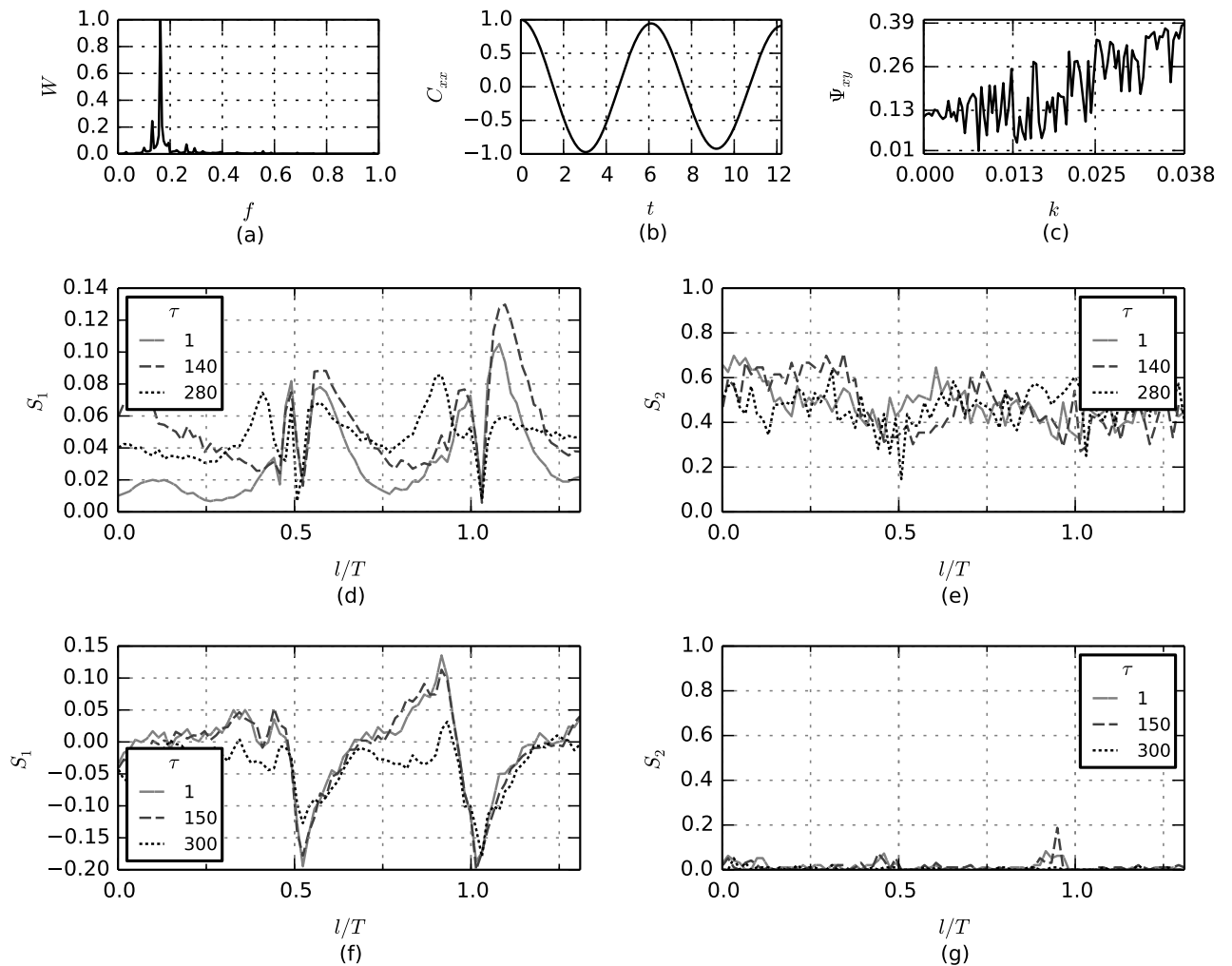


Рис. 3.16. Спектр (а), автокорреляционная функция (b) и зависимость коэффициента фазовой синхронизации Ψ_{xy} от коэффициента связи k для ведомого осциллятора Кияшко–Пиковского–Рабиновича. Зависимости критериев (3.15) и (3.16) для однонаправленно связанных осцилляторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича от лага l для различных значений дальности прогноза τ : (d) и (f) для критерия S_1 , (e) и (g) для критерия S_2 . Зависимости (d, e) соответствуют полиномиальной аппроксимации нелинейных функций с порядком полинома $P = 3$, а зависимости (f, g) — локально линейной аппроксимации. Размерности составляли $D_s = 2$ и $D_a = 1$ для всех случаев.

вии, что связь в ложном направлении не находится. В то же время для полиномиальных моделей число верных выводов может достигать 72%, но выбор l и τ очень важен, так как неудачные значения этих параметров ведут к четырёхкратному (до 18%) падению числа верных детектирований структуры связей.

Построенные на рис. 3.16(d–g) зависимости были получены при $D_s = 2$, но если увеличить размерность модели до $D_s = 3$, их качественный вид сохранится. Аналогичные результаты можно получить для модели с полиномиальными функциями, используя комбинацию параметров $D_s = 3$ и $P = 2$.

3.5.2. Связанные осцилляторы Рёсслера

Система Рёсслера [150] — одна из наиболее изученных и популярных в нелинейной динамике, и потому метод также был протестирован на связанных системах Рёсслера вида (3.18).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2 + k y_2 \\ \dot{x}_3 = b_1 - (c_1 - x_1) x_3 \\ \dot{y}_1 = -y_2 - y_3 \\ \dot{y}_2 = y_1 + a_2 y_2 \\ \dot{y}_3 = b_2 - (c_2 - y_1) y_3 \end{cases} \quad (3.18)$$

Наблюдались временные ряды координат x_2 и y_2 . Исследовался слабохаотический режим, для которого старший ляпуновский показатель для обеих систем (ведомой и ведущей) составлял примерно 0.060, что сопоставимо со значениями для уравнений генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича. Эффективный коэффициент диффузии фазы равнялся ≈ 0.003 , т.е. был более чем в 30 раз больше, чем в примере, рассмотренном ранее. На спектре колебаний отмечается один главный пик (см. рис. 3.18(a)), соответствующий временному масштабу, составляющему порядка 620 отсчётов времени (аналогичные выводы могут быть сделаны по автокорреляционной функции, см. рис. 3.18(b)). Тем не менее, авто-

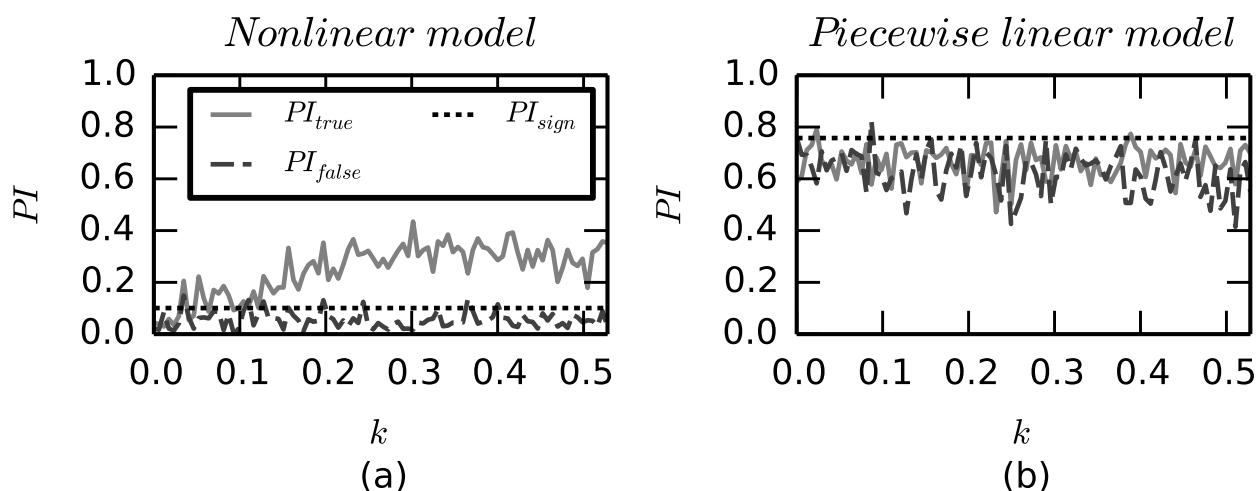


Рис. 3.17. Типичные зависимости показателя улучшения прогноза PI от коэффициента связи k для связанных систем Рёсслера 3.18 при различных типах модели: (a) — полиномиальной; (b) — кусочно линейной.

корреляция в данной системе спадает быстрее, а сам пик в спектре существенно шире, чем для уравнений генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича.

При использовании полиномиальной модели (см. рис. 3.18(d, e)) зависимости обоих предложенных критериев S_1 и S_2 от лага модели l для всех рассмотренных значений дальности прогноза τ имеют чёткие минимумы. Таким образом, эти результаты повторяют результаты, полученные для связанных генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича. В то же время, локально линейные модели дают совершенно противоположные результаты: метод оказывается более-менее применим только для $l \approx T/2$ и $l \approx T$, демонстрируя неприемлемо плохую чувствительность и специфичность во всех других случаях.

Детальное изучение результатов, полученных с помощью локально линейных моделей, позволило понять, что для большинства значений l основной проблемой является нечувствительность метода к росту коэффициента связи — PI не растёт с ростом k , как это показано на рис. 3.17. Таким образом, локально линейная модель не получает значимых преимуществ от введения членов, ответственных за связь. Поэтому-то, именно при выборе $l = T/2$ или $l = T$, когда

информации в векторе состояния оказывается недостаточно из-за высокой корреляции входящих в него компонент, члены, ответственные за связь, приобретают хотя бы какую-то ценность. Но при этих значениях l возрастает не только PI_{true} , но и PI_{false} возрастают для всех осцилляторов, кроме системы Рёсслера. Атипичная зависимость PI_{false} от l для локально линейных моделей, вызванная индивидуальными особенностями аттрактора Рёсслера, ведёт к тому, что наилучшие в других случаях значения параметров оказались здесь лучшими.

3.5.3. Связанные генераторы Анищенко–Астахова

Далее для общности рассмотрим уравнения связанных генераторов Анищенко–Астахова [17]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1.106x_1 + x_2 - x_1x_3 + ky_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \\ \epsilon\dot{x}_3 = -0.68x_3 + \theta(x_1)x_1^2 \\ \dot{y}_1 = 1.111y_1 + y_2 - y_1y_3 \\ \dot{y}_2 = -y_1 \\ \dot{y}_3 = -0.7y_3 + \theta(y_1)y_1^2 \\ \theta(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ at } x \leq 0 \\ 1 & , \text{ at } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.19)$$

Значения коэффициента связи были ограничены сверху значением 0.15. Положительный старший ляпуновский показатель ведомой системы составлял $\Lambda_1 = 0.136$.

Автокорреляционная функция (см. рис. 3.19(b)) показывает один основной временной масштаб, примерно равный 683 отсчётам времени (6.83 единиц безразмерного времени), но спектр мощности демонстрирует два основных пика (рис. 3.19(a)). Также автокорреляционная функция явно асимметрична, что не наблюдалось для систем Кияшко–Пиковского–Рабиновича и Рёсслера (ср. рис. 3.18(b) и рис. 3.16(b)).

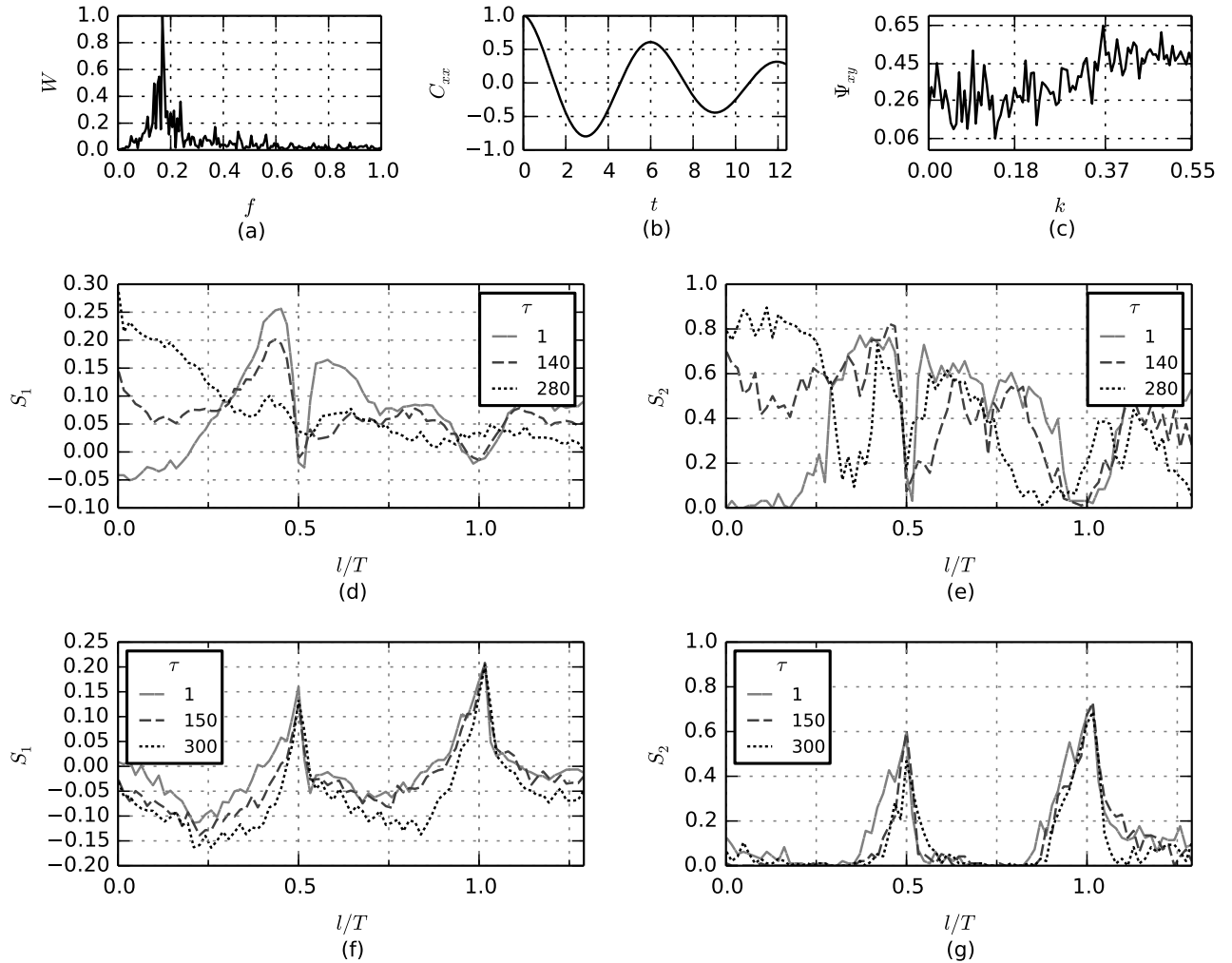


Рис. 3.18. Спектр (a), автокорреляционная функция (b) и зависимость коэффициента фазовой синхронизации Ψ_{xy} от коэффициента связи k для ведомого осциллятора Рёсслера. Зависимости критериев S_1 (3.15) и S_2 (3.16) для однонаправленно связанных систем Рёсслера от l при различных значениях дальности прогноза: (d) и (f) — для критерия S_1 , (e) и (g) — для критерия S_2 . Зависимости (d, e) соответствуют полиномиальным аппроксимирующим функциям со степенью полинома $P = 3$, в то время как зависимости (f, g) — локально линейным. Размерности $D_s = 2$, $D_a = 1$ были использованы во всех случаях.

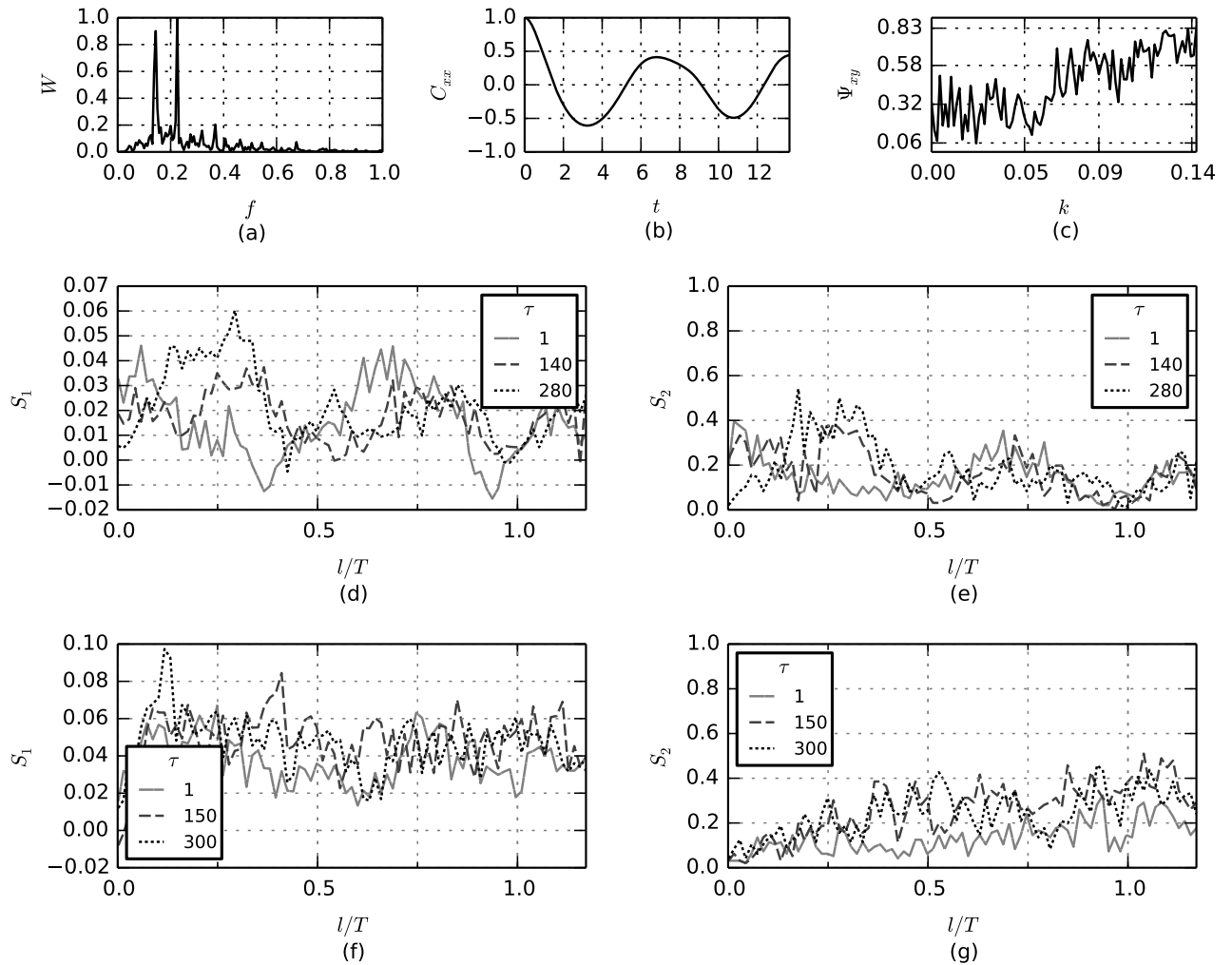


Рис. 3.19. Спектр (а), автокорреляционная функция (b) и зависимость коэффициента фазовой синхронизации Ψ_{xy} от коэффициента связи k для ведомого генератора Анищенко–Астахова. Зависимости критериев (3.15) и (3.16) для однонаправленно связанных генераторов Анищенко–Астахова l при различных значениях дальности прогноза: (d) и (f) — для критерия S_1 , (e) и (g) — для критерия S_2 . Зависимости (d, e) соответствуют полиномиальным аппроксимирующим функциям со степенью полинома $P = 3$, в то время как зависимости (f, g) — локально линейным. Размерности $D_s = 2$, $D_a = 1$ были использованы во всех случаях.

На рис. 3.19(d) представлены результаты расчёта критерия S_1 для полиномиальной модели и можно отметить те же два минимума, что и для ранее рассмотренных систем: при $l \approx T/2$ и $l \approx T$. Однако они выражены более слабо и их точное положение зависит от выбора τ , что, видимо, объясняется большей сложностью колебаний и наличием второго пика в спектре. Аналогичную картину можно видеть и для второго предложенного критерия на рис. 3.19(e), хотя для него положение минимумов вблизи значений $T/2$ и T более устойчивое. Наилучшие результаты достигаются в диапазоне $T/4 \leq l \leq T/3$, примерно том же, что и для рассмотренных ранее систем Кияшко–Пиковского–Рабиновича и Рёсслера.

Зависимости, рассчитанные для локально линейных моделей в большинстве своём не демонстрируют выраженных минимумов кроме случая $\tau = 1$ (см. рис. 3.19(f, g)), для которого минимум значений обоих критериев наличествует при $l = T$, при этом само значение $\tau = 1$ является явно провальным вследствие наличия большого числа ложно положительных результатов, что согласуется с выводами предыдущего раздела.

3.5.4. Связанные генераторы Дмитриева–Кислова с полутора степенями свободы

Рассмотрим ещё один пример связанных уравнений радиотехнических генераторов — генераторы Дмитриева–Кислова [18], также известные как генераторы с полутора степенями свободы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (26x_3e^{-x_3^2} - x_1)/3 + ky_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2 - 0.21x_3. \\ \dot{y}_1 = (28y_3e^{-y_3^2} - y_1)/3, \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_3, \\ \dot{y}_3 = y_2 - 0.22y_3. \end{cases} \quad (3.20)$$

Значения коэффициента связи лежали на отрезке $0 < k \leq 0.2$, старший ляпуновский показатель был равен $\Lambda_1 = 0.148$, что заметно больше, чем у ранее рассмотренных систем. Наблюдались координаты x_1 и y_1 . Уравнения решались методом Рунге–Кутты 4-го порядка, интервал выборки составлял 0.03 для того, чтобы иметь примерно столько же точек на характерном периоде, что и в ранее рассмотренных примерах. Из-за сложности спектров (рис. 3.20(a)), по ним невозможно достаточно точно установить главный временной масштаб, но его значение $T \approx 20.2$ (т. е. 673 точек выборки) может быть установлено при анализе автокорреляционной функции — см. рис. 3.20(b).

Из рис. 3.20(d, e) можно видеть, что есть минимумы на зависимостях обоих критериев $S_1(l)$ и $S_2(l)$ от l в районе значений $l = T/2$ и $l = T$, хотя они менее выражены и выглядят более сложно, чем для ранее рассмотренных систем. Также, значение $\tau = 140$ близкое к $T/4$ смотрится заметно предпочтительнее по сравнению как с большими, так и с меньшими значениями дальности прогноза, основываясь на результатах применения критерия S_1 .

Локально линейные модели менее эффективны и менее чувствительны, чем полиномиальные, к выбору l , хотя для критерия $S_1(l)$ имеются минимумы в районе значений $T/2$ и T — см. рис. 3.20(f), причём эти минимумы общие для всех рассмотренных значений τ . Вообще же зависимости $S_1(l)$ и $S_2(l)$ очень изрезанные — см. рис. 3.20(g), например, то есть эффективность применения локально линейных моделей сложно гарантировать, так как малая ошибка в выборе параметров существенно может повлиять на результат.

3.5.5. Зависимость результатов от величины старшего ляпуновского показателя

Сравнивая результаты, полученные в предыдущих подразделах для различных эталонных систем, можно заметить, что зависимости $S_1(l)$ и $S_2(l)$ имеют тенденцию варьировать в зависимости от величины старшего ляпуновского показателя: с увеличением Λ минимумы и максимумы оказываются менее вы-

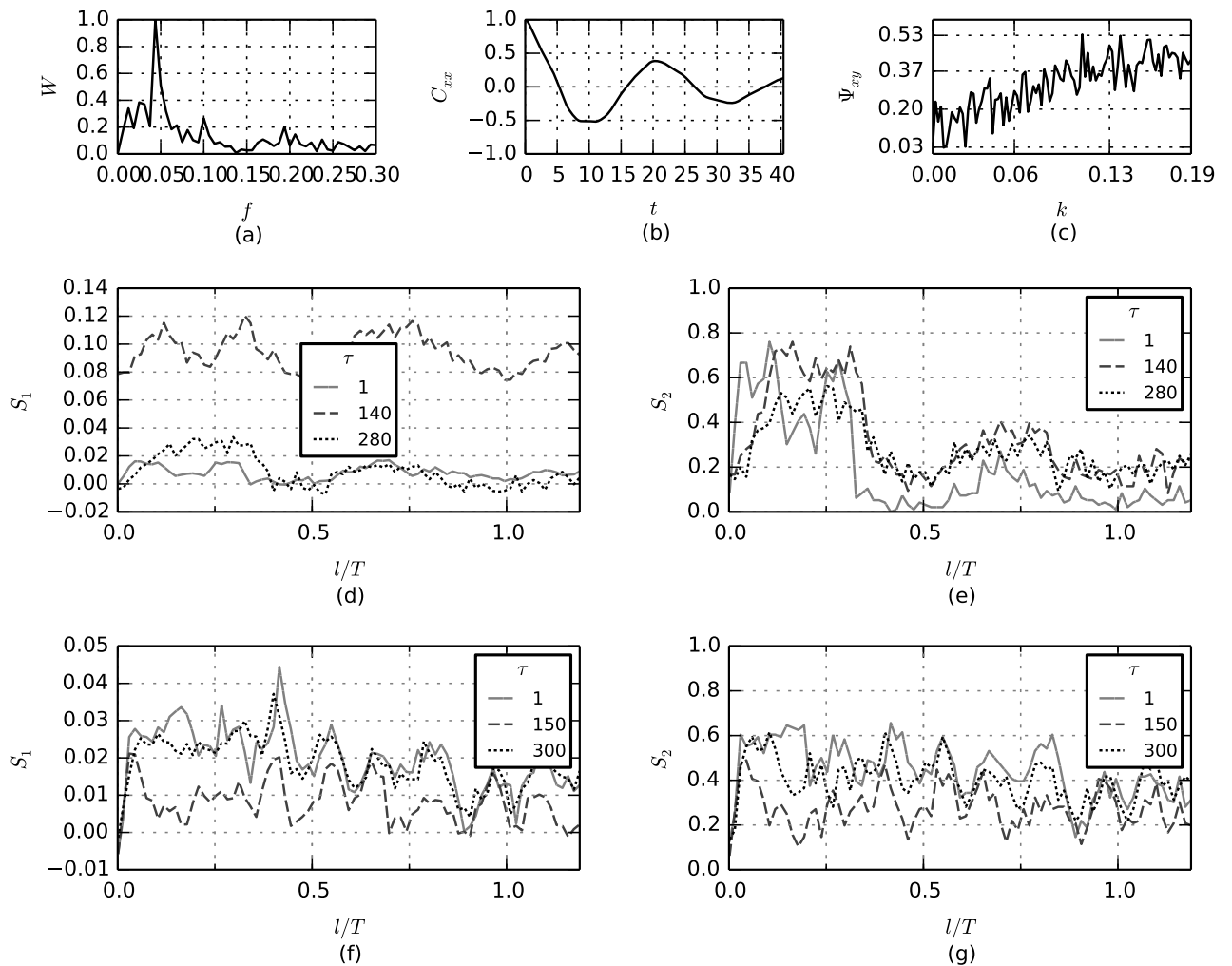


Рис. 3.20. Спектр (а), автокорреляционная функция (b) и зависимость коэффициента фазовой синхронизации Ψ_{xy} от коэффициента связи k для ведомого генератора Дмитриева–Кислова (с полутора степенями свободы). Зависимости критериев (3.15) и (3.16) для однонаправленно связанных генераторов с полутора степенями свободы l при различных значениях дальности прогноза: (d) и (f) — для критерия S_1 , (e) и (g) — для критерия S_2 . Зависимости (d, e) соответствуют полиномиальным аппроксимирующим функциям со степенью полинома $P = 3$, в то время как зависимости (f, g) — локально линейным. Размерности $D_s = 2$, $D_a = 1$ были использованы во всех случаях.

ражены. Чтобы протестировать этот факт, исключив возможное влияние индивидуальных свойств различных рассмотренных систем, были рассмотрены связанные осцилляторы Рёсслера (3.18) в различных хаотических режимах с различным значением старшего ляпуновского показателя: $\Lambda = 0.06^1$, $\Lambda = 0.08^2$, $\Lambda = 0.1^3$ и $\Lambda = 0.12^4$ (значения Λ рассчитывались для ведомой системы в отсутствие связи, т. е. при $k = 0$). Спектры мощности при различных Λ показаны на рис. 3.21(e–h), где видно, что основной пик соответствует частоте примерно ~ 0.18 . Мы рассчитали основной временной масштаб по автокорреляционной функции, см. рис. 3.21(a–d), как положение первого максимума. Для $\Lambda_1 = 0.06$, $\Lambda_1 = 0.08$ и $\Lambda_1 = 0.10$ характерный временной масштаб составлял $T \approx 6.2$ (620 точек выборки при $\Delta t = 0.01$), для $\Lambda_1 = 0.12$ он был несколько больше — $T = 6.55$. Регулярность сигнала уменьшается с ростом Λ , что выражается как в увеличении скорости спада автокорреляции, так и в сложности спектра и росте коэффициента дисперсии фазы.

Поскольку локально линейные модели показывали атипичную зависимость $S_1(l)$ и $S_2(l)$ для связанных систем Рёсслера, рассматривались только модели с полиномиальными нелинейностями. Сравнивая различные кривые на рис. 3.22, можно видеть, что зависимости $S_1(l)$ для всех значений τ ведут себя похожим образом, но экстремумы лучше выражены для меньших значений Λ_1 .

Следуя критерию (3.15), лучшие результаты метода соответствуют $l \lesssim T/2$ для всех τ . Критерий (3.16) подтверждает эту находку, но при этом дают альтернативный вариант: сочетание малых, но не равных одному шагу выборки значений l (например, $l = T/12$ или $l = T/10$) и больших дальностей прогноза τ . Этот второй вариант даёт наилучшие значения второго критерия: более 80% значимых и при этом специфичных выводов о связанности. Трёхмерные зависимости $S_1(\tau, l)$ и $S_2(\tau, l)$, построенные при $\Lambda_1 = 0.1$, демонстрируют тот же

¹ $a_1 = 0.146$, $b_1 = 0.3$, $c_1 = 10$, $a_2 = 0.16$, $b_2 = 0.2$, $c_2 = 16$

² $a_1 = 0.176$, $b_1 = 0.19$, $c_1 = 11$, $a_2 = 0.172$, $b_2 = 0.2$, $c_2 = 10$

³ $a_1 = 0.2$, $b_1 = 0.3$, $c_1 = 10$, $a_2 = 0.2$, $b_2 = 0.15$, $c_2 = 7.5$

⁴ $a_1 = 0.205$, $b_1 = 0.05$, $c_1 = 20$, $a_2 = 0.20$, $b_2 = 0.05$, $c_2 = 11$

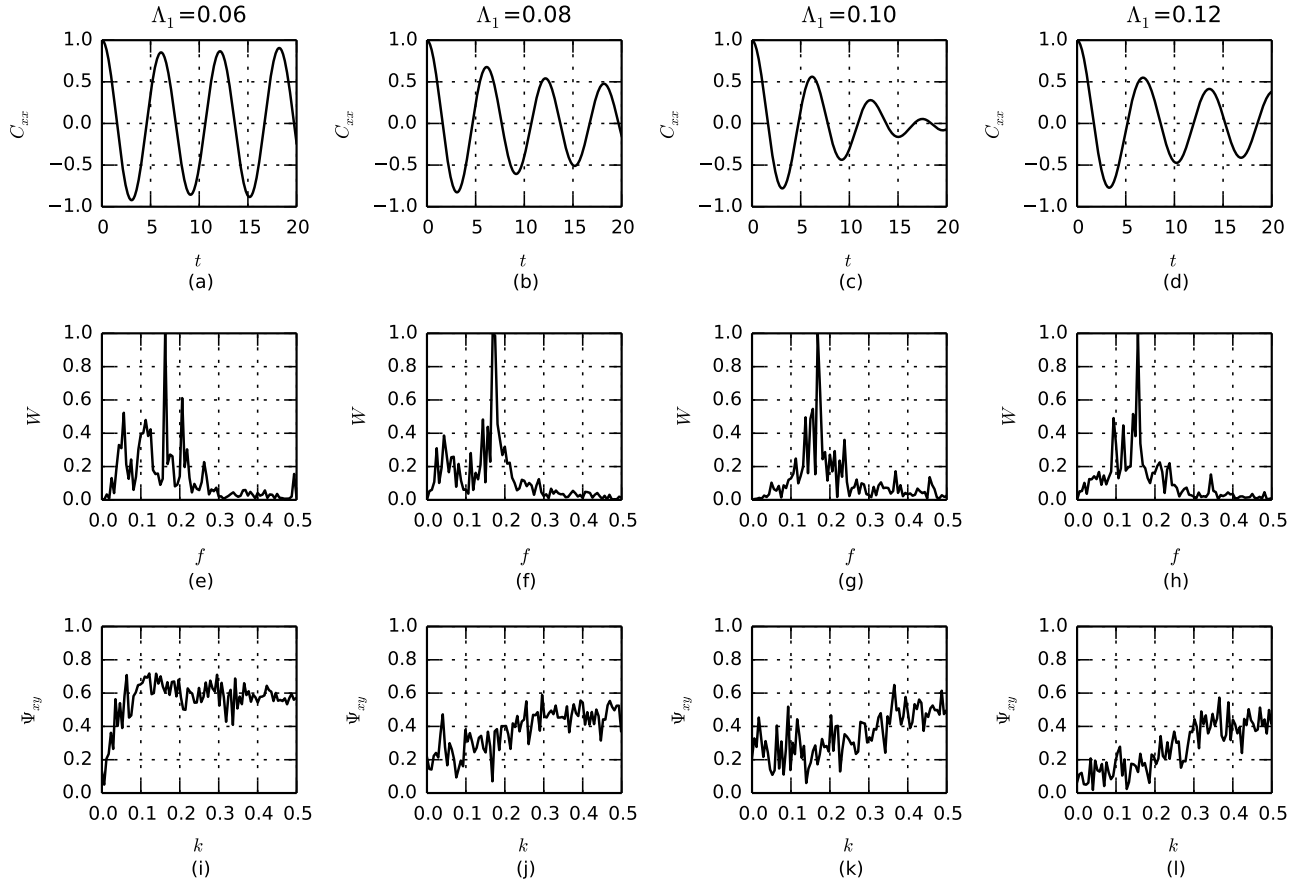


Рис. 3.21. Автокорреляционная функция (a–d) и спектр мощности (e–h) ведомого осциллятора Рёсслера для различных значений Λ_1 . Зависимости коэффициента фазовой синхронизации от коэффициента связи $\Psi_{xy}(k)$ (i–l). Графики (a, e, i) соответствуют значению $\Lambda = 0.06$, графики (b, f, j) — значению $\Lambda = 0.08$, графики (c, g, k) — значению $\Lambda = 0.1$ и графики (d, h, l) — значению $\Lambda = 0.12$.

результат — см. рис. 3.23). Оба критерия показывают, что метод неэффективен при $\tau = 1$ в комбинации с малыми значениями лага ($l < T/4$).

Можно отметить, что зависимость $S_2(l)$ при $\Lambda_1 = 0.06$ заметно отличается от аналогичных зависимостей при других значениях Λ , она в основном лежит существенно ниже. Детальный анализ отдельных кривых $PI(k)$ показывает, что причиной этому — достаточно высокая по сравнению с другими значениями Λ фазовая синхронность ведущей и ведомой систем — коэффициент фазовой синхронизации $\Psi_{xy} \geq 0.7$ для большинства значений k . Синхронность рядов приводит к тому, что в сигнале ведущей системы содержится слишком мало ин-

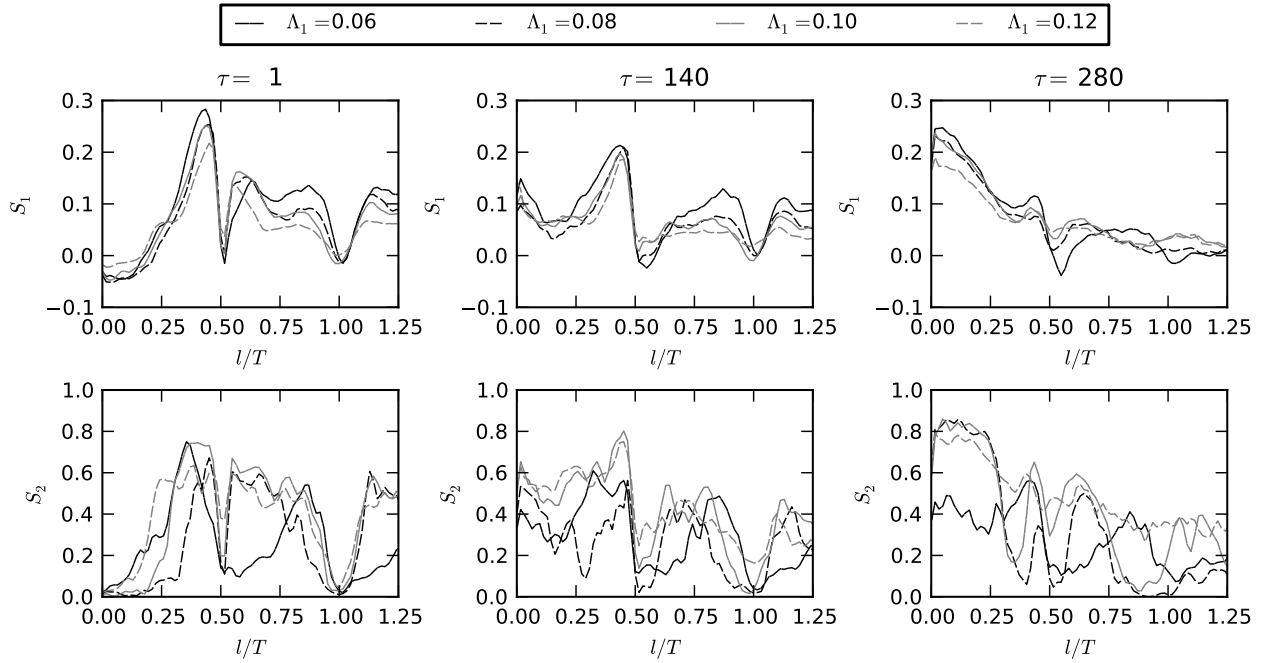


Рис. 3.22. Зависимости критерия (3.15) и критерия (3.16) от лага модели l для разных значений τ , рассчитанные для моделей с полиномиальной нелинейностью.

формации, могущей помочь прогнозу, а также тому, что тест на специфичность часто оказывается провален и метод путает направление связи или по крайней мере считает связь двусторонней. Подробно влияние фазовой синхронизации изучено в разделе 5.3.

Аналогичные показанным на рис. 3.22 результаты также были получены для других значений размерности и степени полинома, в частности, при $D_s = 3$, $P = 3$ и при $D_s = 2$, $P = 2$.

3.6. Выводы

Активное использование различных методов определения связанности в задачах самой разной природы естественным образом ставит вопрос об их надёжности. Среди прочих проблем одна из важнейших — зависимость результатов (чувствительности и специфичности) применения методов от их параметров. Для большинства используемых подходов это в первую очередь размерность вектора состояния и способа его реконструкции (см. [27; 29]), а для метода при-

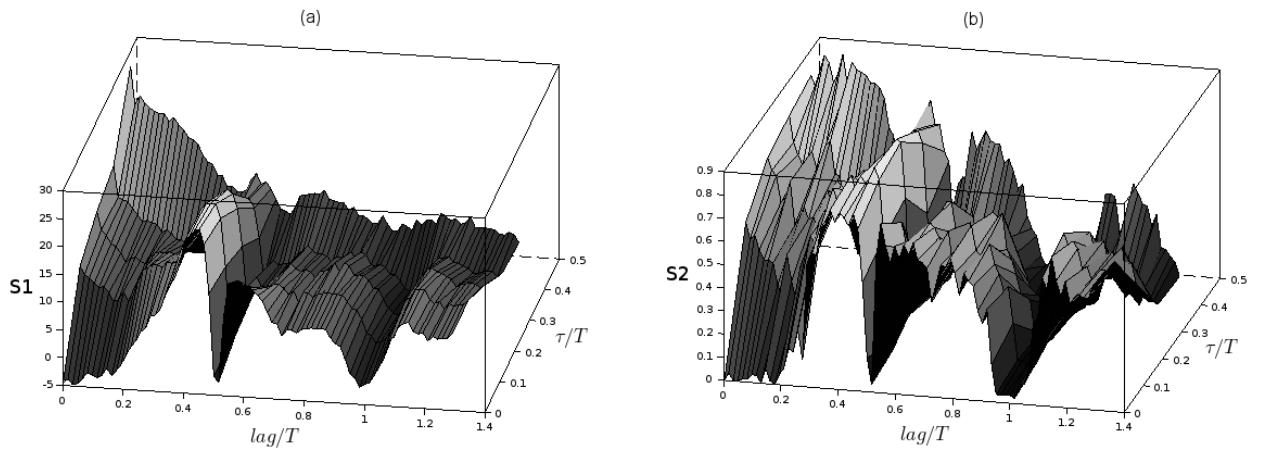


Рис. 3.23. Трёхмерные зависимости критериев (3.15) — на панели (а) — и (3.16) — на панели (б) — от τ и l для однонаправленно связанных систем Рёсслера (3.18), построенные с использованием полиномиальных моделей с параметрами $D_s = 2$, $D_a = 1$ и $\nu = 3$.

чинности по Грейнджеру ещё и тип и число/порядок аппроксимирующих нелинейных функций. В данной главе, основываясь на результатах тестирования на большом числе различных численных примеров, разработаны и опробованы рекомендации и критерии выбора параметров метода для весьма распространённого на практике случая, когда измеряемые сигналы имеют один характерный временной масштаб.

Основная идея состоит в том, чтобы связать лаг l , используемый при реконструкции вектора состояния, и дальность прогноза τ , которую мы полагаем отдельным параметром метода, с масштабами колебаний T изучаемых систем, которые можно определить по спектру или автокорреляционной функции.

Чтобы реализовать эту идею, мы сначала рассмотрели, насколько несоответствие оператора эволюции модели оператору эволюции исходных систем затрудняет детектирование связанности. Затем для систем с выраженным временным масштабом были построены зависимости числа верных и ложных выводов от параметров l и τ при заданном уровне коэффициентов связи и сформулированы первые рекомендации. Не удовлетворившись этим, мы разработали два интегральных критерия, позволяющих выявить лучшие и худшие сочетания τ

и l с точки зрения компромисса между чувствительностью и специфичностью для широкого диапазона коэффициентов связи в случае однонаправленно связанных систем. При этом были рассмотрены два способа аппроксимации нелинейных функций: обобщённый полиномиальный, предложенный в [7], и кусочно линейный. Для полиномиальной аппроксимации оценка связанности проводилась при различных значениях размерности модели D_s и порядка полинома P , как выбранных вручную, так и подобранных по критерию Шварца [31].

Поскольку оказалось, что полиномиальные модели демонстрируют лучшее сочетание чувствительности и специфичности для всех рассмотренных эталонных систем, основные выводы были сформулированы для этого типа моделей:

1. Выбор лага l , равного или близкого к целому или полуцелому числу характерных временных масштабов, ведёт к крайне неудовлетворительным результатам. Основная причина такого поведения в том, что в таком случае существует большая линейная зависимость между компонентами вектора состояния модели и, как следствие, вектор состояния несёт слишком мало информации об исходных временных рядах. Этот вывод весьма надёжен, поскольку воспроизводится на всех исследованных примерах.
2. Зависимость эффективности причинности по Грейнджеру от l и τ более выражена (её минимумы глубже, а максимумы выше) при меньших значениях старшего ляпуновского показателя ведомой подсистемы. Этот вывод сделан как на основе рассмотрения одних и тех же систем при различных параметрах, соответствующих различным режимам с разными ляпуновскими показателями, так и отличных друг от друга эталонных систем.
3. Можно предложить две стратегии оптимального выбора значений l и τ . Первая состоит в том, чтобы выбрать значения лага менее половины характерного временного масштаба, например, $T/4$ или $T/3$, поскольку для большинства систем на этих значениях имеется глобальный максимум зависимости обоих предложенных критериев от l для большинства значений

τ . Собственно выбор дальности прогноза при этом не принципиален, но значение $\tau \approx T/4$ всё же является предпочтительным для ряда случаев. Вторая стратегия состоит в том, чтобы использовать большую дальность прогноза $\sim T/2$ и малый лаг, например, $l = T/10$ или $l = T/12$. Какой стратегии лучше придерживаться, зависит в значительной степени от специфики исследуемых временных рядов.

Эти рекомендации подходят для систем с хорошо выраженным временным масштабом (одним основным пиком в спектре) и достаточно низким ляпуновским показателем, например, менее 0.15, при медленно спадающей автокорреляционной функции, например, медленнее, чем в половину за два характерных временных масштаба.

Сопоставляя результаты, полученные при использовании полиномиальных и кусочно линейных функций, можно констатировать, что выбор l и τ не может быть сделан в отрыве от типа использованных нелинейных функций: значения, оптимальные для одного способа аппроксимации, оказываются неудачными для другого. Ранее в работе [117] уже делался вывод о том, что в реальных приложениях свести один подход к оценке связанности к другим не получится. В нашем случае следует признать, что даже две отличные реализации одного и того же подхода не могут быть полностью унифицированы на практике, хотя обе и используют универсальные аппроксиматоры.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [129; 163—167].

Влияние помех и шумов наблюдения на оценки связанности нелинейным методом причинности по Грейнджеру

4.1. Введение

Одна из проблем метода причинности по Грейнджеру состоит в том, что зависимость его работоспособности от шумов мало исследована. В то же время, шумы всегда имеют место при измерениях. Существуют различные механизмы фильтрации, очистки систем от измерительных шумов, однако у них есть свои ограничения и полностью очистить сигнал от шума, как правило, невозможно. Вследствие этого с практической точки зрения интересно исследовать зависимость характеристик метода причинности по Грейнджеру от дисперсии внешнего измерительного шума σ^2 .

В работе [168] теоретически было показано, что с увеличением шума в системе величина улучшения прогноза будет падать, и эта зависимость будет монотонна, но эти исследования проводились лишь для линейных систем. В работе [169] было показано, что применение калмановской фильтрации даёт возможность для систем, уравнение для которых известно, избавиться от влияния измерительного шума на результат оценки PI . Влияние шума на оценки связанности методом причинности по Грейнджеру для двунаправленно связанных линейных авторегрессионных систем произвольного порядка рассмотрены в [169]. Хотя полученные в этих работах результаты существенны, возможность их использования на практике ограничена, поскольку часто уравнения модели неизвестны, а использование нелинейного метода предпочтительнее [7; 163]. Весьма важным является вопрос о том, может ли зависимость $PI(\sigma)$ быть немонотон-

на, т. е. иметь участки роста PI с увеличением уровня шума? На практике это будет означать, что метод будет показывать увеличение силы связи при ухудшении измерительной техники или росте влияния помех, проще говоря, плохая аппаратура будет выявлять связи, которые на хорошей не обнаруживаются.

Одною из целей данной главы является исследование поведения зависимости $PI(\sigma)$ на эталонных нелинейных системах и, в первую очередь, выявление возможных причин, ведущих к немонотонному её поведению. Использование эталонных систем даёт возможность точно знать характеристики объектов исследования: направление и силу связи, уровень шума и собственно динамику систем, что невозможно при анализе реальных систем. Поскольку провести исследования для всего многообразия нелинейных аппроксимирующих функций не представляется возможным, было решено ограничиться нелинейным обобщением с использованием полиномов общего вида как самым популярным [7]. Также рассмотрение ограничивается случаем однонаправленной связи.

Верному выявлению направленной связи препятствует не только высокочастотные шумы, которые на практике может быть достаточно хорошо как аппаратно, так и программно фильтрованы. Далее рассматривается случай, когда сигналы системы, связанность между которыми нужно определить, искажены общею низкочастотной помехой. Такое искажение сигнала в физических системах может иметь высокую амплитуду и быть как искажением в канале связи, так и присуще системе по её природе. Например, при изучении архитектуры связей между областями головного мозга по данным электроэнцефалограмм в качестве низкочастотной помехи выступают дыхательная и сердечно-сосудистая деятельность.

Кроме помех и шумов ошибки в определении направления связанности могут быть обусловлены наличием непрямых взаимодействий. Поэтому данный раздел посвящён исследованию возможности реконструкции связей в цепочке однонаправленно связанных осцилляторов методом причинности по Грейнджеру с использованием прогностических моделей с полиномиальной нелинейно-

стью. Это самый простой из возможных случаев, с рассмотрения которого, однако, уместно начать подобное исследование.

4.2. Эффект увеличения чувствительности метода причинности по Грейнджеру с ростом измерительного шума

4.2.1. Методика исследования

Суть численного эксперимента заключается в том, что сначала для выбранных двух однонаправленно связанных эталонных динамических систем генерируются временные ряды. Далее к рядам обеих систем добавляются реализации независимого, с нормальным распределением, нулевым средним и среднеквадратичным отклонением шума. На следующем шаге решается обратная задача: для ведомой системы восстанавливаются собственная (3.1) и совместная (3.2) модели и рассчитывается улучшение прогноза по формуле (3.3). Такой численный эксперимент повторяется для нескольких последовательных значений среднеквадратичного отклонения σ . В результате получается зависимость улучшения прогноза от уровня шума $PI(\sigma)$ — см. рис. 4.1(а).

Поскольку эта зависимость оказывается сильно изрезана вследствие индивидуальных особенностей шумовых реализаций, она усредняется, для чего при каждом σ генерируются 100 различных пар реализаций шума, добавляемые к один и тем же реализациям модельных систем, в результате чего получаются 100 пар зашумлённых реализаций с независимыми шумами. По каждой паре из 100 рассчитывается зависимость $PI(\sigma)$, полученные зависимости усредняются по ансамблю (см. рис. 4.1(б)).

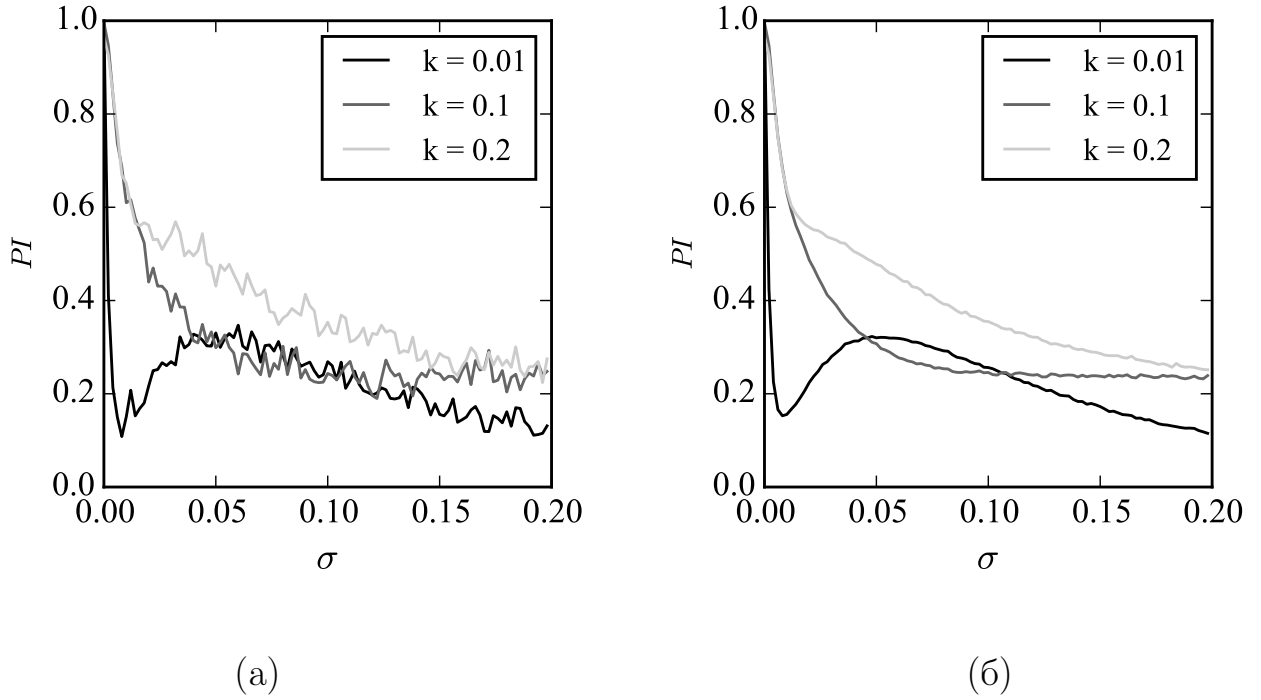


Рис. 4.1. Типичные зависимости $PI(\sigma)$ без усреднения — (а) и с усреднением по 100 реализациям шума — (б) при различных коэффициентах связи k между подсистемами.

4.2.2. Простейший пример — связанные логистические отображения

Логистическое отображение — одна из простейших и наиболее изученных моделей нелинейной динамики. Нами рассматривались связанные логистические отображения вида (4.1) при различных значениях параметров λ_x, λ_y :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda_x \cdot x_n \cdot (1 - x_n) + k \cdot y_n \\ y_{n+1} &= \lambda_y \cdot y_n \cdot (1 - y_n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ведущая система всегда находилась в хаотическом режиме, ведомая система — как в периодических режимах, начиная с периода 1, так и в хаотическом. Параметр связи k менялся в пределах от 0 до 0.2 с шагом 0.01 при каждом наборе параметров λ_x, λ_y , величина среднеквадратичного отклонения шума σ — в пределах от 0 до 1 с шагом 0.01. Таким образом, при каждом наборе параметров индивидуальных систем получались семейства кривых $PI(\sigma)$ при различных коэффициентах связи k , для чего строились модели в виде (3.1, 3.2) с параметрами $D_s = D_a = 1, P = 2, \tau = 1$.

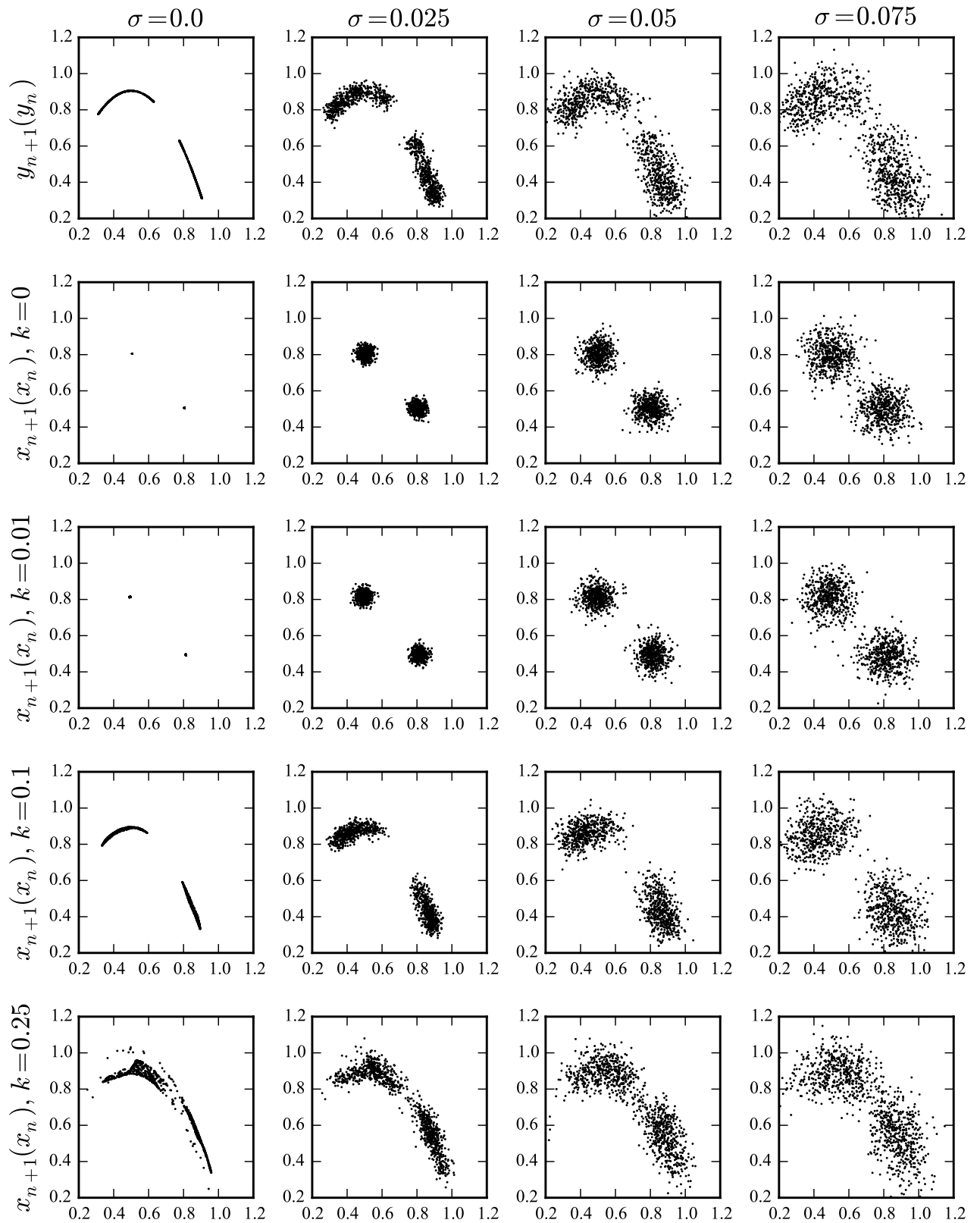


Рис. 4.2. Диаграммы Ламерея: строки №1 и №2 — автономная динамика Y и X , строки №№3–5 — динамика ведомой системы при воздействии на неё ведущей с увеличением коэффициента связи между системами. С увеличением номера столбца для каждого ряда увеличивается уровень измерительного шума в системе. Параметры связанных логистических отображений: $\lambda_x = 3.23$, $\lambda_y = 3.62$.

На рис. 4.2 представлены: фазовые портреты ведущей (первая колонка) и ведомой (2–4 колонки) систем при различных уровнях измерительного шума (различные столбцы), а на рис. 4.3(а) — семейство графиков зависимости уровня собственной ε_j^2 и совместной ε_s^2 ошибок аппроксимации и улучшения прогноза PI от уровня измерительного шума σ . Видно, что зависимости $PI(\sigma)$ немонотонны и имеют локальный минимум и локальный максимум, положение которых зависит от силы связи. При этом зависимости $\varepsilon_s^2(\sigma)$ и $\varepsilon_j^2(\sigma)$ монотонны и не имеют никаких «полочек». Аналогичное поведение зависимостей $PI(\sigma)$, $\varepsilon_s^2(\sigma)$ и $\varepsilon_j^2(\sigma)$ наблюдается и при других значениях параметров, в том числе в случае, когда автономная ведущая система находится в хаотическом режиме, за исключением режима периода 1 в ведомой системе, где все зависимости монотонны. При этом в ряде случаев немонотонность зависимости $PI(\sigma)$ наблюдается при всех силах связи, в других — только при относительно слабой связи.

4.2.3. Интерпретация результатов

В связи с полученными результатами возникают следующие вопросы:

1. Почему (за счёт каких факторов) зависимость $PI(\sigma)$ вообще может быть немонотонна?
2. Почему немонотонная зависимость не наблюдается для случая, когда ведомая система находится в режиме периода 1?
3. Почему немонотонность зависимости $PI(\sigma)$, как правило, сильнее выражена для меньших уровней связи, чем для больших?

Чтобы ответить на эти вопросы, следует обратиться к характеристикам аттракторов ведущей и ведомой систем в автономном режиме.

Аттрактор ведущей системы представляет собою во всех рассмотренных случаях многоленточный хаотический аттрактор, образовавшийся вскоре по-

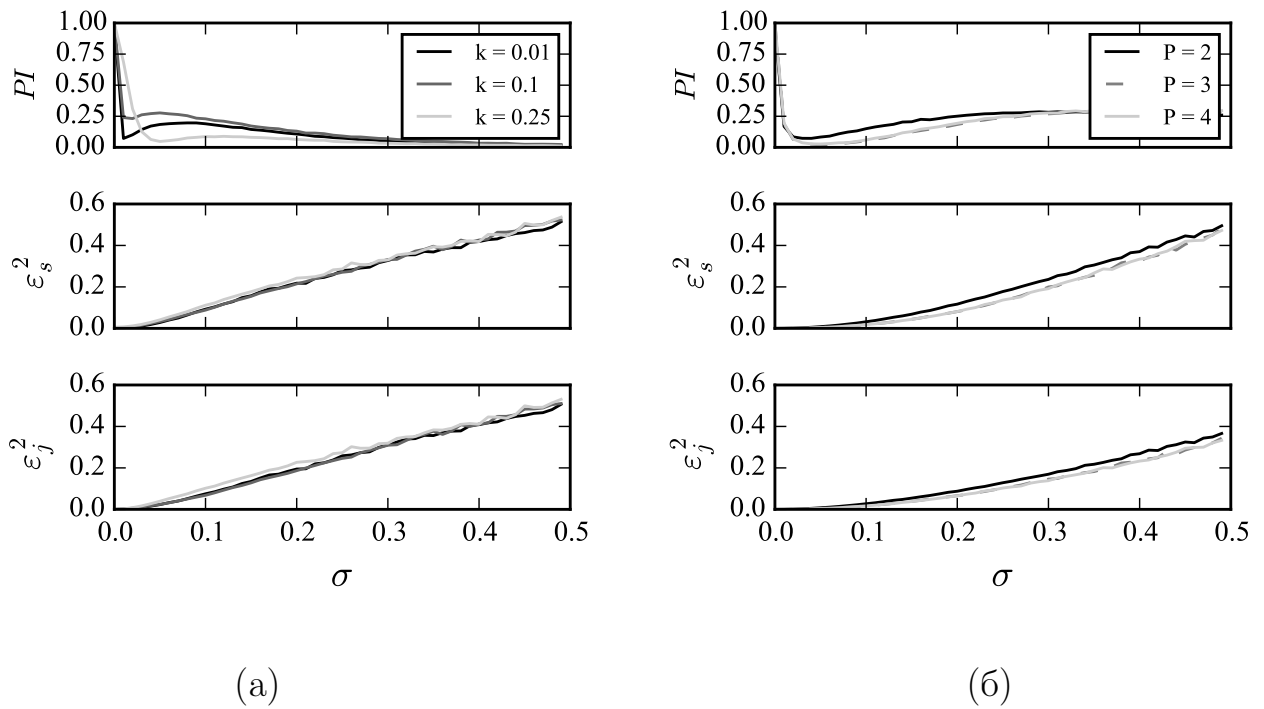


Рис. 4.3. Зависимости собственной ϵ_j^2 и совместной ϵ_s^2 ошибок аппроксимации и улучшения прогноза PI от уровня измерительного шума σ (а) для связанных логистических отображений при $\lambda_x = 3.23$, $\lambda_y = 3.62$, (б) для связанных отображений окружности при $\Delta_x = 0.25$, $m_x = 0.25$, $\Delta_y = 0.17$, $m_y = 3.47$. (4.1).

сле критической бифуркации Фейгенбаума. Аттрактор ведомой системы представлял собою как периодический с периодом 1, 2, 4 и др., так и хаотический аттрактор, тоже многоленточный. Далее следует принять во внимание, что переклочки на аттракторе такого типа между лентами в случае хаотического аттрактора и их прообразами в случае периодического происходят строго последовательно, например, для двух лент изображающая точка каждый раз перемещается на соседнюю ленту, то же самое происходит, например, в режиме периода 2: точка последовательно переходит между двумя состояниями, в случае аттрактора периода 4 — между первой и второй парами точек и т. д. Эту закономерность легко проверить с помощью кластерного анализа, если разбить все точки на заданное число кластеров (в нашем случае — 2) методом К-средних: окажется, что все чётные точки временной реализации попали в один кластер, все нечётные — в другой.

Таким образом, если поделить изображающие точки на фазовом портрете обеих систем на группы 1 и 2, можно сделать вывод, что каждой точке из группы 1 ведущей системы взаимно однозначно соответствует точка из группы 1 ведомой и то же для группы 2, т. е. переключения между лентами аттрактора в ведущей и ведомой системах происходят синхронно, причём это является следствием природы рассматриваемых систем вне зависимости от уровня связи. Такая синхронность переключений фактически является дополнительным источником информации для каждой из систем о второй системе, и может быть использована для прогноза поведения одной из них по временному ряду другой.

Исходя из описанного, немонотонность зависимости $PI(\sigma)$ объясняется следующим образом. При нулевом уровне шума и конечной величине связи в силу того, что система (4.1) может быть точно переписана в виде (3.1, 3.2) при выбранных значениях P , D_a и D_s , совместная ошибка близка к нулю с точностью вычислений, а собственная — конечна и отлична от нуля. При малых уровнях измерительного шума его увеличение приводит к ухудшению точности прогноза и увеличению совместной и индивидуальной ошибок пропорционально σ , т. е. примерно на одну и ту же величину, как следствие этого величина $\varepsilon_j^2(\sigma)/\varepsilon_s^2(\sigma)$ растёт и PI уменьшается. Начиная с некоторого значения σ уровень шума становится настолько велик, что предсказать точно значение x_n оказывается невозможно, но всё ещё можно предсказать, в какую часть аттрактора (ленту, группу точек) попадёт точка на следующем шаге, и информация о переключениях между лентами начинает играть ключевую роль в улучшении прогноза. Поэтому учёт информации о системе Y становится снова полезен для прогноза состояния системы X вследствие синхронности переключений. Чем больше шум, тем меньше оказывается роль собственной динамики и больше роль переключений в предсказании следующего состояния, $PI(\sigma)$ растёт. При этом, чем меньше коэффициент связи, тем раньше шум полностью уничтожает информацию о действительно существующем воздействии Y на X , поэтому при сильной связи минимум в зависимости $PI(\sigma)$ выражен менее явно или вовсе от-

существует. Это становится возможно, поскольку в рассматриваемом примере и внешнее воздействие, и шум добавляются аддитивно, т. е. суммируются. Наконец, при очень больших уровнях шума кластеры точек на аттракторе начинают сливаться воедино, информация о переключениях теряет смысл и $PI(\sigma)$ снова начинает убывать к нулю.

Для режима периода 1 в ведомой системе информация о переключениях между лентами в ведущей системе не имеет значения для ведомой, поэтому $PI(\sigma)$ всегда монотонно спадает к нулю.

Пример, на основании которого построена выдвинутая гипотеза о природе немонотонного поведения зависимости $PI(\sigma)$, имеет ряд ограничений: рассматривались только одномерные системы, исходные уравнения могут быть сведены к модельным, рассматривались только идентичные по типу нелинейных функций системы и только с дискретным временем. Чтобы подтвердить данную гипотезу и показать общность полученных результатов, было проведено тестирование на ряде других эталонных систем. В разделе 4.2.4 рассмотрены связанные отображения окружности, для которых исходные уравнения эталонных систем не могут быть однозначно сведены к модельным уравнениям (3.1, 3.2), в разделе 4.2.5 рассмотрены связанные отображения Эно — двумерные системы, при использовании в моделях $D_s = 1$, в разделе 4.2.6 — отображение Эно, воздействующее на отображение окружности, в разделе 4.2.7 — связанные потоковые системы — системы Рёсслера.

4.2.4. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ при неточной аппроксимации базисных функций

Как показано в [167], при оценке PI для двух однонаправленно связанных отображений окружности (4.2) в отсутствие шума с помощью моделей вида (3.1, 3.2) результат зависит от степени аппроксимирующего полинома и не достигает

теоретического значения 1 в заведомо верную сторону.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + m_x \sin(x_n) + k \cdot y_n \\y_{n+1} &= y_n + \Delta_y + m_y \sin(y_n)\end{aligned}\tag{4.2}$$

В данной работе параметры ведущей системы m_y и Δ_y подбираются так, чтобы она находилась в хаотическом режиме, а у ведомой системы фиксируется параметр Δ_x , а параметр m_x перебирается в некотором диапазоне значений, охватывающем как различные периодические, так и хаотические режимы.

На рис. 4.3(б) представлены зависимости $PI(\sigma)$, $\varepsilon_j^2(\sigma)$ и $\varepsilon_s^2(\sigma)$ при различных степенях аппроксимирующего полинома P нелинейных функций (3.1, 3.2). Аналогичное поведение зависимостей $PI(\sigma)$, $\varepsilon_j^2(\sigma)$ и $\varepsilon_s^2(\sigma)$ наблюдается и при других значениях параметров, в том числе в случае, когда автономная ведомая система находится в хаотическом режиме.

4.2.5. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ при недостаточной размерности модели

Как и в ранее рассмотренных примерах, ведомая и ведущая системы представляют собой отображения с одинаковым оператором эволюции, но расстроенные по параметрам. Параметры ведущей системы подбираются так, чтобы она находилась в хаотическом режиме, а у ведомой системы фиксируется один параметр, в данном случае b_x , а второй параметр перебирается в некотором диапазоне значений, охватывающем как некие периодические режимы, так и некоторые хаотические режимы.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - a_x \cdot x_n^2 - b_x \cdot x_{n-1} + k \cdot y_n \\y_{n+1} &= 1 - a_y \cdot y_n^2 - b_y \cdot y_{n-1}\end{aligned}\tag{4.3}$$

При построении модели используются параметры: $D_s = 1$, $D_a = 1$, $\tau = 1$, $P = 2$.

Наблюдаемые на рис. 4.4(а) зависимости качественно не отличаются от полученных ранее и демонстрируют один минимум и один локальный максимум,

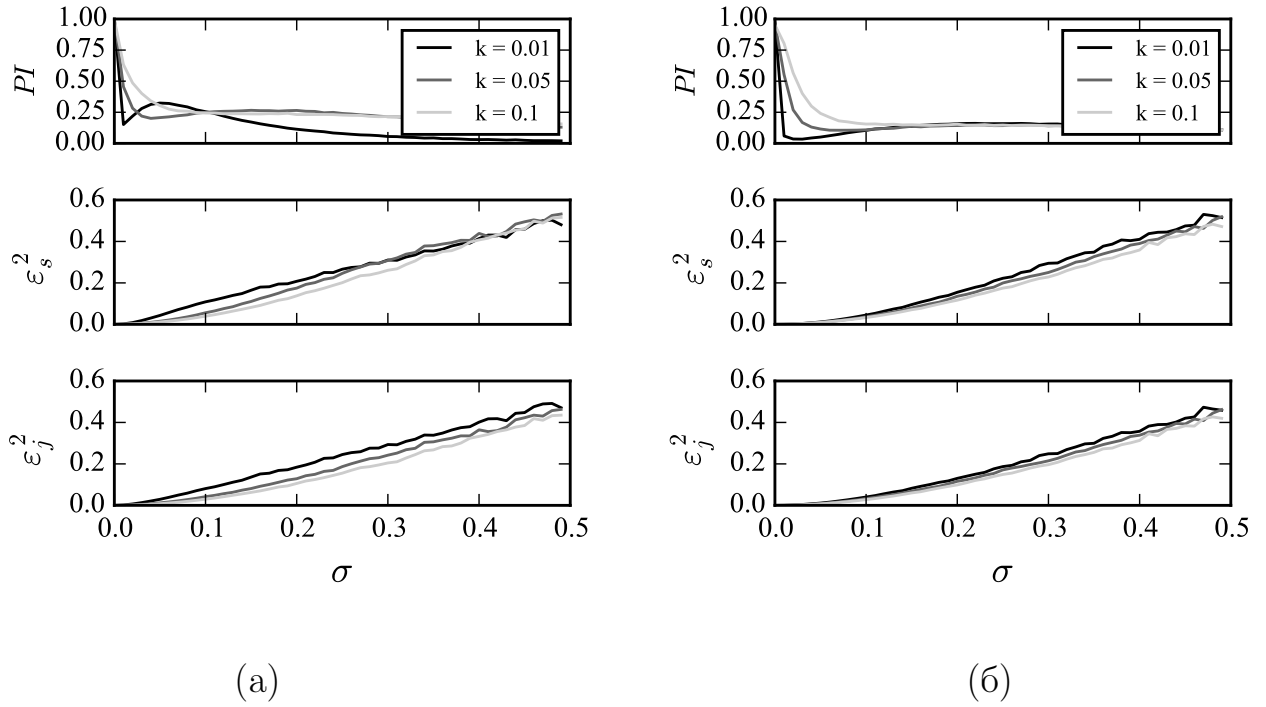


Рис. 4.4. Зависимости уровня собственной ε_j^2 и совместной ε_s^2 ошибок аппроксимации и улучшения прогноза PI от уровня измерительного шума σ . Параметры связанных отображений Эно (а): $a_x = 0.48$, $b_x = -0.15$, $a_y = 1.15$, $b_y = -0.2$. Параметры связанных отображений окружности и Эно (б): $\Delta_x = 0.1$, $m_x = 2.05$, $a_y = 1.3$, $b_y = -0.15$.

которые выражены тем сильнее, чем меньше параметр связи.

4.2.6. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ при различных типах оператора эволюции ведущей и ведомой систем

В данном разделе исследовалась система (4.4), состоящая из двух существенно разных по природе отображений: отображения Эно (ведущая подсистема) и отображения окружности (ведомая подсистема). Первое из них двумерное, но имеет нелинейность только второго порядка, в то время как второе одномерное, но имеет синусоидальную нелинейность, которую невозможно точно представить степенным полиномом.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - x_n + \Delta_x + m_x \sin(x_n) + k \cdot y_n \\ y_{n+1} &= 1 - a_y \cdot y_n^2 - b_y \cdot y_{n-1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Аттрактор ведущей системы многоленточный. Проводя кластерный ана-

лиз, снова можно показать, что переключения между лентами происходят синхронно. Эта синхронность помогает повысить уровень улучшения прогноза в области небольших шумов. Сначала информации о системе в пределах каждого кластера недостаточно в связи с тем, что одна точка, в которую попадает система, на каждом шаге все больше превращается в некую область. Однако еще существуют различия между кластерами и это состояние соответствует области роста улучшения прогноза, см. рис. 4.4(б). Конец этой области определяется таким уровнем шума, при котором невозможно определить, к какой ленте принадлежит точка в данный момент времени. Локальные минимум и максимум на зависимости $PI(\sigma)$ лучше выражены для малых значений коэффициента связи.

Таким образом, показано, что немонотонная зависимость $PI(\sigma)$ может наблюдаться и для связанных систем с различными типами операторов эволюции.

4.2.7. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ для потоковых систем

До сих пор были рассмотрены системы с дискретным временем, поэтому интересно исследовать зависимость $PI(\sigma)$ для потоковых систем. В качестве примера были рассмотрены связанные системы Рёсслера (4.5) и уравнения связанных автогенераторов с полутора степенями свободы (4.6) [18].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + k \cdot y_1, & \dot{x}_2 &= x_1 + a_x \cdot x_2, & \dot{x}_3 &= b_x + x_3(x_1 - c_x), \\ \dot{y}_1 &= -y_2 - y_3, & \dot{y}_2 &= y_1 + a_y \cdot y_2, & \dot{y}_3 &= b_y + y_3(y_1 - c_y). \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \tau_x \dot{x}_1 &= (m_x \cdot x_3 \cdot e^{-x_3^2} - x_1) + k \cdot y_1, & \dot{x}_2 &= \delta_x^2 \cdot (x_1 - x_3), & \dot{x}_3 &= x_2 - a_x \cdot x_3, \\ \tau_y \dot{y}_1 &= (m_y \cdot y_3 \cdot e^{-y_3^2} - y_1), & \dot{y}_2 &= \delta_y^2 \cdot (y_1 - y_3), & \dot{y}_3 &= y_2 - a_y \cdot y_3, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для обеих связанных систем (4.5) и (4.6) временные ряды координат x_1, x_2, y_1 считались наблюдаемыми, остальные — скрытыми. Для построения прогностической модели был произведён переход к отображению Пуанкаре, полученному

сечением исходной связанной системы гиперплоскостью $x_2 = 0$, поскольку сильная корреляция между последовательными значениями в исходных временных рядах, как правило, провоцирует большое число ложно положительных выводов о связанности [164; 167; 170]. Таким образом, получались и анализировались временные ряды значений переменных x_1 для ведомой и y_1 для ведущей систем в сечении Пуанкаре.

Для оценки улучшения прогноза использовались модели с собственной размерностью $D_s = 2$ и добавочной размерностью $D_a = 1$, полиномом порядка 2.

Параметры ведущей системы и часть параметров ведомой фиксировались таким образом, что бы ведущая система находилась в хаотическом режиме, а ведомая могла находиться в различных периодических режимах периода 2 и более или хаотических режимах с многоленточным аттрактором. Сечение фазового пространства полученного отображения приведено на рис. 4.5.

Из рис. 4.6 (а, б) видно, что при некоторых значениях коэффициента связи k зависимость $PI(\sigma)$ немонотонная, значит, как и для каскадов, для потоковых систем переключение между лентами аттрактора существенно помогает прогнозировать поведение ведомой системы в некотором диапазоне значений σ , что подтверждает общность сделанных в работе выводов.

4.3. Оценка работоспособности метода причинности по Грейнджеру для выявления однонаправленной связи при наличии общей внешней низкочастотной помехи

Внешняя низкочастотная помеха (в том числе помеха с выраженной основной частотой) — распространённая проблема при измерении сложных сигналов, которая может повлиять на результаты оценки связанности между ними. Поскольку полностью убрать помеху, не затрагивая сам сигнал, невозможно, оста-

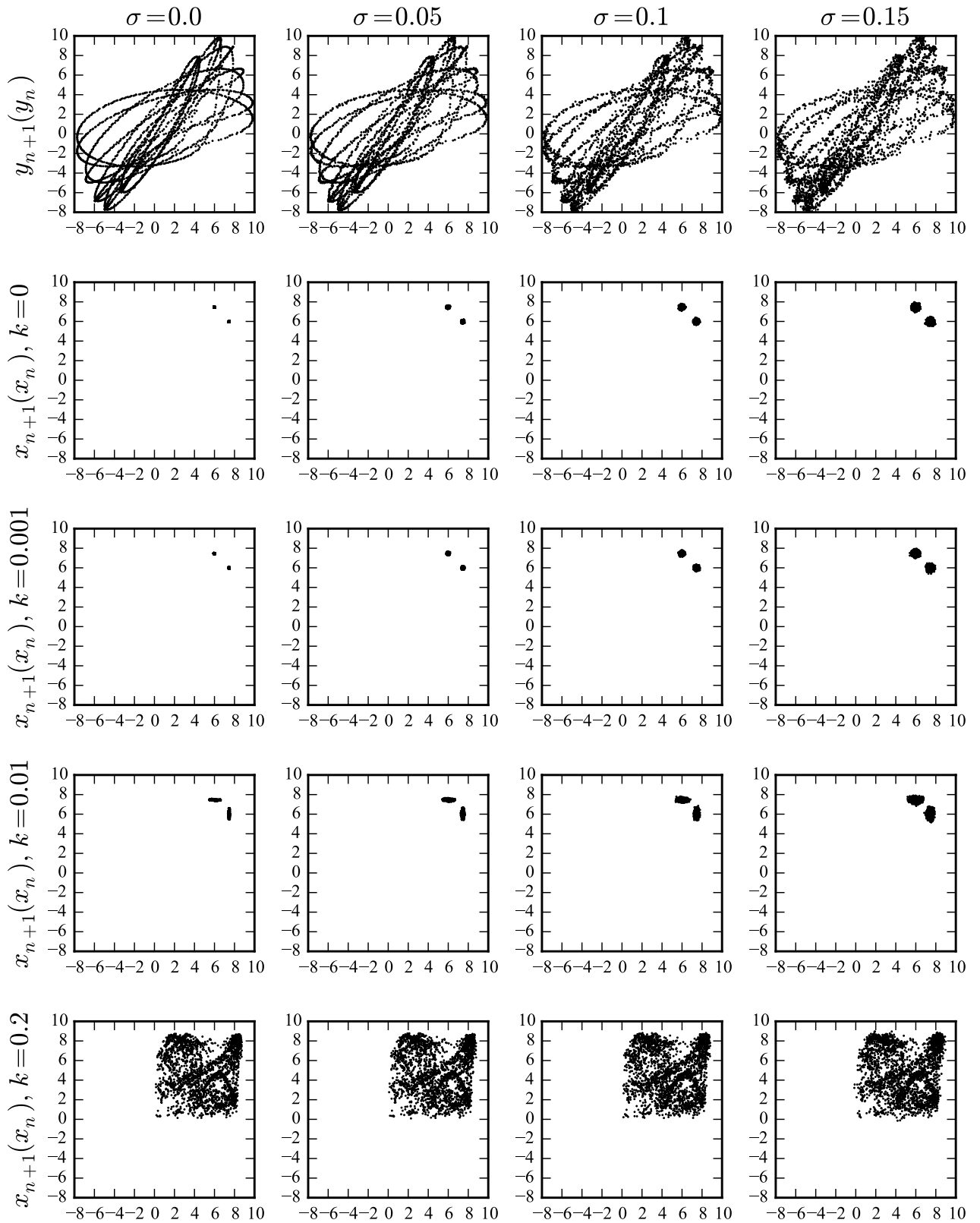


Рис. 4.5. В строках 1–5 представлены диаграммы Ламерея: строки №1 и №2 — автономная динамика Y и X , строки 3–5 показывают динамику ведомой системы при воздействии на неё ведущей с увеличением коэффициента связи между системами. С увеличением номера столбца для каждого ряда увеличивается уровень измерительного шума в системе. Параметры связанных систем Рёсслера: $a_x = 0.2$, $b_x = 0.85$, $c_x = 5.7$, $a_y = 0.2$, $b_y = 0.15$, $c_y = 4.6$.

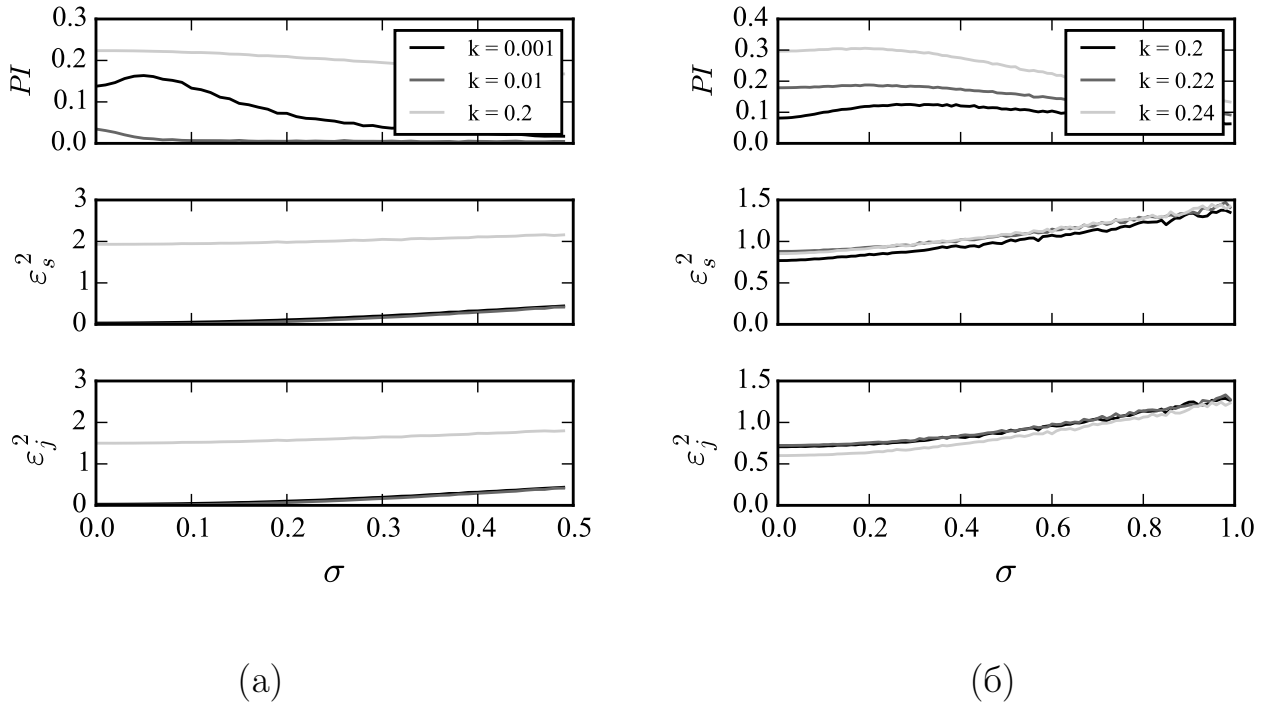


Рис. 4.6. Зависимости уровня собственной ε_j^2 и совместной ε_s^2 ошибок аппроксимации и улучшения прогноза PI от среднеквадратичного отклонения измерительного шума σ : (а) для связанных систем Рёсслера при $a_x = 0.2$, $b_x = 0.85$, $c_x = 5.7$, $a_y = 0.2$, $b_y = 0.15$, $c_y = 4.6$, (б) — для уравнений связанных автогенераторов с полутора степенями свободы при $m_x = 3$, $a_x = 0.15$, $\tau_x = 4.6$, $\delta_x = 1$, $m_y = 21$, $a_y = 0.21$, $\tau_y = 3$, $\delta_y = 1$.

ётся открытым вопросом: что меньше искажает результаты оценки связанности: фильтрация помехи или её игнорирование? Далее нами показано, что потеря чувствительности и специфичности метода с ростом амплитуды общей помехи происходит нелинейно и различно при разных параметрах метода. При мощности помехи в несколько процентов от мощности сигнала лучшие результаты достигаются, если не фильтровать помеху, а подобрать параметры метода. При больших мощностях помехи фильтрация предпочтительнее.

Одним из популярных методов устранения высокочастотных и низкочастотных искажений сигналов является фильтрация. Но фильтрация не только позволяет устранить помеху, но и влечет за собою искажение полезного сигнала, что ведёт к потере части полезной информации. Поэтому задачами данной работы является выявить, в каком случае фильтрация предпочтительна,

а когда следует смириться с существованием помехи, и определить, при каких амплитудах и частотах помехи ещё можно надеяться на успех. Так как решение данной задачи для сигналов произвольного вида крайне затруднительно, мы ограничились случаем, когда сигналы исследуемых систем имеют основной выраженный временной масштаб. Такие сигналы распространены в нейрофизиологии, кардиологии, климатологии и представляют значительный интерес. Вместе с тем, для этого типа сигналов в работах [164; 165] уже предложены рекомендации по выбору параметров метода.

Кроме выбора класса сигналов, для которых проводится рассмотрение, важно также определиться с видом моделей. В работе [7] показано, что использование в качестве аппроксимирующих функций степенных полиномов общего вида более оправдано, чем неполных полиномов, а в работе [129], что локально-линейные модели для данного типа сигналов малоприспособны. Поскольку модели с радиальными базисными функциями [2] и вообще с любыми локальными функциями требуют большого объёма данных, было решено ограничиться степенными полиномами по аналогии с большинством упомянутых работ [7; 113; 163; 171]. Хотя полиномиальные модели могут быть далеко не самыми эффективными при реконструкции оператора эволюции [172], воспроизведение динамического режима не всегда необходимо и целесообразно, если модель используется для поиска связанности [167].

Для того, чтобы охарактеризовать эффективность метода в широком диапазоне параметров, были использованы интегральные критерии, предложенные в главе 3 [165]. Тестирование проводилось только для однонаправленно связанных систем.

4.3.1. Методика исследования

Исследование проводилось на основе численного эксперимента, в котором качестве объекта исследования использовались следующие наблюдаемые:

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) + \theta \cdot w(t), \\y(t) &= v(t) + \theta \cdot w(t),\end{aligned}\tag{4.7}$$

где u , v — динамические переменные объектов (в численном эксперименте — эталонных динамических систем), причём система, порождающая ряд v , действует на систему, порождающую ряд u , w — временной ряд аддитивно добавляемой (не влияющей на динамику) общей внешней низкочастотной помехи, θ — коэффициент силы её воздействия (коэффициент умножения). Коэффициент θ варьировал от 0 до значения, при котором величина дисперсии аддитивно добавляемого временного ряда $\{\theta \cdot w_i\}_{i=1}^N$ составляла 15% от дисперсии $\{u\}_{i=1}^N$.

Поскольку в предложенной постановке важны как величина коэффициента умножения θ , так и амплитуда самой помехи, для оценки степени её воздействия была введена величина эффективной относительной дисперсии помехи:

$$\Theta = \frac{\theta^2 \sigma_{w(t)}^2}{\sigma_{u(t)}^2}.\tag{4.8}$$

$\Theta = 0$, когда внешняя низкочастотная помеха отсутствует во временном ряде измерительной функции $x(t)$, $\Theta = 1$ при значениях амплитуды сигнала ($\theta \cdot w(t)$) близких к амплитуде сигнала $u(t)$ (хотя более правильно формулировать этот критерий относительно дисперсий, амплитуды должны быть в близком отношении, так как все рассматриваемые сигналы: $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ имеют один характерный временной масштаб).

Полученные по формуле (4.7) временные ряды исследовались на связанность методом причинности по Грейнджеру.

4.3.2. Генерация тестовых временных рядов

В численном эксперименте в качестве временных рядов $\{u\}_{i=1}^N$ и $\{v\}_{i=1}^N$ использовались решения уравнений эталонных динамических систем, параметры которых подбирались таким образом, чтобы получить хаотические режимы и которые интегрировались методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Рассматривались два набора, систем связанных однонаправленной связью. В первом случае использовались временные ряды осцилляторов Рёсслера:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 - u_3, \\ \dot{u}_2 = u_1 + a_1 u_2 + k v_2, \\ \dot{u}_3 = b_1 - (c_1 - u_1) u_3, \\ \dot{v}_1 = -v_2 - v_3, \\ \dot{v}_2 = v_1 + a_2 v_2, \\ \dot{v}_3 = b_2 - (c_2 - v_1) v_3. \end{cases} \quad (4.9)$$

Коэффициент связи k варьировал от 0 до значения 0.5, при котором стабильно существовал аттрактор системы, находящейся под воздействием. В качестве компонентов наблюдаемых $u(t)$ и $v(t)$ выступали координаты $u_2(t)$ и $v_2(t)$ соответственно. На рис. 4.7 представлены временной ряд наблюдаемой $u(t)$ и её спектр мощности при наличии внешней низкочастотной помехи.

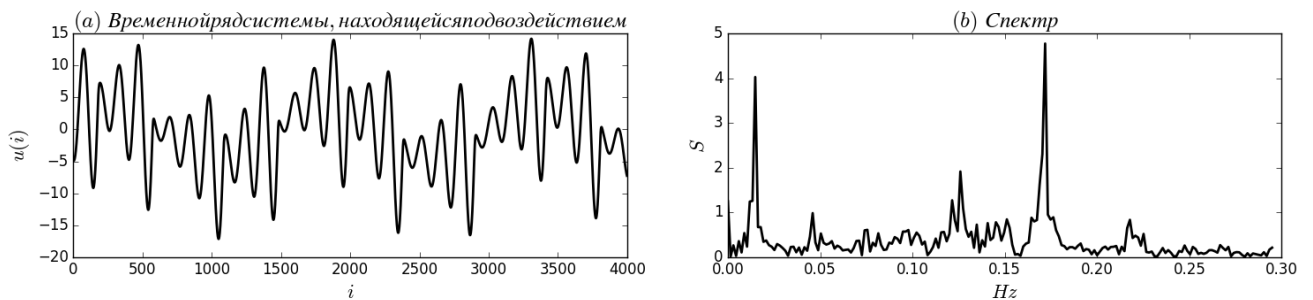


Рис. 4.7. Временной ряд наблюдаемой $u(t)$, полученной на основе временных реализация связанных однонаправленной связью уравнений осцилляторов Рёсслера (а), и её спектр мощности — (b).

Во втором численном примере использовались уравнения генераторов Дмитриева–Кислова [18] с 1,5 степенями свободы:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (F_1(u_3) - u_1)/3 + kv_3, \\ \dot{u}_2 = u_1 - u_3, \\ \dot{u}_3 = u_2 - 0.21u_3, \\ \dot{v}_1 = (F_2(v_3) - v_1)/3, \\ \dot{v}_2 = v_1 - v_3, \\ \dot{v}_3 = v_2 - 0.22v_3, \end{cases} \quad (4.10)$$

где нелинейные функции имели вид:

$$\begin{aligned} F_1(u) &= 26ue^{-u^2}, \\ F_2(v) &= 28ve^{-v^2}. \end{aligned}$$

Аналогично случаю со связанными уравнениями осциллятора Рёсслера коэффициент связи k варьировал от 0 до значения 0.2. В качестве компонентов наблюдаемых $u(t)$ и $v(t)$ выступали координаты $u_1(t)$ и $v_1(t)$ соответственно. На графиках представленных на рис. 4.8 представлены временной ряд наблюдаемой $u(t)$ и её спектр мощности при наличии внешней низкочастотной помехи.

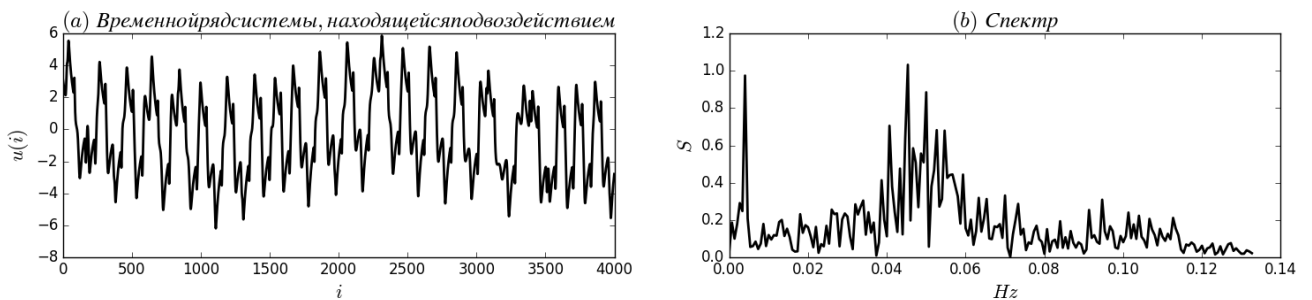


Рис. 4.8. Временной ряд наблюдаемой $u(t)$, полученной на основе временных реализация связанных однонаправленной связью уравнений автогенераторов с 1.5 степенями свободы (а), и её спектр мощности — (b).

В качестве внешней низкочастотной помехи $w(t)$ в обоих случаях были выбраны временные ряды второй координаты w_2 уравнения Кияшко–Пиковского-

Рабиновича:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = 0.15w_1 + w_2 - 0.93w_3 \\ \dot{w}_2 = -w_1 \\ 0.2\dot{w}_3 = w_1 - f(w_3), \end{cases} \quad (4.11)$$

$$f(w) = 8.592w - 22w^2 + 14.408w^3.$$

Выбор этих систем обусловлен тем, что они обладают ярко выраженными характерными временными масштабами, и карта их динамических режимов хорошо изучена.

4.3.3. Тестирование на значимость

Чтобы исключить влияние случайных факторов на выводы о наличии однонаправленной связи, полученные результаты проходили проверку на значимость. Для этого было применено тестирование на суррогатные временные ряды, которые получались на основе тех же временных рядов что и использовались в анализе, но при отсутствии связи ($k = 0$). При этом общая низкочастотная помеха в суррогатных временных рядах сохранялась. Строго говоря, на практике такие суррогаты построить невозможно, т.к. не известны точные модельные уравнения процессов. Однако данные суррогаты наиболее строго проверяют нулевую гипотезу об отсутствии направленной связи. В реальном эксперименте можно использовать суррогаты с перестановкою реализаций [30], которые часто дают близкие результаты, как это было показано в главе 3 [166].

В данном исследовании показатель улучшения прогноза (3.3) рассчитывался для каждой модели во всем диапазоне значений $\Theta \in [0; 0.15]$ по всем значениям коэффициента однонаправленной связи k : $k \in [0; 0.5]$ для систем (4.9) и $k \in [0; 0.2]$ для систем (4.10). Таким образом, для анализа результатов необходимо было выработать некоторые интегральные оценки, которые позволили бы анализировать полученные данные. Для этого воспользовались предложенными в главе 3 интегральными критериями (3.15, 3.16). В численном эксперименте оценивалась зависимость критериев от величины Θ (4.8).

4.3.4. Параметры модели

В рамках главы 3 было показано, что при тестировании на связанность систем, обладающих ярко выраженными временными масштабами, методом причинности по Грейнджеру при использовании моделей с полиномиальной нелинейностью для получения значимых результатов о наличии направленной связи не требуется добиваться от модели качественно воспроизводить динамику исследуемого объекта. Также были выработаны рекомендации по оптимальному подбору значений лага l и дальности прогноза τ для модели (3.2). На основе этого в численном эксперименте в качестве прогностической модели использовалось отображение последования с полиномиальной нелинейностью. Степень полинома $P = 3$, размерность индивидуальной модели $D_s = 2$, размерность добавки в совместной модели $D_a = 1$.

Параметры лаг l и дальность прогноза τ подбирались отдельно для каждой из двух рассмотренных пар объектов (4.9) и (4.10). Для этого использовались ранее выработанные рекомендации [165], а помеха игнорировалась. Значения l и τ варьировали в диапазоне от единицы времени выборки до величины, равной характерному периоду системы. В результате, были выбраны по 3 набора параметров для каждой из систем, при которых метод демонстрировал наилучшую специфичность и различие значений, полученных при поиске связи в заведомо верном и ложном направлении (PI_{true} и PI_{false}).

Таким образом, при использовании временных рядов уравнений осцилляторов Рёсслера выбирались следующие пары значений параметров: $\tau = 0.44T_R$, $l = 1$; $\tau = 1$, $l = 0.26T_R$ и $\tau = 1$, $l = 0.59T_R$. Для временных рядов уравнений связанных автогенераторов с 1.5 степенями свободы — $\tau = 0.6T_A$, $l = 1$; $\tau = 1$, $l = 0.1T_A$ и $\tau = 1$, $l = 0.3T_A$. Где T_R и T_A — характерные масштабы системы Рёсслера и автогенератора с 1.5 степенями свободы соответственно.

4.3.5. Численный эксперимент

Для исследования способности метода причинности по Грейнджеру выявлять однонаправленную связь в случае, когда тестируемые на связанность системы обладают общей внешней низкочастотной помехой, в численном эксперименте оценивались значения критериев (3.15, 3.16) в зависимости от величины Θ для различных наборов параметров модели l и τ во всём рассмотренном диапазоне значений коэффициента связи k . При этом дополнительно варьировалась частота внешней помехи $w(t)$ так, чтобы её отношение к основной частоте сигнала $u(t)$ составляло от 0.09 до 0.27. Дополнительно также оценивалась эффективность применения фильтрации.

На рис. 4.9 представлены значения критериев (3.15, 3.16) в зависимости от величины Θ при использовании временных рядов связанных однонаправленной связью уравнений осцилляторов Рёсслера (4.9). Из графиков на рис. 4.9(a) видно, что при использовании в качестве параметров модели $\tau = 1$ и $l = 0.3T_R$, с ростом коэффициента Θ происходит увеличение значения критерия (3.15) полученного по данным, к которым не применялась фильтрация (отмеченные чёрным цветом графики демонстрируют устойчивый рост), то есть в среднем для всех рассмотренных значений коэффициента связи k разница между PI_{true} и PI_{false} увеличивается. Что позволяет говорить о наличии преимущественного направления связи. При поиске наличия связи по данным с фильтрацией низкочастотной помехи (на графика отмечены серым цветом) критерий (3.15) для всех рассмотренных параметров прогностической модели становится нечувствительным к изменению Θ . При этом в случае, представленном на рис. 4.9(a), значения критерия, полученного по фильтрованным данным, лежат ниже. Оценку специфичности результатов можно провести в соответствии с результатами, представленными на графиках рис. 4.9(b). Из графиков следует, что в целом фильтрация низкочастотной помехи улучшает специфичность. Об этом можно судить, т. к. графики критерия (3.16), полученные для фильтрованных данных,

лежат ниже и убывают с ростом Θ . При этом следует отметить, что при поиске наличия связи по временным рядам, к которым не применялась фильтрация, наилучшая специфичность достигается в случае, когда отношение основной частоты сигнала системы, находящейся под воздействием, к частоте внешней низкочастотной помехи равно 3.7 (график, отмеченный чёрным цветом с квадратами). Значения критерия (3.16), полученные по фильтрованным временным рядам, для всех рассмотренных параметров модели колеблются в одном и том же диапазоне и не растут при увеличении Θ .

На рис. 4.9(c, d) представлены критерии работоспособности метода при использовании в качестве параметров прогностической модели $\tau = 1$ и $l = 0.65T_R$. Из графиков зависимостей критерия (3.15) (рис. 4.9(c)) видно, что имеется диапазон значений $0 < \Theta < 0.03$, при которых фильтрация помехи существенно не улучшает различия между PI_{true} и PI_{false} . Однако в дальнейшем, при $\Theta > 0.03$, полученные при фильтрации помехи зависимости убывают. Анализ зависимости значений (3.16) (рис. 4.9(d)) позволяет сказать о том, что фильтрация в целом улучшает специфичность результатов, полученных с помощью метода причинности по Грейнджеру.

При использовании в качестве параметров прогностической модели $\tau = 0.42T_R$ и $l = 1$ графики зависимостей критерия (3.15) представленные на рис. 4.9(e) демонстрируют схожую динамику с рис. 4.9(a). Однако, в соответствии со значениями критерия (3.16), показанными на рис. 4.9(f), наилучшая специфичность достигается при поиске наличия однонаправленной связи по сигналам, к которым не применялась фильтрация при $\Theta < 0.10$.

На рис. 4.10 представлены значения критериев (3.15, 3.16) в зависимости от величины Θ при использовании временных рядов связанных однонаправленной связью уравнений автогенераторов с 1.5 степенями свободы (4.10). При использовании в качестве параметров прогностической модели $\tau = 1$ и $l = 0.26T_A$ графики критерия (3.15) (рис. 4.10(a)) демонстрируют схожую динамику со случаем использования связанных систем Рёсслера (рис. 4.9(a, e)). При значе-

ниях $\Theta < 0.01$ значения критерия (3.16), полученные по фильтрованным и не фильтрованным данным (см. рис. 4.10(b)), принимают схожие значения. Затем специфичность результатов, полученных при анализе связи между временными рядами, к которым не применялась фильтрация, растёт с увеличением Θ до 0.03. После чего наблюдается уменьшение специфичности. Однако в случае, когда частота помехи в 3.7 раз ниже основной частоты сигнала системы, находящейся под воздействием, метод причинности по Грейнджеру демонстрирует лучшую специфичность при анализе наличия однонаправленной связи, если не применять фильтрацию, причём это действует для всех $\Theta > 0.03$.

При использовании в качестве параметров прогностической модели $\tau = 1$, $l = 0.59T_A$ и $\tau = 0.44T_A$, $l = 1$ наблюдаются схожие результаты. При $\Theta < 0.02$ графики зависимостей критерия (3.15), полученные по нефитрованным данным, убывают и лежат выше, чем при использовании фильтрации (рис. 4.10 (с, е)), после чего убывают до 0. Затем наблюдается рост значений критерия, который для случая, когда $\tau = 0.44T_A$ и $l = 1$ выражен сильнее. Таким образом, существует некоторый интервал значений Θ , в котором средняя разница между PI_{true} и PI_{false} при анализе наличия однонаправленной связи оказывается больше для временных рядов, к которым применялась фильтрация. Графики зависимостей критерия (3.15) представлены на рис. 4.10 (d, f), где видно, что при малых значениях $\Theta \sim 0.02$ фильтрация существенно не улучшает специфичность результатов. Однако, в дальнейшем, выводы о наличии направленной связи, полученные на основе анализа нефитрованных данных, демонстрируют худшую специфичность.

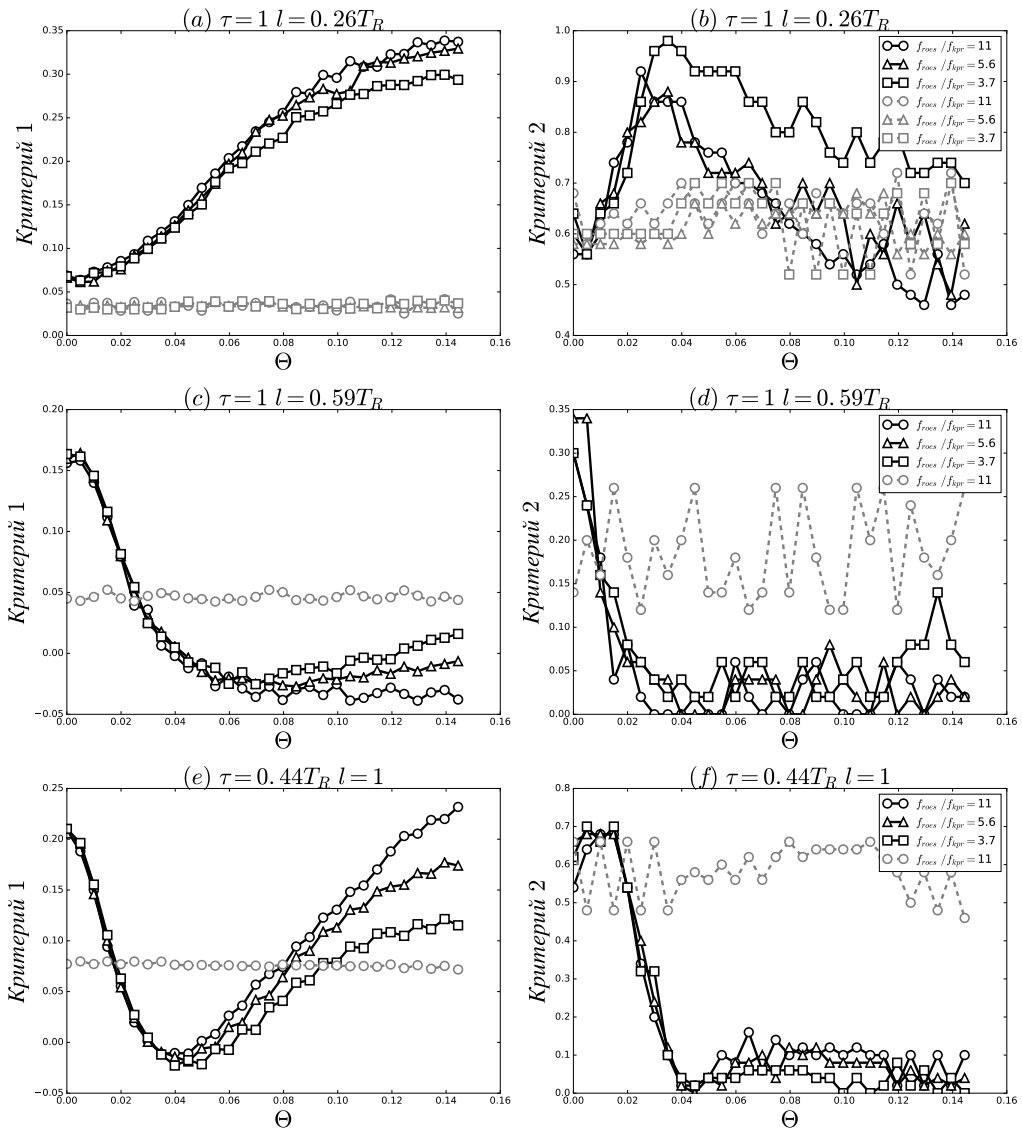


Рис. 4.9. Зависимости критериев (3.15) — (а, b, с) и (3.16) — (d, e, f) при различных параметрах прогностической модели l и τ от величины эффективной дисперсии внешней низкочастотной помехи, при различных соотношениях характерных частот помехи и сигнала, находящегося под воздействием, полученные для связанных однонаправленной связью систем Ресслера. Кругом отмечены результаты, полученные в случае, когда характерная частота помехи в 11 раз меньше характерной частоты сигнала, треугольником — в 5.6 раз, квадратом — в 3.7 раза. Непрерывной линией показаны результаты без фильтрации, пунктиром — с фильтрацией.

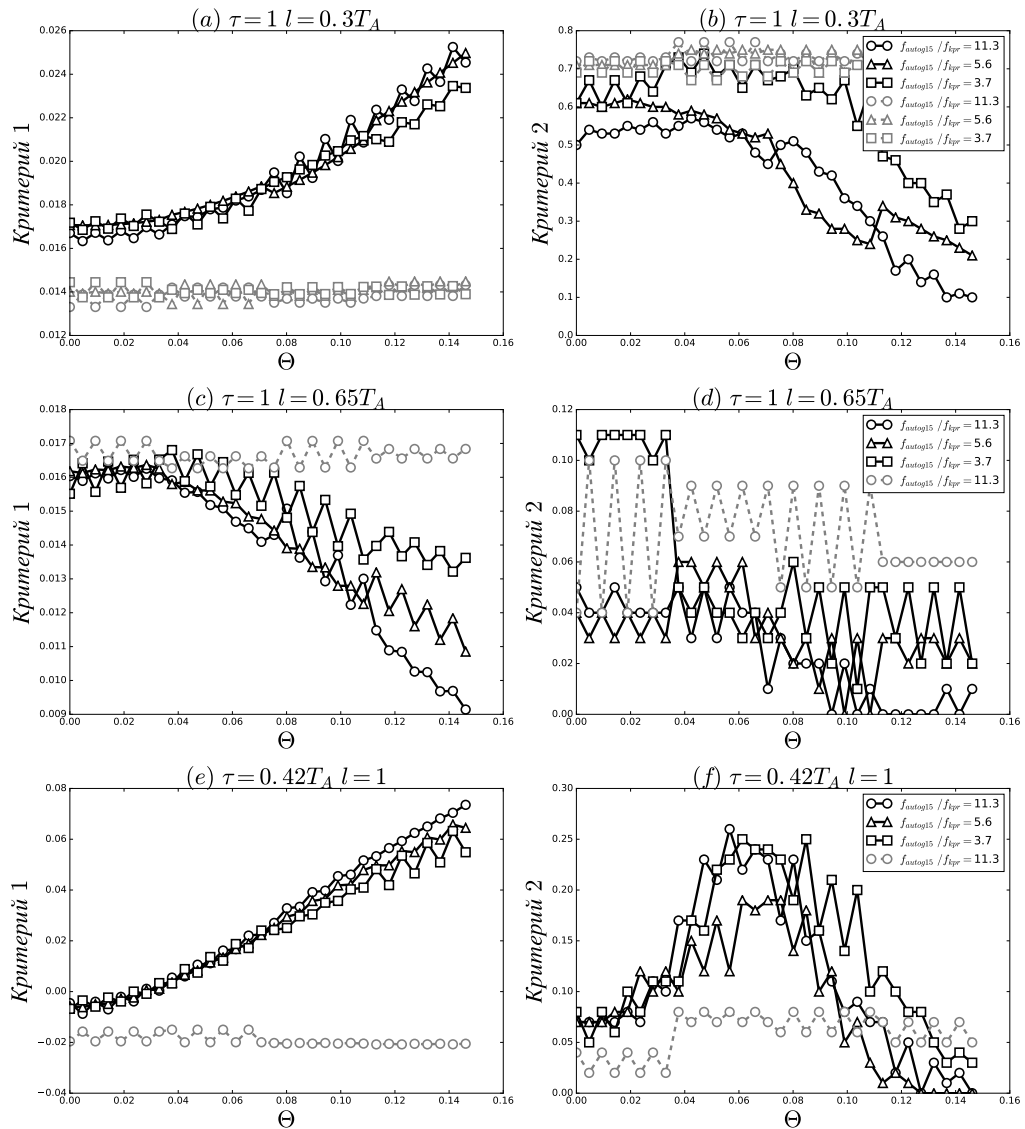


Рис. 4.10. Зависимости критериев (3.15) — (а, b, с) и (3.16) — (d, e, f) при различных параметрах прогностической модели l и τ от величины эффективной дисперсии внешней низкочастотной помехи, при различных соотношениях характерных частот помехи и сигнала, находящегося под воздействием, полученные для связанных однонаправленной связью автогенераторов с 1.5 степенями свободы. Кругом отмечены результаты, полученные в случае, когда характерная частота помехи в 11.3 раза меньше характерной частоты сигнала, треугольником — в 5.6 раз, квадратом — в 3.7 раза. Непрерывной линией показаны результаты без фильтрации, пунктиром — с фильтрацией.

4.4. Учёт непрямых связей в цепочке из трёх однаправленно связанных систем методом причинности по Грейнджеру

В данном разделе рассматривается задача о реконструкции архитектуры связей в цепочке из трёх однаправленно связанных подсистем, демонстрирующих колебания с одним или несколькими основными временными масштабами, методом нелинейной причинности по Грейнджеру с использованием моделей в виде отображений последования с полиномиальными нелинейностями, следуя [7]. Цель — определить, насколько метод способен верно распознать архитектуру связей и, что наиболее существенно, различить прямое и опосредованное взаимодействие при различных уровнях связи от очень слабых и не приводящих к существенным изменениям в динамике ведомых систем, и до достаточно сильных, ведущих к синхронизации.

Пусть в нашем распоряжении имеются скалярные временные ряды $\{x_n\}_{n=1}^N$, $\{y_n\}_{n=1}^N$ и $\{z_n\}_{n=1}^N$ от трёх систем X , Y , Z длины N отсчётов каждый. При этом система X считается ведомою и предполагается, что она не может воздействовать ни на Y , ни на Z . Система Y (промежуточная система) может воздействовать только на X , а система Z — на X как непосредственно, так и опосредованно через Y или даже не воздействовать вообще (используя термин «цепочка», мы в первую очередь подразумеваем, что не может быть обратных связей вида $X \rightarrow Y$ или $Y \rightarrow Z$ или $X \rightarrow Z$, то есть воздействие если и распространяется, то в одну сторону). Всего, таким образом, возможны восемь случаев взаимодействия:

1. $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ без непосредственного воздействия Z на X (опосредованная связь);
2. $Z \rightarrow X$ и $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ — случай прямой и опосредованной связей одновременно;

3. $Z \rightarrow Y$ и $Z \rightarrow X$, но без воздействия Y на X , то есть только прямая связь;
4. $Z \rightarrow X$ и $Y \rightarrow X$ – при отсутствии опосредованного взаимодействия;
5. отсутствие связи между Z и X , но наличие связи $Y \rightarrow X$;
6. $Z \rightarrow X$ – прямая связь, без искажения сигнала системы Y сигналом системы Z ;
7. отсутствие связи между Z и X , но наличие связи $Z \rightarrow Y$ (система X изолирована);
8. отсутствие каких-либо связей — все системы изолированы.

Такая постановка задачи может соответствовать системе беспроводных сенсоров, передающих информацию о напряжении свода здания или уровне задымления по цепочке [173], или соображениями анатомии, когда существуют восходящие связи от органов чувств к глубоким структурам мозга и далее в кору.

Поскольку тест на причинность по Грейнджеру может ответить только на вопрос, есть ли значимая связь между системами в заранее заданном направлении или нет, чтобы определить, какой из восьми рассмотренных случаев имеет место, нужно провести как минимум $\log_2(8) = 3$ тестирования на связанность. Для исследования связи $Z \rightarrow Y$, $Z \rightarrow X$ и $Y \rightarrow X$, наиболее очевидный подход — построить прогностические модели вида (4.12) и затем рассчитать улучшение прогноза по формулам (4.13):

$$\begin{aligned}
 x'_{n+\tau} &= f_x(\vec{x}_n), \\
 x'_{n+\tau|Y} &= f_{xy}(\vec{x}_n, \vec{y}_n), \\
 x'_{n+\tau|Z} &= f_{xz}(\vec{x}_n, \vec{z}_n), \\
 y'_{n+\tau} &= f_y(\vec{y}_n), \\
 y'_{n+\tau|Z} &= f_{yz}(\vec{y}_n, \vec{z}_n),
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
PI_{y \rightarrow x} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_x^2}, \\
PI_{z \rightarrow x} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_x^2}, \\
PI_{z \rightarrow y} &= 1 - \frac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_y^2},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

где \vec{x}_n , \vec{y}_n и \vec{z}_n суть реконструированные методом временных задержек [27] по скалярным временным рядам векторы состояния, функции f_x , f_{xy} , f_{xz} , f_y и f_{yz} — полиномы общего вида, как предложено в [7], τ — дальность прогноза, x'_n и др. — предсказанные значения, соответствующие измеренным значениям x_n , PI — показатели улучшения прогноза, ε^2 — среднеквадратичные ошибки аппроксимации.

Однако, такой подход не может в действительности решить поставленную задачу, потому что при наличии опосредованного воздействия $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ с его помощью будет обнаружена также связь $Z \rightarrow X$, так как X содержит информацию о динамике Z . А при воздействии $Z \rightarrow Y$ и $Z \rightarrow X$ может быть обнаружено воздействие $Y \rightarrow X$, поскольку Y может содержать часть информации от Z , что поможет предсказать X . Чтобы решить проблему, нужно вместо простой причинности по Грейнджеру, когда системы рассматриваются попарно, перейти к условной [7], построив модели вида (4.14) и рассчитав улучшение прогноза по формулам (4.15):

$$\begin{aligned}
x'_{n+\tau|Y} &= f_{xy}(\vec{x}_n, \vec{y}_n), \\
x'_{n+\tau|Z} &= f_{xz}(\vec{x}_n, \vec{z}_n), \\
x'_{n+\tau|Y,Z} &= f_{xyz}(\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n), \\
y'_{n+\tau} &= f_y(\vec{y}_n), \\
y'_{n+\tau|Z} &= f_{yz}(\vec{y}_n, \vec{z}_n),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
PI_{y \rightarrow x|z} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xyz}^2}{\varepsilon_{xz}^2}, \\
PI_{z \rightarrow x|y} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xyz}^2}{\varepsilon_{xy}^2}, \\
PI_{z \rightarrow y} &= 1 - \frac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_y^2}.
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

Результаты, которые должны получиться с использованием такой методики в «идеальной» ситуации, показаны в таблице 4.1. Видно, что для каждого из восьми выбранных случаев возможного взаимодействия, существует только одна комбинация результатов методики, то есть достигается взаимно однозначное соответствие.

Таблица 4.1. Соответствие искомой архитектуры связей и выводов о наличии связи при идеальной чувствительности и специфичности предложенной методики. Белый фон ($PI = 1$) соответствует значимым выводам о наличии связи, серый ($PI = 0$) — об её отсутствии.

№ п/п	направление взаимодействия	$PI_{z \rightarrow y}$	$PI_{y \rightarrow x z}$	$PI_{z \rightarrow x y}$
1	$Z \rightarrow Y \rightarrow X$	1	1	0
2	$Z \rightarrow X \wedge Z \rightarrow Y \rightarrow X$	1	1	1
3	$Z \rightarrow Y \wedge Z \rightarrow X$	1	0	1
4	$Z \rightarrow Y \wedge Y \rightarrow X$	0	1	1
5	$Y \rightarrow X$	0	1	0
6	$Z \rightarrow X$	0	0	1
7	$Z \rightarrow Y$	1	0	0
8	нет связей	0	0	0

В реальной ситуации достижение $PI = 0$ (при отсутствии связей) и $PI = 1$ (при наличии) или даже близких к ним с точностью вычислений значений невозможно как по причине конечности частоты и объёма выборки [174], так из-за

несовершенства моделей [117]. Поэтому принято считать, что связь обнаружена, если полученное значение выше тестового уровня, для расчёта которого в данной работе использовался широко распространённый подход, основанный на генерации суррогатных временных рядов [30]. В данном случае генерировалось 100 реализаций суррогатных рядов тестируемых систем с теми же параметрами при различных начальных условиях, но при отсутствии связи, по ним оценивался 95% уровень значимости. В рамках главы 3 [166] было показано, что такой способ даёт удовлетворительные результаты и примерно эквивалентен некоторым другим распространённым подходам для рассматриваемого класса систем.

Размерность вектора состояния и степень полинома в моделях (4.14) выбирались по критерию Шварца [31]. Параметры (лаг вложения l и дальность прогноза τ) выбирались с учётом основного временного масштаба ведомой системы, как предложено в соответствии с результатами главы 3.

Для тестирования в качестве систем X , Y и Z были выбраны широко известные эталонные модели радиотехнических и оптических систем: уравнения генератора с 1,5 степенями свободы [18] и система Икеды [77]. Параметры систем и связи были выбраны и введены в соответствии с уравнениями (4.16) и

(4.17):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (F(x_3, 26) - x_1) / 3 + k_{yx}(y_1 - x_1) + k_{xz}(z_1 - x_1), \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_3, \\
\dot{x}_3 &= x_2 - 0.21x_3, \\
\dot{y}_1 &= (F(y_3, 28) - y_1) / 3 + k_{zy}(z_1 - y_1), \\
\dot{y}_2 &= y_1 - y_3, \\
\dot{y}_3 &= y_2 - 0.22y_3, \\
\dot{z}_1 &= (F(z_3, 30) - z_1) / 3, \\
\dot{z}_2 &= z_1 - z_3, \\
\dot{z}_3 &= z_2 - 0.23z_3, \\
F(x, M) &= Mx \exp(x^2).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -x(t) + 15 \sin(x(t-3) - x_0) + k_{yx}(y(t) - x(t)) + k_{zx}(z(t) - x(t)), \\
\dot{y}(t) &= -y(t) + 20 \sin(y(t-2) - y_0) + k_{zy}(z(t) - y(t)), \\
\dot{z}(t) &= -z(t) + 25 \sin(z(t-4) - z_0).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Для системы (4.16) считались наблюдаемыми координаты x_1 , y_1 , z_1 . Все или некоторые коэффициенты связи k_{yx} , k_{zx} и k_{zy} могли обнуляться, чтобы рассмотреть различные архитектуры связи. Если соответствующий коэффициент не обнулялся, он варьировал в широком диапазоне, как показано на рис. 4.11. Были выбраны три значения $k = 0.15$, $k = 0.4$ и $k = 0.7$, для которых проводилось исследование с усреднением результата по 100 реализациям, полученным при различных начальных условиях.

Результаты для связанных автогенераторов представлены на рис. 2, где показано, что в среднем наилучшую работоспособность метод демонстрирует в случае, когда $k = 0.4$. Однако, при наличии прямого и опосредованного взаимодействия ($Z \rightarrow Y \rightarrow X \wedge Z \rightarrow X$) наилучшие результаты достигаются при $k = 0.7$. Стоит отметить, что наиболее сложным оказался тест для оценки

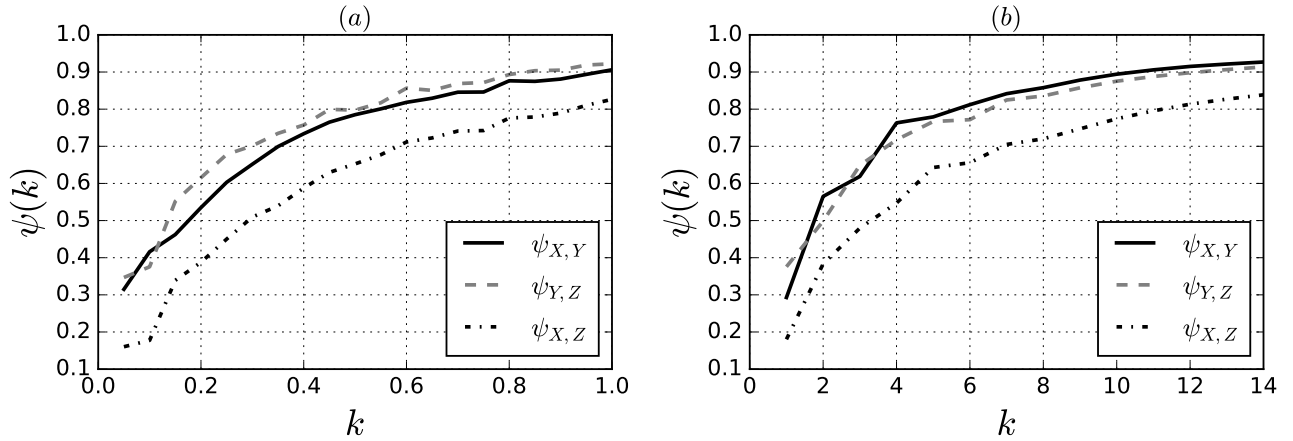


Рис. 4.11. Зависимости значений коэффициентов фазовой синхронизации ψ_{xy} , ψ_{xz} и ψ_{yz} от коэффициентов связи $k = k_{xy} = k_{yz}$: (а) – между автогенераторами с 1,5 степенями свободы в уравнении (4.16); (б) – между системами Икеды (4.17). Коэффициент $k_{zx} = 0$, что соответствовало архитектуре 1 в таблице 4.1.

$PI_{y \rightarrow x|z}$ в случае $Z \rightarrow Y \wedge Z \rightarrow X$, где наихудшие результаты достигаются при $k = 0.7$. По остальным возможным взаимодействиям метод демонстрирует ожидаемые результаты.

Аналогичным образом численный эксперимент проводился и для связанных однонаправленную связью систем Икеды (4.17). На основании зависимости, представленной на рис. 4.11 (b), были выбраны три значения коэффициента связи: $k = 2$, $k = 5$, $k = 10$, для которых проводилось три теста, с усреднением по 100 реализациям. Результаты численного эксперимента представлены на рис. 4.13. Метод демонстрирует наилучшую работоспособность для $k = 2$. При этом ошибочные выводы о наличии направленной связи наблюдаются для оценок $PI_{y \rightarrow x|z}$, $PI_{z \rightarrow x|y}$ в случаях $Z \rightarrow Y \wedge Z \rightarrow X$ и $Z \rightarrow Y \rightarrow X$. По остальным возможным взаимодействиям метод демонстрирует ожидаемые результаты.

Таким образом, в результате численного эксперимента было показано, что с использованием предложенной методики по скалярным временным рядам сложных колебаний трёх систем с выраженным характерным временным масштабом можно надёжно различить прямое и опосредованное воздействие в 82%

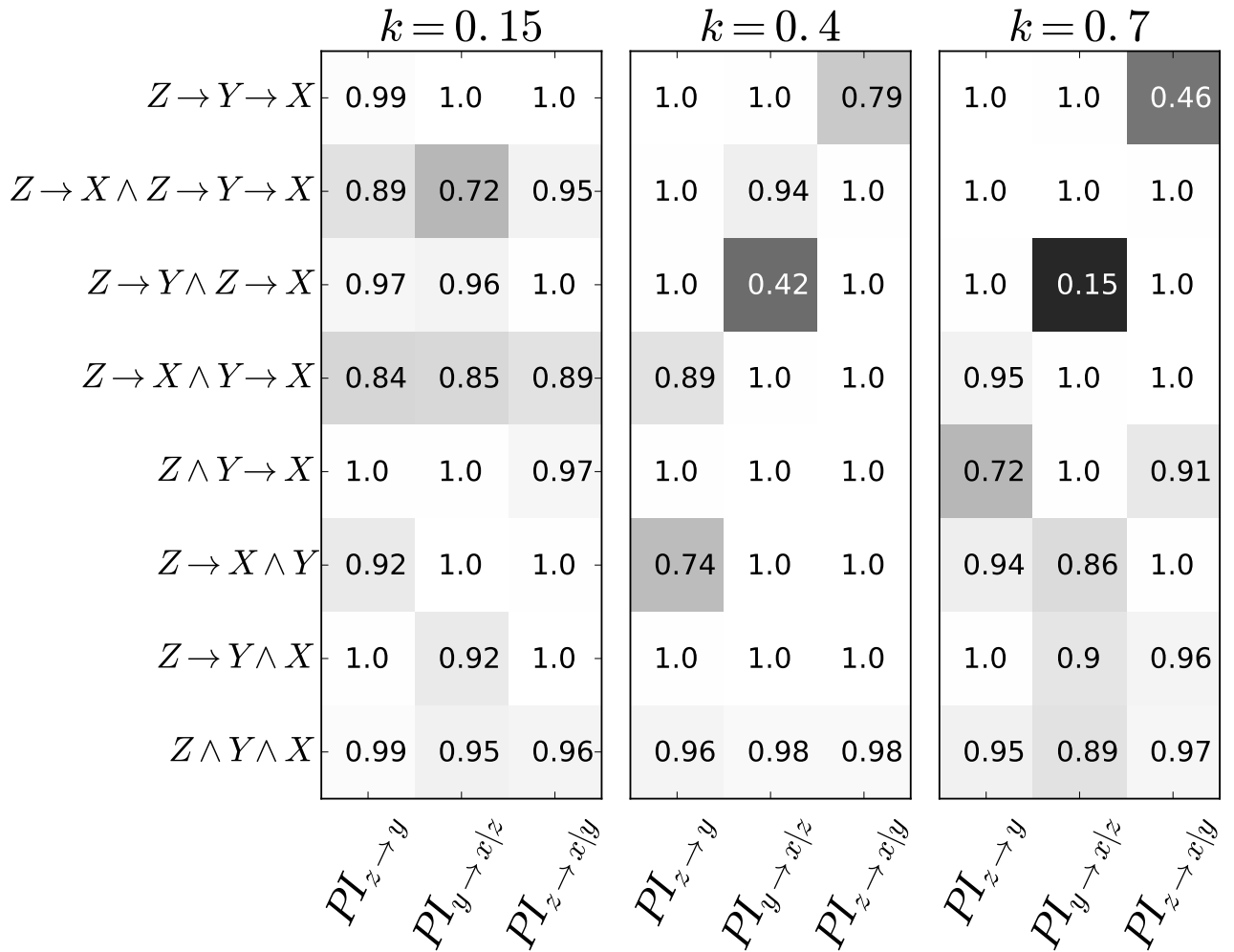


Рис. 4.12. Проценты верных выводов о наличии (отсутствии) связи между системами по выбранным 8 типам связей для автогенераторов с 1.5 степенями свободы. Для каждого типа прогностической модели градациями серого (белый – 100%, черный – 0%) и значениями отмечены отношение верных выводов (в соответствии с таблицей 4.1) к общему количеству тестов.

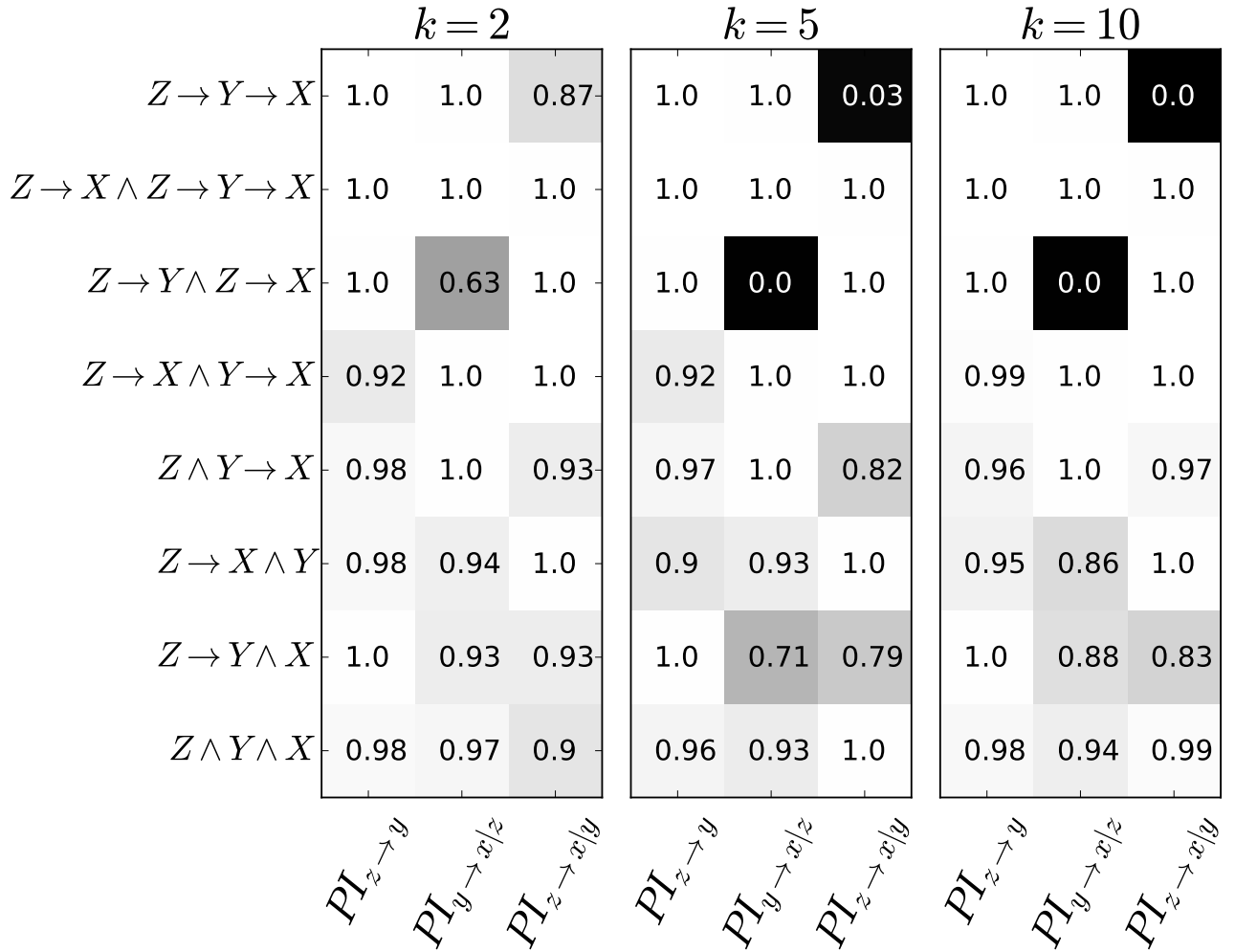


Рис. 4.13. Проценты верных выводов о наличии (отсутствии) связи между системами по выбранным 8 типам связей для систем Икеды (4.17). Для каждого типа прогностической модели градациями серого (белый – 100%, черный – 0%) и значениями отмечены отношение верных выводов (в соответствии с таблицей 4.1) к общему количеству тестов.

случаев, используя модели, построенные с учётом временных масштабов сигналов. Эффективность метода выше для некоторых «средних» коэффициентов связи, когда наличие связей заметно модифицирует динамику ведомой системы, но при этом не приводит к синхронизации. Полученный результат ценен тем, что оказывается возможным различать источник и путь распространения сигнала, не имея априорных знаний о системе, его генерирующей.

Наибольшую сложность представляет случай наличия одновременно прямого и опосредованного взаимодействия. Такой случай часто не может быть отделён от случая наличия только прямого воздействия первой системы в цепочке на обе остальные: конечную и промежуточную. Это объясняется слабым вкладом опосредованного воздействия при наличии прямого в динамику третьей системы. Однако на практике ошибки такого рода, как правило, наименее критичны. Также показано, что использованный подход пригоден для выявления факта отсутствия связей в цепочке или её разрыва, поскольку он позволяет определить отсутствующие связи. При таком использовании его эффективность достигает 90% и более.

Результаты, полученные при исследовании цепочек из двух различных типов эталонных осцилляторов, в основном сходны, хотя для систем автогенераторов с 1,5 степенями свободы эффективность метода в среднем выше, что может объясняться более простой динамикой отдельных систем (меньшая размерность) и более выраженным временным масштабом колебаний. Это позволяет лучше подобрать параметры метода на основании ранее разработанных в рамках диссертационной работы критериев.

4.5. Выводы

Влияние шумов на результаты поиска связанности по экспериментальным сигналам различными методами мало исследовано, в то время как они всегда присутствуют в канале связи. Как правило, шумы приводят к потере инфор-

мации о связях, особенно слабых, поскольку вклад, вносимый ими в динамику ведомой системы, становится неразличимо мал. Поэтому особый интерес представляет возможность немонотонной зависимости любой меры связи — в рассмотренном случае показателя улучшения прогноза PI — от среднеквадратичного отклонения шума, так как рост улучшения прогноза с увеличением интенсивности шума является контринтуитивным.

В данной главе зависимость улучшения прогноза от уровня шума исследовалась для однонаправленно связанных систем на численных примерах: различных дискретных отображениях и потоковых система. Для расчёта причинности по Грейнджеру рассматривались модели в виде отображения последования с полиномиальной нелинейностью, как и в работах [7; 113; 163; 167]. Рассматривались разные степени полинома.

По результатам проведённых численных экспериментов можно сделать следующие выводы. Нетривиальное поведение зависимости $PI(\sigma)$ — рост $PI(\sigma)$ в некотором диапазоне σ — наблюдается в тех же системах, что и тривиальная монотонная зависимость, но при других параметрах, причём имеют значение как параметры ведущей, так и ведомой систем. В рассмотренных примерах немонотонное поведение $PI(\sigma)$ имело место только в случае, когда в ведомой подсистеме параметры соответствовали периодическому режиму индивидуальной динамики в режиме периода 2 или более, а в ведущей — хаотическому с многоленточным аттрактором.

На основе анализа результатов можно сформулировать следующие выводы:

1. Синхронность переключения между лентами аттрактора ведущей и ведомой систем позволяет при некоторых промежуточных уровнях шума получить существенную дополнительную информацию для прогноза поведения ведомой системы, что приводит к росту показателя улучшения прогноза с увеличением дисперсии шума наблюдений.

2. Минимум и максимум в зависимости $PI(\sigma)$ выражены сильнее при малых уровнях связи, поскольку в таком случае сравнительно небольшие шумы могут сильно исказить информацию о связи, но при этом не способны уничтожить информацию о синхронности переключений между лентами.

Полученные результаты представляются важными в первую очередь для анализа нестационарных сигналов сложных систем при переменном соотношении сигнал/шум. В таком случае рост величины улучшения прогноза нельзя трактовать как увеличение силы связи, если при этом отношение сигнал/шум значимо изменилось (в том числе увеличилось). Неучёт данного обстоятельства может привести к ошибкам в диагностике изменений силы взаимодействия. Кроме того, данные результаты показывают, что улучшение соотношения сигнал/шум в измерительных приборах не всегда будет приводить к росту значения PI (т. е. росту чувствительности метода).

При наличии внешней общей низкочастотной помехи в данной работе на эталонных системах нелинейной динамики были предложены некоторые рекомендации для случая однонаправленной связи при использовании полиномиальных моделей и сигналов с одним выраженным временным масштабом. Полученные на основе данных численного эксперимента результаты изложены далее:

- При относительно малых значениях эффективной дисперсии низкочастотной помехи ($\Theta < 0.03$) наилучшие результаты получаются при использовании $l > T$, зафиксировав при этом как можно более малую дальность прогноза $\tau = 1$, или же фиксируя значение $l = 1$, имеет смысл выбирать $\tau \sim 0.4T$, где T — характерный период системы. При этом фильтрация ухудшает в целом специфичность результатов, и делает различия между значениями PI_{true} и PI_{false} менее ярко выраженными.
- При бóльших значениях относительной дисперсии помехи ($\Theta > 0.04$) фильтрация существенно увеличивает количество правильных результатов о наличии однонаправленной связи и должна быть применена.

Для практического применения представленных рекомендаций, оценка эффективной дисперсии помехи может быть проведена по спектру сигналов в предположении о том, что её частота известна (или может быть определена, поскольку присутствует в спектре обоих сигналов: как ведущей, так и ведомой систем). Для этого необходимы определённые априорные сведения о природе изучаемых систем, так как нужно быть уверенным, что приходящая за помеху когерентная компонента не порождается самими связанными объектами.

В данном исследовании мы основывались на предложенных в [165] интегральных критериях эффективности метода причинности по Грейнджеру для однонаправленно связанных систем. На их основании были сформулированы рекомендации по фильтрации общей низкочастотной помехи и выбору параметров метода: лага l , используемого для реконструкции пространства состояний методом временных задержек, и дальности прогноза τ . Хотя следование этим рекомендациям позволяет улучшить чувствительность и специфичность метода, повысив шансы на верное детектирование связи, на практике они не позволяют судить об уровне значимости полученных оценок связанности, поскольку значение коэффициента улучшения прогноза (3.3) сложно сопоставить величине коэффициента связи между объектами и понять, удалось ли попасть в промежуток коэффициентов связи, в котором метод оказывается чувствителен и специфичен одновременно.

Помимо результатов, связанных с влиянием шумов и низкочастотных помех, в данной главе предложена методика реконструкции связей в цепочке однонаправленно связанных осцилляторов на основе проведения трёх тестов, оценивающих прямое и опосредованное взаимодействие методом условной причинности по Грейнджеру, используя прогностические модели с полиномиальной нелинейностью. Показано, что данный подход позволяет в более чем 80% верно определять архитектуру связей. Методика может быть далее обобщена на 4 и более системы.

Результаты четвёртой главы опубликованы в работах [170; 175; 176].

Определение связей методом причинности по Грейнджеру по нестационарным временным рядам при наличии быстрых переходных процессов

5.1. Введение

Изучение переходов от одного типичного режима поведения к другому в сложных системах, состоящих из колебательных взаимодействующих подсистем, представляет собою фундаментальную задачу, решение которой имеет приложение в самых различных областях знания. В частности, в нейрофизиологии мозг часто рассматривается как система взаимодействующих структур таких, как ядра таламуса, слои коры больших полушарий, гиппокамп и др., каждая из которых в свою очередь состоит из меньших подсистем и способна генерировать сложные колебания как самостоятельно, так и во взаимодействии с другими. Также в климатологии многие процессы представляются как результат взаимодействия сложных колебательных систем, лежащих в основе таких явлений, как Эль Ниньо, Североатлантическое колебание или Индийский муссон.

Среди всех методов оценки направленной связанности таких, как частная направленная когерентность [8], энтропия переноса [6] и методы, основанные на фазовой динамике [61; 62], метод причинности по Грейнджеру [1] кажется наиболее подходящим для анализа нестационарных данных, поскольку этот параметрический метод имеет наименьшие требования к объёму экспериментальных данных среди всех перечисленных. Именно поэтому оказывается возможным с его помощью анализировать экспериментальные временные ряды в скользящем

окне, как это было предложено в работе [4].

Все подходы к определению связи можно разделить на методы парного анализа и методы анализа многомерных данных. Подходы к реконструкции архитектуры связей в ситуации наличия значительной априорной информации были рассмотрены нами в главах 1 и 2 для некоторых специфических видов объектов. Ряд универсальных алгоритмов предлагается в [99; 177], но все они требуют больших объёмов данных. В работе [178] предложен алгоритм, основанный на удалении части несущественных переменных (мод) и перенормировке наблюдаемого вектора состояния, но он применим только тогда, когда отдельные компоненты этого вектора нельзя однозначно сопоставить с некоторыми конкретными элементами или подсистемами, что часто неприменимо. Принципиальная проблема всех методов многомерного анализа в том, что при разделении всех связей на прямые и опосредованные предполагается, что все элементы ансамбля, принимающие активное участие во взаимодействии, измеримы. Но если всего лишь один или два таких элемента остаются неизмеримы, что часто имеет место на практике, многие выводы об опосредованности связей могут оказаться ошибочны. Поэтому в рамках данного исследования было решено сосредоточиться на попарном анализе методом нелинейной причинности по Грейнджеру, поскольку он требует меньше всего данных, позволяя увеличить временное разрешение, не зависит в значительной степени от наличия априорных данных о структуре уравнений для элементов ансамбля и в то же время учесть сложные взаимодействия. По причине важности временного разрешения также пришлось отказаться от условной причинности по Грейнджеру [7] — подхода, позволяющего частично разрешить проблему разделения прямых и опосредованных связей, поскольку условная причинность для многомерных данных ведёт к существенному росту размерности и, как следствие, росту числа коэффициентов.

В свете вышесказанного, цель данной главы состоит в том, чтобы протестировать способность метода нелинейной причинности по Грейнджеру обнаружи-

вать значительные изменения в связанности, происходящие путём сравнительно быстрого относительно основных временных масштабов колебаний изменения коэффициента связи и приводящие к видимой смене режима поведения. В рамках сформулированной цели следует ответить на следующие вопросы:

1. Всегда ли метод определяет направленность связи верно, может ли он определять однонаправленную связь как двунаправленную?
2. В какой ситуации чувствительность метода может быть недостаточна, например, вследствие недостаточного учёта нелинейности, как это уже было показано для стационарных рядов в работах [7; 163]?
3. Как правило, для оценки значимости используются суррогатные временные ряды. Насколько различные подходы к построению суррогатов могут повлиять на результат при условии малой длины временного окна (для стационарных временных рядов этот вопрос исследовался нами ранее)?
4. Как метод реагирует на увеличение уровня синхронности колебаний взаимодействующих подсистем? Можно ли различить случаи, когда синхронность является результатом однонаправленного воздействия, двустороннего взаимодействия или просто совпадения ритмов? Это особенно актуально для коротких рядов (временных окон), для которых набег фаз из-за небольшой разницы собственных частот колебаний будет несущественен.
5. Каково предельное временное разрешение при оценке связанности методом причинности по Грейнджеру? Как метод реагирует на отложенные изменения — ситуацию, при которой изменение оператора эволюции приводит к изменению амплитуды, частоты и спектра колебаний через продолжительное время, сравнимое с длиной временного окна, в котором производится анализ?
6. Может ли метод выявить, когда аналогичные изменения амплитуды и

формы сигнала происходят из-за изменений в связанности и когда из-за изменений параметров индивидуальных подсистем?

Поскольку сформулированные вопросы сложны и их решение в общем виде не представляется возможным, по крайней мере в рамках одной работы, рассмотрение будет ограничено достаточно узким классом систем и сигналов, чтобы выявить наиболее общие моменты.

5.2. Эталонные осцилляторы и методика исследования

В качестве эталонных осцилляторов были использованы хорошо известные в нелинейной динамике системы. Они были модифицированы так, чтобы демонстрировать два существенно различных режима поведения: низкоамплитудные нерегулярные колебания (*режим 1*) и более регулярные высокоамплитудные колебания (*режим 2*). Связь была введена специальным образом так, чтобы дать возможность переключаться между этими режимами одним из двух способов: либо через изменение индивидуальных параметров подсистем, либо изменяя коэффициент связи, причём оба способа вели к одинаковым изменениям в амплитуде и форме колебаний. Рассматривались ансамбли, состоящие из 2–4 осцилляторов.

Эталонный осциллятор первого типа — модель стохастического генератора с жёстким возбуждением и потенциалом Тоды (5.1):

$$\frac{dx_i}{dt} - (r_i - x_i^4 + k_i(t)x_j^2) \frac{dx_i}{dt} + 1 - e^{-x_i} = \xi_i(t), \quad (5.1)$$

где i есть номер текущего осциллятора, j есть номер воздействующего осциллятора (связи в ансамблях были организованы так, что было возможно только одно воздействие на каждый осциллятор), $k_i(t)$ — переменный во времени коэффициент связи, r_i — параметр нелинейности и $\xi_i(t)$ — реализация нормального белого шума. Коэффициенты нелинейности брались из диапазона $r_i \in [-0.14; -0.07] \forall i$, что в отсутствие шума соответствует устойчивой точке.

Эталонный осциллятор второго типа — хорошо известная система Рёсслера:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -y_i - z_i, \\ \dot{y}_i &= x_i + a_i y_i, \\ \dot{z}_i &= b_i - z_i (c_i - x_i - 2.5k_i z_j) + \xi(t),\end{aligned}\tag{5.2}$$

где i, j и ξ имеют тот же смысл, а a_i, b_i и c_i суть параметры индивидуальных подсистем, выбранные так, чтобы демонстрировать периодические режимы малой амплитуды: $a_i = 0.2, b_i \in [0.12; 0.2], c_i \in [2.6, 3.2]$. Эти значения далее будут рассматриваться как значения по умолчанию.

Два типа эталонных осцилляторов были выбраны с целью увеличения общности достигнутых результатов: системы (5.1) и (5.2) имеют разную размерность и демонстрируют различные режимы при выбранных параметрах и нулевом коэффициенте связи: подпороговые колебания, вызванные шумом, в случае (5.1) и низкоамплитудные периодические колебания на устойчивом цикле для (5.2). Важно, что в системе (5.2) имеет место существенное запаздывание роста амплитуды колебаний при переключении режимов по отношению к моменту изменения величины коэффициента связи или параметра подсистемы — см. рис. 5.1. Проблема наличия временного лага между моментом смены значений управляющих параметров и моментом, когда изменяются характеристики колебаний, такие как амплитуда, форма и спектральный состав, при идентификации взаимодействия уже поднималась в работе [179]. Эта проблема весьма важна на практике, поскольку во многих случаях для обеспечения управления, корректирующего или лечебного воздействия необходимо выявить действительный момент изменения оператора эволюции, а не далеко последующий за ним момент изменения характеристик динамики.

Уравнения всех эталонных систем решались численно с шагом выборки 0.08 единиц. Для соответствия экспериментальным данным, рассмотренным далее в рамках главы 6, мы перенормировали время $1 \text{ с} = 1024$ точек выборки. Для обоих типов осцилляторов в качестве измеряемой рассматривалась коорди-

ната x каждой из подсистем в ансамбле. Общая длина исследуемых реализаций составляла 30 с. Во всех рассмотренных случаях каждый осциллятор с номером i находился под воздействием только одного осциллятора с номером j , но структура связей между четырьмя осцилляторами в ансамбле могла различаться, чтобы проверить различные гипотезы.

Все временные ряды делились на три стадии равной длины. Первая стадия (0–10 с, т.е. первые 10240 значений в ряде) и третья стадия (20–30 с, т.е. последние 10240 значений) соответствовали *режиму 1* с нулевым или очень малым коэффициентом связи $k = 0$ (или $k = 0.01$), при значениях по умолчанию для остальных параметров. Было обнаружено, что при очень малых коэффициентах связи таких как $k = 0.01$, характеристики временных рядов, в частности автокорреляционная функция и одномерная плотность вероятности, статистически неотличимы от случая отсутствия связи (на основе теста Колмогорова–Смирнова). Описанный ниже анализ связанности также показал, что метод причинности по Грейнджеру не различает случаи $k = 0.01$ и $k = 0$. Основные причины для этого состоят в следующем: во-первых, длина скользящего временного окна, в котором проводится анализ, довольно мала (только 512–2048 точек и 4–16 периодов соответственно), во-вторых, во всех системах присутствует динамический шум, уровень которого превосходит вклад, даваемый членом связи при столь малой величине k . Поэтому случаи малой связи и отсутствия связей далее рассматриваются вместе и соответствующие системы называются несвязанными.

Вторая стадия (средние 10–20 с) соответствовала *режиму 2*, переход к которому осуществлялся либо за счёт увеличения коэффициента связанности до значения $k = 0.65$, либо за счёт изменения параметров индивидуальных подсистем с их значений по умолчанию: r_i для осцилляторов вида (5.1) и s_i для осцилляторов вида (5.2). Если рассматривались более 2 систем, все значения k_i изменялись одновременно и на одну и ту же величину. Во время переходных процессов коэффициенты k_i увеличивались и уменьшались гладко с шагом

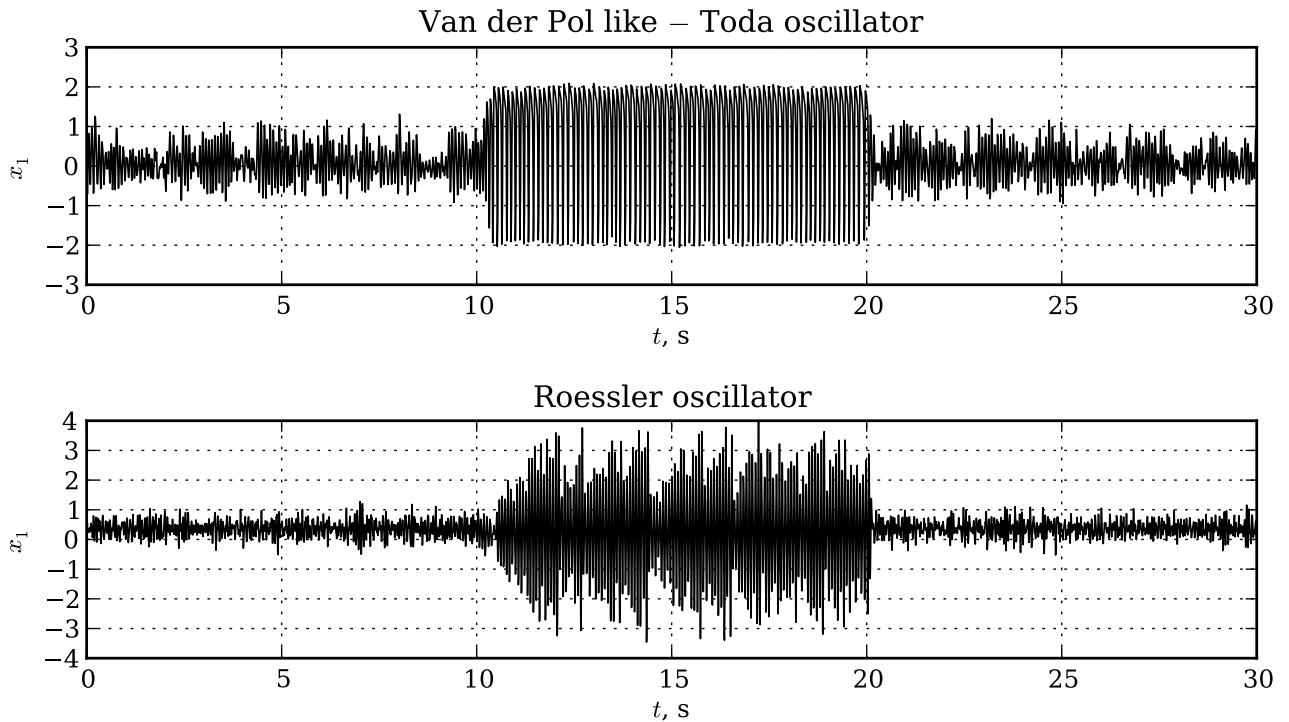


Рис. 5.1. Временные ряды эталонных осцилляторов вида (5.1) и вида (5.2).

в $\Delta k = 0.001$ за каждую $1/8192$ с (за $1/8$ интервала выборки). Аналогичным образом изменялись параметры r_i и c_i , если переход между режимами осуществлялся за счёт них, при этом коэффициент связи оставался на своём изначальном низком уровне ($k = 0$ или $k = 0.01$). Для каждой рассмотренной архитектуры связей генерировался ансамбль из 100 реализаций ото всех осцилляторов, для каждой реализации выбирались свои случайные начальные условия и независимая реализация шума. Столь значительное число реализаций было необходимо, чтобы обеспечить статистическую значимость полученных результатов.

В большинстве рассмотренных случаев причинность по Грейнджеру рассчитывалась в скользящем временном окне длиной $w = 1$ с (1024 точек данных) со сдвигом в 0.1 с (значения $w = 1/2$ с и $w = 2$ с также рассматривались дополнительно к основному случаю в ряде численных экспериментов). Такой подход получил в литературе название «переменная во времени причинность по Грейнджеру» [4].

Чтобы ответить на сформулированные во введении к главе вопросы, было проведено значительное количество численных экспериментов. В частности, для ответа на вопросы 1 и 2 были рассмотрены самые различные структуры связей, см. раздел 5.5.

Чтобы ответить на вопрос 3, два наиболее популярных подхода к генерации суррогатных данных были рассмотрены [30] во всех численных экспериментах. Первый подход — это случайное задание фаз гармоник Фурье образа, когда с наблюдаемым сигналом делается прямое Фурье-преобразование, затем амплитуды всех гармоник сохраняются, а их фазы задаются случайными числами, равномерно распределёнными в интервале $[0; 2\pi)$, а затем суррогатный ряд получается обратным Фурье-преобразованием. При использовании этого подхода для каждого ряда в ансамбле изготавливались 100 различных суррогатов с разными случайными фазами. Второй подход состоял в случайной перестановке реализаций из ансамбля: в качестве суррогатных рядов рассматривались такие пары, в которых при определении связанности одна реализация, например, системы X бралась из одного измерения, а вторая — из другого в том же ансамбле реализаций, таким образом сохранялись все частотно временные характеристики рядов, но утрачивалась действительная связь. Поскольку в нашем распоряжении имелось 100 реализаций, получить 100 пар, удовлетворяющих этому условию, не составляло труда. Хотя формально два этих подхода проверяют две разные гипотезы, они оба очень часто используются на практике для проверки наличия связанности.

Чтобы ответить на вопрос 4, во всех рассмотренных случаях определялась степень синхронности колебаний ведущей и ведомой систем. Поскольку полная синхронизация, как уже отмечалось ранее, очевидным образом препятствует какому-либо определению силы и направления связанности, мы ограничились тестированием на фазовую синхронизацию, так как она, как правило, предшествует всем остальным формам [59] и должна быть типична для систем с выраженным временным масштабом колебаний, которые мы рассматриваем. В

качестве меры синхронизации использовался коэффициент фазовой синхронизации (когерентности), введённый в работе [162] следующим образом:

$$\Phi_{x,y} = \left| \left\langle \exp(i(\phi_x - \phi_y)) \right\rangle_{n=1,\dots,N} \right|, \quad (5.3)$$

где N — это число точек во временном ряде, а ϕ_x и ϕ_y суть фазы изучаемых сигналов $\{x_n\}_{n=1}^N$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$ соответственно. Если разница фаз между сигналами фиксирована во времени, то $\Phi_{x,y} = 1$, если же она равномерно распределена на полуинтервале $[0; 2\pi)$, т. е. все возможные значения разности фаз одинаково вероятны (нет никакой синхронности фаз), тогда $\Phi_{x,y} = 0$. Величина Φ оценивалась в скользящем временном окне той же длины, что и используемое для расчётов причинности по Грейнджеру. Также оценивался 95% доверительный интервал для Φ на основе своих собственных суррогатных рядов, построенных для каждого временного окна отдельно путём случайного задания фаз Фурье-образа.

5.3. Исследование чувствительности и специфичности метода вблизи порога фазовой синхронизации

Значительное число методов оценки связанности посвящено системам, связанным слабо, например, к такого рода работам относятся различные вариации метода фазовой динамики [61; 62], где слабость взаимодействия декларируется явно. Часто сильной связи соответствует тот или иной тип синхронизации, хотя это и не обязательно [59]. При построении метода причинности по Грейнджеру такие ограничения явно не закладывались, однако ясно, что при полной синхронизации определить направление и силу связи по данным будет невозможно, а в случае обобщённой синхронизации её детектирование автоматически означает и определения направления связи. Поэтому наиболее актуальным является вопрос о том, насколько хорошо метод будет работать вблизи порога фазовой синхронизации.

В данной работе исследовалась способность метода нелинейной причинности по Грейнджеру выявлять наличие и направление связи для класса однонаправлено связанных синхронизирующей связью систем, имеющих чётко выраженный пик в спектре и демонстрирующих хаотические колебания. Значение параметра связи варьировало от нуля до величины, при котором наблюдалась сильная синхронизация систем. Степень синхронности оценивалась с помощью коэффициента фазовой синхронизации (рассчитывался согласно [162]) и по отношению дисперсии разностного сигнала к дисперсии сигнала ведомой системы. Полученные в результате применения метода результаты проходили проверку на значимость, для чего использовались суррогатные временные ряды, соответствующие различным гипотезам.

5.3.1. Методика численного эксперимента

В качестве объектов исследования использовались связанные однонаправленной синхронизирующей связью (в этом отличие от аналогичных систем, рассмотренных в предыдущем разделе, см. формулы (5.5) и (5.4)) системы Рёсслера [150] (5.4)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2 + k(y_2 - x_2) \\ \dot{x}_3 = b_1 - (c_1 - x_1)x_3 \\ \dot{y}_1 = -y_2 - y_3 \\ \dot{y}_2 = y_1 + a_2 y_2 \\ \dot{y}_3 = b_2 - (c_2 - y_1)y_3 \end{cases} \quad (5.4)$$

и уравнения генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича [16] (5.5)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.15x_1 + x_2 - 0.93x_3 + k(y_1 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 \\ 0.2\dot{x}_3 = x_1 - f(x_3) \\ \dot{y}_1 = 0.23y_1 + y_2 - 0.755y_3 \\ \dot{y}_2 = -y_1 \\ 0.2\dot{y}_3 = y_1 - f(y_3) \end{cases} \quad (5.5)$$

$$f(p) = 8.592p - 22p^2 + 14.408p^3.$$

Коэффициент связи k менялся от 0 (нет связи) до достижения синхронизации (в случае связанных систем Рёсслера — 1, Кияшко–Пиковского–Рабиновича — 0.06).

Для обеих систем:

- параметры эталонных осцилляторов были выбраны таким образом, чтобы получить хаотические режимы для каждой подсистемы как в отсутствии, так и при наличии связи;
- уравнения интегрировались методом Рунге–Кутты 4-го порядка, с интервалом выборки $\Delta t = 0.01$;
- отсекался переходной процесс длиной в 1000 единиц безразмерного времени;
- в численном эксперименте использовались ряды длиной 20480 значений;
- в качестве аппроксимирующих функций метода нелинейной причинности по Грейнджеру использовались полиномы третьей степени, $D_s = 2$, $D_a = 1$;
- значения $\tau = 1$ и $l \sim T/3$, где T — характерный период колебаний системы;

- рассчитывалось улучшение прогноза как в направлении, в котором связь действительно присутствовала (далее обозначено PI), так и в ложном направлении (далее обозначено rPI).

Использовались два набора параметров для системы Рёсслера, отвечающие за различный тип аттрактора, для которых старшие ляпуновские показатели ведомой системы, рассчитанные при нулевом значении коэффициента связи k , принимали значения 0.06 ($a_1 = 0.146$, $b_1 = 0.3$, $c_1 = 10$, $a_2 = 0.16$, $b_2 = 0.2$, $c_2 = 16$) и 0.11 ($a_1 = 0.25$, $b_1 = 0.2$, $c_1 = 7.5$, $a_2 = 0.21$, $b_2 = 0.15$, $c_2 = 12$) соответственно.

В качестве наблюдаемых использовались временные ряды координаты x_2 для связанных систем Рёсслера и x_1 для уравнений генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича. На рис. 5.2 представлены эти временные ряды для случая сильной синхронизации систем. Из графика 5.2(а) видно, что наблюдается синхронизация колебаний, однако периодически имеет место некоторое расхождение траекторий соответствующих координат воздействующей системы и системы, находящийся под воздействием. Для связанных уравнений генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича графики координат демонстрируют более регулярное поведение, видно что график воздействующей системы имеет опережение порядка $\pi/2$.

Полученные в результате применения метода нелинейной причинности по Грейнджеру значения PI усреднялись по 20 реализациям, после чего проводилась проверка значимости и специфичности выводов. Для оценки значимости результатов использовались следующие суррогатные временные ряды:

- построенные на основе тех же систем, что и тестировались, но при отсутствии связи (такое было возможно, т. к. были известны модельные уравнения аттракторов); данные суррогатные временные ряды рассматривались как эталонные и проверяющие нулевую гипотезу об отсутствии направленной связи, поэтому будем называть их «идеальными», полученный на

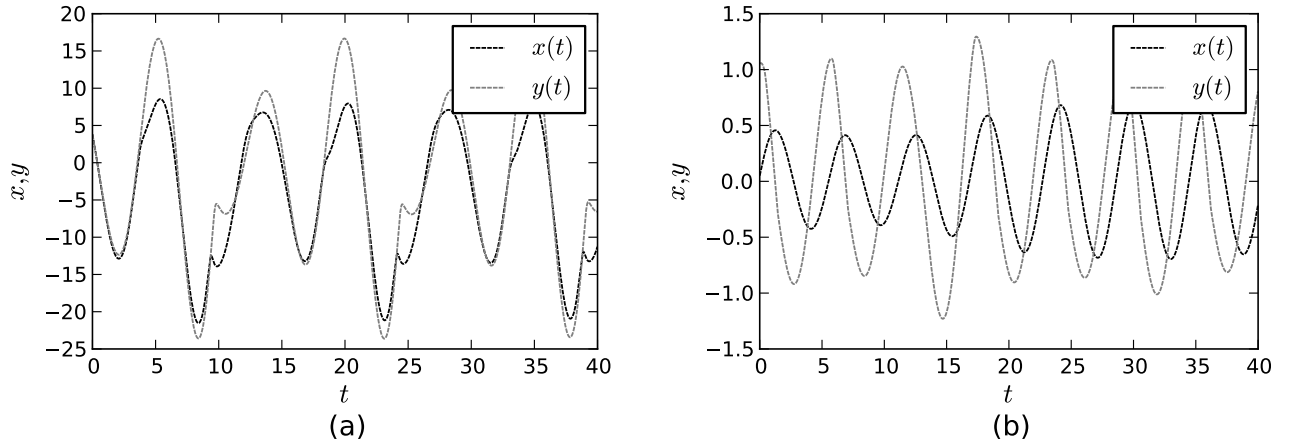


Рис. 5.2. Временные ряды воздействующей $y(t)$ и системы, находящейся под воздействием, $x(t)$ (a) — для связанных систем Рёсслера, (b) — для связанных уравнений генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича

основе данных суррогат 95% доверительный интервал в дальнейшем обозначим PI_{ideal} ;

- полученные с помощью случайного задания значений фаз Фурье образов сигналов [180], полученный на основе данных суррогатных рядов 95% доверительный интервал — PI_{phase} ;
- сохраняющие значения функции когерентности [154], полученный на основе данных суррогат 95% доверительный интервал — PI_{coh} ;
- полученные перестановкой частей временного ряда системы [181], полученный на основе данных суррогат 95% доверительный интервал — PI_{transp} ;

Создавался набор из 100 суррогатных временных рядов, и оценивалась 95% квантиль.

5.3.2. Результаты численного эксперимента

Результаты исследования работоспособности метода для связанных систем Рёсслера со старшим ляпуновским показателем $\Lambda = 0.06$ и $\Lambda = 0.11$ и связан-

ных уравнений генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича ($\Lambda = 0.059$) представлены на рисунках 5.3, 5.4, 5.5 соответственно.

Для связанных систем Рёсслера меры синхронизации, представленные на рис. 5.3, 5.4 (a) и (b), ведут себя сходно: с ростом значения коэффициента связи k наблюдается увеличение значения коэффициента фазовой синхронизации $\Psi_{x,y}$ и уменьшение значения $\Delta_{x,y}$ — отношения дисперсии разности сигналов к дисперсии сигнала, находящегося под воздействием. Это говорит о том, что в данном случае процессы фазовой и амплитудной синхронизации происходят одновременно. При этом чем выше значение старшего ляпуновского показателя системы, тем большие k требуются для достижения одного и того же уровня как $\Psi_{x,y}$, так и $\Delta_{x,y}$.

На рис. 5.3, 5.4 (d) представлены результаты работы метода нелинейной причинности по Грейджеру в зависимости от значения k между системами, а также 95% квантили, полученные с помощью различных подходов к генерации суррогатных временных рядов. Видно, что значения PI в обоих случаях оказываются значимы, начиная с достаточно малых $k \sim 0.01$, при которых уже наблюдается заметная синхронизация систем $\Psi_{x,y} \sim 0.5$. При поиске связи в заведомо ложном направлении значения rPI оказываются значимы при больших значениях k ($k > 0.5$ при $\Lambda = 0.11$). На рис. 5.3, 5.4 (c) представлены зависимости разности $PI - rPI$ от коэффициента связи, на которых наблюдается максимум при значениях $k \sim 0.5$, что соответствует большому значению фазовой синхронизации системы ($\Psi_{x,y} \sim 0.9$). Однако значения PI в обоих случаях не достигают значения 1, что обусловлено в первую очередь тем, что используемая модель слишком проста и недостаточно специализирована для наблюдаемой динамики. При этом следует признать, что метод оказывается способен выявить наличие связи и распознать её как однонаправленную даже при сильной фазовой синхронизации.

Для связанных систем уравнений генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича результаты исследования представлены на рис. 5.5. Зависимости значе-

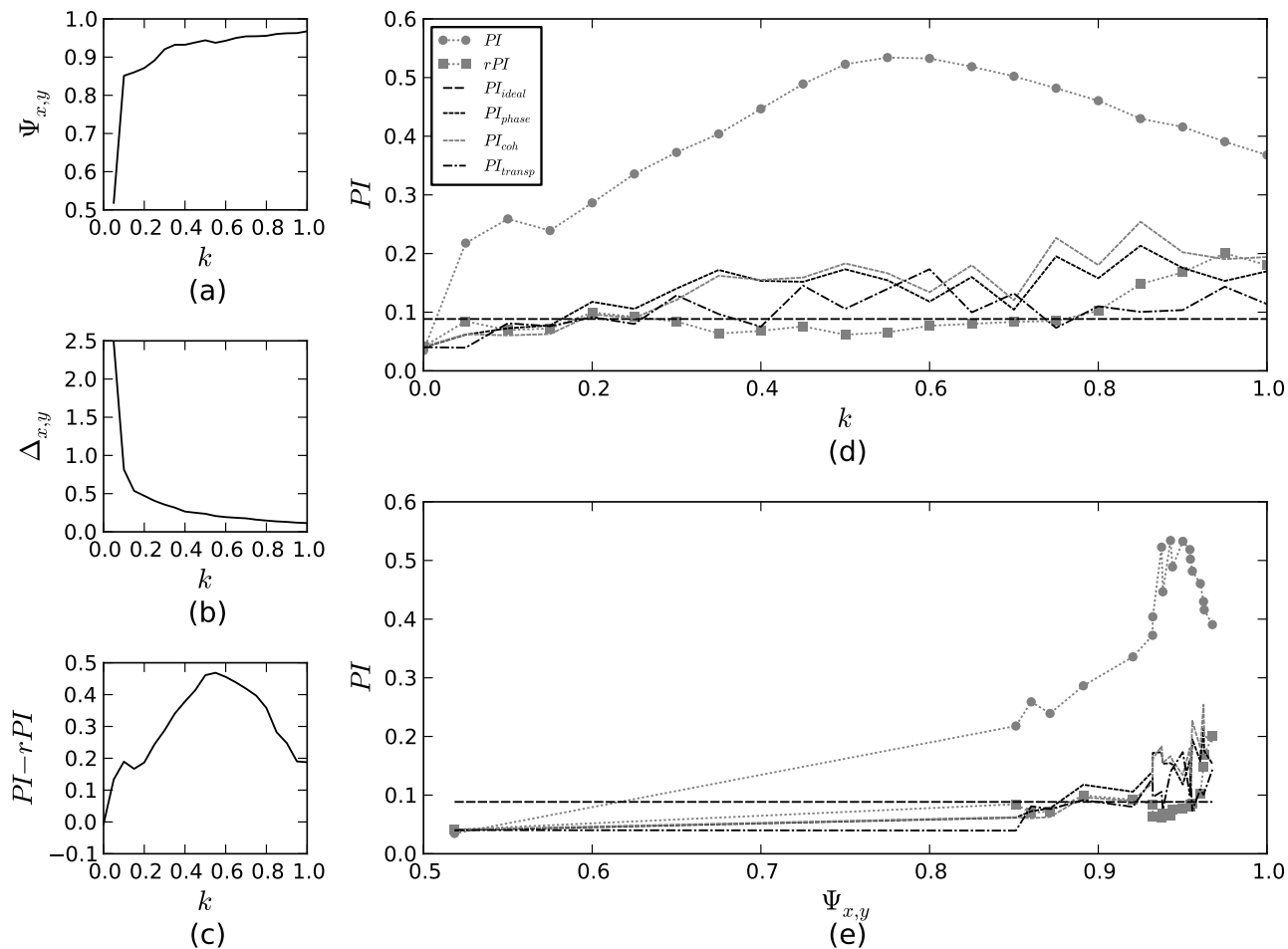


Рис. 5.3. Для связанных однонаправленной связью систем Рёсслера с старшим ляпуновским показателем равным 0.06 показаны зависимости следующих величин от значения коэффициента связи между системами: (а)коэффициента фазовой синхронизации; (б) отношение дисперсии разности исследуемых временных рядов ведущей и ведомой систем к дисперсии временного ряда исследуемой системы; (с) разность $PI - rPI$. На графиках (d) и (e) представлены зависимости значений PI и rPI от коэффициента связи и коэффициента фазовой синхронизации соответственно, а также 95% доверительные интервалы, полученные с помощью различных подходов к генерации суррогатных временных рядов.

ния $\Psi_{x,y}$ и $\Delta_{x,y}$ растут с увеличением значения k , таким образом происходит фазовая синхронизация исследуемых систем, однако амплитудной синхронизации не происходит. Значения PI также оказываются значимыми, начиная с достаточно малых значений коэффициента связи $k \sim 0.005$, что соответствует значению $\Psi_{x,y} \sim 0.15$ (более слабой, чем для связанных систем Рёсслера, фазовой синхронизации). Значения rPI оказываются значимыми начиная с $k \sim 0.03$ и $\Psi_{x,y} \sim 0.2$, то есть имеется небольшой диапазон как по параметру связи k , так и по коэффициенту фазовой синхронизации, в котором метод оказывается чувствителен и одновременно специфичен. Этот диапазон, однако, гораздо меньше, чем для системы Рёсслера. В то же время, всё же можно определить преимущественное направление связи: из рис. 5.5 (с) видно, что существует хорошо выраженный интервал значений k , на котором значения PI существенно больше значений rPI — почти в 10 раз — так что их разница достигает значений около 0.8 при максимально возможном значении 1. Только при значениях $\Psi_{x,y} > 0.97$ не удаётся различить даже преимущественное направление связи.

Значения старшего ляпуновского показателя для связанных уравнений генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича и систем Рёсслера (с первым набором параметров) очень близки и составляют примерно 0.06, но индивидуальная специфика систем (см. рис. 5.2) приводит к тому, что в одной паре фазовая синхронизация наступает параллельно с амплитудной, а в другой нет. При этом в паре систем Рёсслера все типы использованных суррогатных временных рядов позволяют опознать связь в заведомо неверную сторону как незначимую для всех рассмотренных значений $\Psi_{x,y}$ за редким исключением (что укладывается в возможные 5% ошибок), в то время как для пары связанных уравнений генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича уже при небольших $\Psi_{x,y} \geq 0.23$ связь в заведомо ложную сторону расценивается по всем суррогатам как значимая.

Отдельно стоит отметить, что 95% доверительные интервалы для всех способов построения суррогатных рядов преимущественно лежат в одном и том же диапазоне. Присутствует увеличение значений 95% доверительных интервалов,

полученных для суррогатов созданных методом случайного задания фаз Фурье образов и сохраняющих функцию взаимной когерентности сигналов, с увеличением значения k . «Идеальные» суррогаты позволяют получить самую жесткую оценкой в случае малых k , таким образом можно сказать, что при малых коэффициентах связи прочие методы занижают уровень значимости.

5.4. Выбор структуры и параметров прогностических моделей

Были использованы два варианта метода причинности по Грейнджера: оригинальный линейный подход [1] и его нелинейную версию [7], в которой параметры модели: временной лаг вложения l и дальность прогноза τ были выбраны с учётом рекомендаций главы 3. Модели, использованные при реализации подхода, описанного в первоначальной работе [1], имели вид:

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= c_0^s + \sum_{i=1}^{D_s} c_i^s x_{n-(i-1)}, \\ x''_{n+1} &= c_0^j + \sum_{i=1}^{D_s} c_i^j x_{n-(i-1)} + \sum_{i=D_s+1}^{D_s+D_a} c_i^j y_{n-(i-D_s-1)}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где c_i^s суть эмпирически подгоняемые методом наименьших квадратов коэффициенты индивидуальной модели, c_i^j суть коэффициенты совместной модели. Данные модели могут быть получены из (3.1) и (3.2), если в них положить $l = 1$ и $\tau = 1$.

Для реализации нелинейного метода были использованы следующие моде-

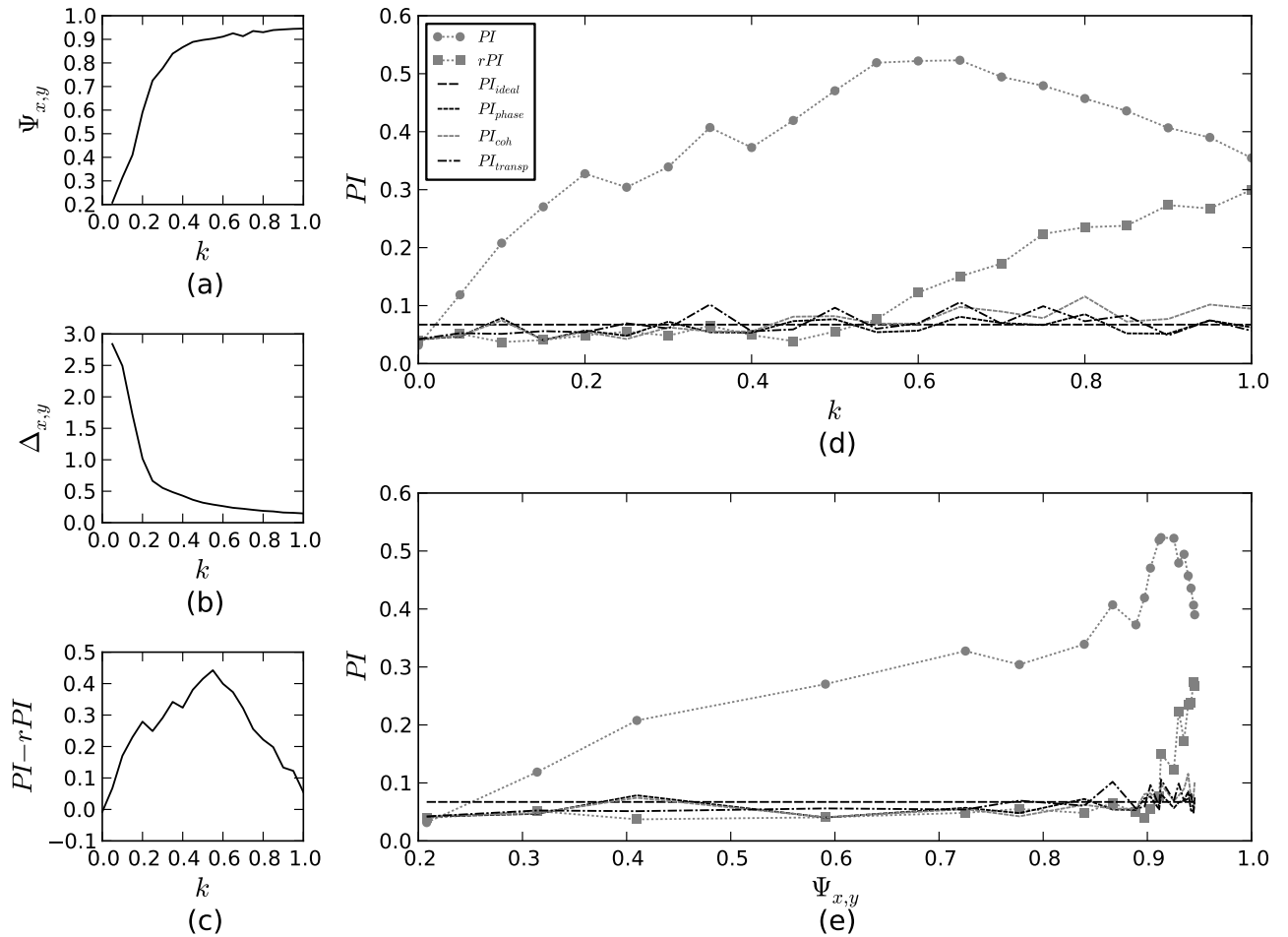


Рис. 5.4. Для связанных однонаправленной связью систем Рёсслера с старшим ляпуновским показателем равным 0.11 показаны зависимости следующих величин от значения коэффициента связи между системами: (а)коэффициента фазовой синхронизации; (б) отношение дисперсии разности исследуемых временных рядов ведущей и ведомой систем к дисперсии временного ряда исследуемой системы; (с) разность $PI - rPI$. На графиках (d) и (e) представлены зависимости значений PI и rPI от коэффициента связи и коэффициента фазовой синхронизации соответственно, а также 95% доверительные интервалы, полученные с помощью различных подходов к генерации суррогатных временных рядов.

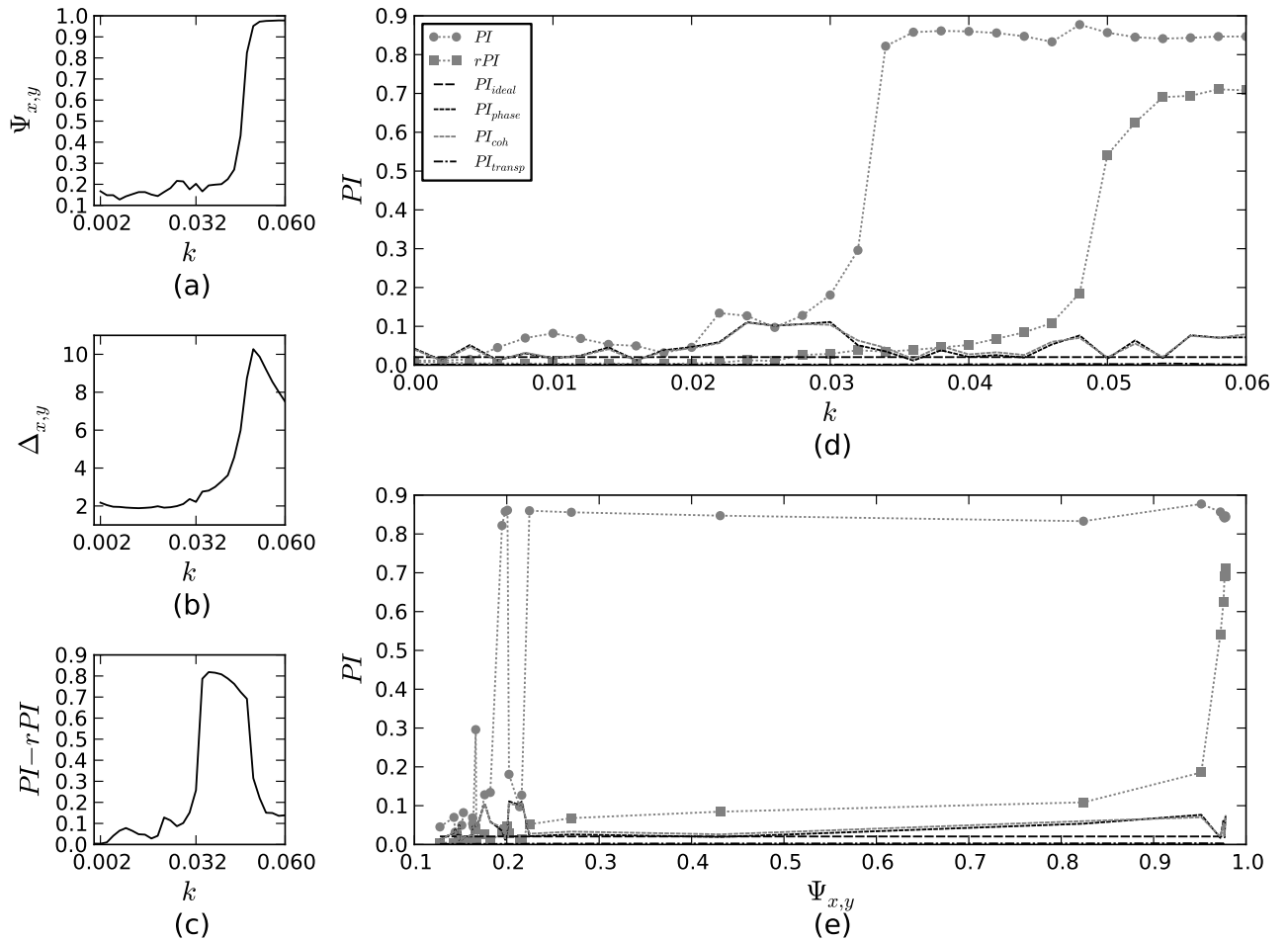


Рис. 5.5. Для связанных однонаправленной связью уравнений генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича показаны зависимости следующих величин от значения коэффициента связи между системами: (а) коэффициента фазовой синхронизации; (б) отношение дисперсии разности исследуемых временных рядов ведущей и ведомой систем к дисперсии временного ряда исследуемой системы; (с) разность $PI - rPI$. На графиках (d) и (e) представлены зависимости значений PI и rPI от коэффициента связи и коэффициента фазовой синхронизации соответственно, а также 95% доверительные интервалы, полученные с помощью различных подходов к генерации суррогатных временных рядов.

ЛИ:

$$x'_{n+\tau} = \sum_{k=0}^P \sum_{q=1}^{C_{D_s+k}^k} c_i^s \prod_{m=1}^{D_s} x_{n-(m-1)l}^{w_{k,m}^s} + c_{Z_s+1} x_{n-l_T}, \quad (5.7a)$$

$$\forall k = 0, \dots, P \sum_{m=1}^{D_s} w_{k,m}^s = k$$

$$x''_{n+\tau} = \sum_{k=0}^P \sum_{q=1}^{C_{D_s+D_a+k}^k} c_i^j \prod_{m=1}^{D_s} x_{n-(m-1)l}^{w_{k,m}^j} \prod_{m=1}^{D_a} y_{n-(m-1)l}^{w_{k,(m+D_s)}^j} + \quad (5.7b)$$

$$+ c_{Z_j+1} x_{n-l_T} + c_{Z_j+2} y_{n-l_T}$$

$$\forall k = 0, \dots, P \sum_{m=1}^{D_s+D_a} w_{k,m}^j = k,$$

где $Z_s = (P + D_s)! / (P! D_s!)$ есть число коэффициентов в собственной модели (5.7a), $Z_j = (P + D_s + D_a)! / (P! (D_s + D_a)!)$ — число коэффициентов в совместной модели (5.7b), $C_{D_s+k}^k$ есть число сочетаний из $D_s + k$ по k , P — порядок полинома, а l_T — дополнительный лаг, обеспечивающий при прогнозировании учёт значения, отстоящего от прогнозируемого значения на характерный временной масштаб T . Такой подход известен как неравномерное вложение (см. [182]) и был реализован в [183]. Вместе с определением размерности собственной модели D_s и степени полинома P , основываясь на критерии Шварца [31], введение неравномерного вложения призвано уменьшить число коэффициентов моделей Z_s и Z_j , чтобы улучшить статистические характеристики их оценок в сравнительно коротком временном окне. Критерий Шварца был рассчитан для обоих режимов 1 и 2 отдельно для обоих типов осцилляторов (5.1) и (5.2) для всех 100 реализаций в окне длиной 1 с (1024 точек данных), для чего использовались 3-я и 13-я секунды временного ряда. Для несвязанных систем распределение полученных значений размерности D_s и порядка полинома P показаны на рис. 5.6. Для однонаправленно и двунаправленно связанных систем эти распределения отличаются слабо. P и D_s были выбраны основываясь на анализе этих распределений. Для осцилляторов типа (5.1) оптимальные значения разнятся для различных режимов, что представляет некоторую сложность, поскольку струк-

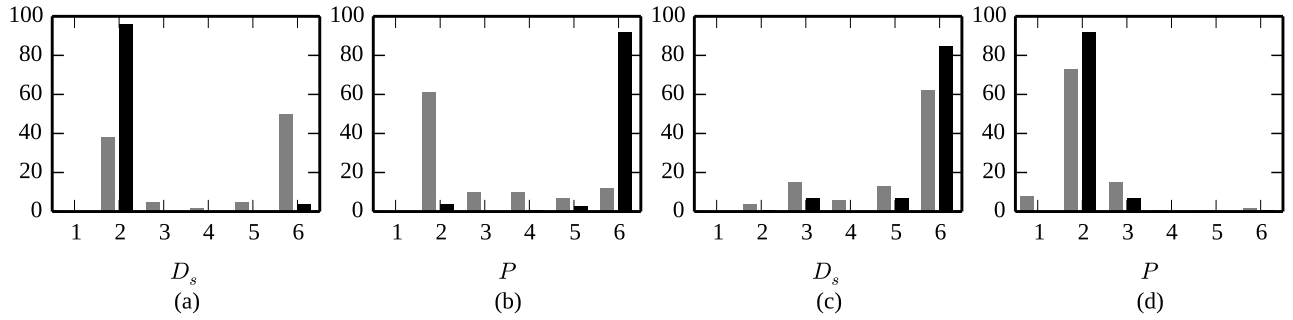


Рис. 5.6. Гистограмма распределения подобранных по критерию Шварца собственной размерности D_s и порядка полинома P для подсистем вида (5.1) (а, б) и подсистем вида (5.2) (с, д). Серые столбцы соответствует режиму 1, чёрные — режиму 2.

тура модели должна быть общему при анализе в скользящем окне. Нами был использован максимально возможный порядок полинома $P = 6$, так как он нужен для режима 2, и размерность $D_s = 2$, вторая по вероятности, поскольку использование $D_s = 6$ с $P = 6$ ведёт к слишком большому числу коэффициентов, надёжно оценить значения которых в скользящем окне выбранной длины невозможно. Для осцилляторов типа (5.2) оптимальные значения для обоих режимов не отличались: $P = 2$, $D_s = 6$. Такие результаты подбора D_s и P находятся в хорошем соответствии с тем, что исходный осциллятор (5.1) есть высоконелинейная система вследствие наличия потенциала типа Тоуды, но имеющая малую размерность, в то время как осциллятор (5.2) имеет нелинейность только второго порядка, но бóльшую размерность.

5.5. Однонаправленно связанные однотипные осцилляторы

В данном разделе рассмотрены однонаправленно связанные однотипные осцилляторы: обе подсистемы описываются либо уравнениями (5.1), либо уравнениями (5.2). Метод тестировался на определение связанности в обоих направлениях: как заведомо истинном, так и заведомо ложном.

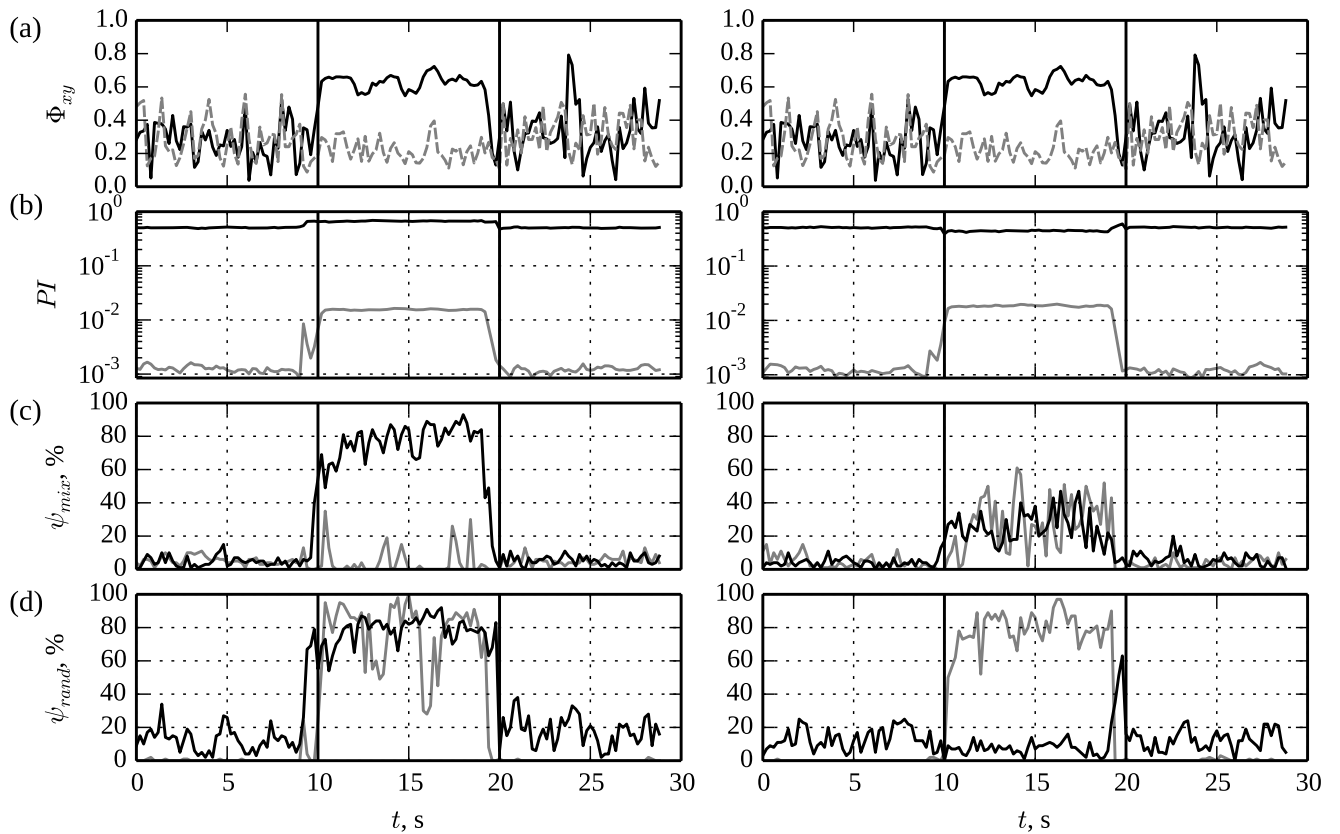


Рис. 5.7. Результаты определения связанности для однонаправленно связанных осцилляторов типа (5.1) со значимым возрастанием фазовой синхронизации в режиме 2: (а) $\Phi_{x,y}(t)$ (чёрная линия) его 95% уровень значимости (серая линия); (б) зависимость $PI(t)$. Доля (процент) значимых выводов о связанности на уровне значимости 0.05, рассчитанный с помощью различных типов суррогатных данных: (с) методом перестановки реализаций, (д) случайным заданием фаз Фурье-образа. Чёрные линии соответствуют адаптивной нелинейной модели (5.7), а серые линии — стандартной линейной модели (5.6). Левые графики на всех четырёх панелях (а–д) обозначают результаты при оценки связанности в верном направлении, а правые — в ложном.

5.5.1. «Синхронный» сценарий

Рассматривались два сценария. Для первого (условно назовём его «синхронным») во время стадии 2 имела место значимая фазовая синхронизация, то есть $\Phi_{x,y}(t)$ значимо увеличивался по сравнению со стадиями 1 и 3. Для второго сценария значимые изменения степени синхронности не обнаруживались. Для осцилляторов обоих типов переход к первому сценарию осуществлялся за счёт существенного изменения динамики ведущего осциллятора: в режиме 2 он производил относительно регулярные колебания высокой амплитуды и мог заставить второй осциллятор следовать своему основному ритму, в то время как ведомая система в отсутствие связи находилась в режиме низкоамплитудных колебаний (устойчивая точка вблизи бифуркации Андронова–Хопфа для систем типа (5.1) и колебательный режим малой амплитуды для (5.2)) и потому подстраивалась под режим ведущей системы.

При сценарии без существенного увеличения синхронизации динамика ведущего генератора в режиме 2 не отличалась от динамики в режимах 1 и 3. Ведомая подсистема демонстрировала колебания высокой амплитуды на второй стадии, аналогичные синхронному сценарию.

Для однонаправленно связанных осцилляторов с жёстким возбуждением (5.1) в рамках синхронного сценария линейная модель показывает рост $PI(t)$ в обоих направлениях: как верном, так и ложном, то есть фактически выявляется двунаправленное увеличение воздействия вместо однонаправленного — см. серые линии на рис. 5.7 (b). При этом суррогатный тест определяет это воздействие как значимое только в 10%–20% случаев — можно считать, что определить связанность затруднительно, см. серые линии на рис. 5.7 (c). Но тест, основанный на случайном задании фаз Фурье-образа, определяет связь как значимую в более чем 80% случаев, что может рассматриваться как доказательство наличия связей, см. серые линии на рис. 5.7 (d). В действительности, оба утверждения, сделанные на базе суррогатов различного типа, некорректны: метод

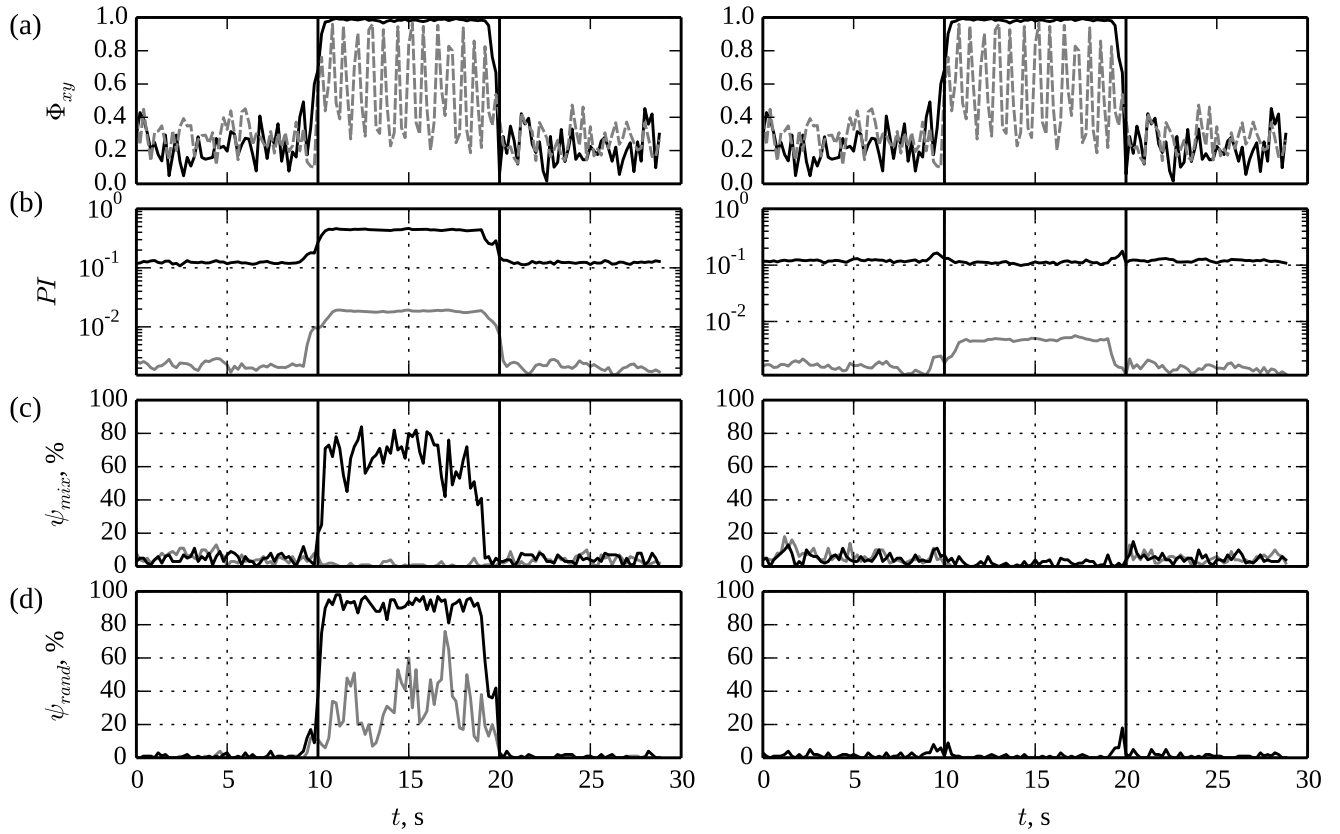


Рис. 5.8. Результаты определения связанности для однонаправленно связанных осцилляторов типа (5.2) со значимым возрастанием фазовой синхронизации в режиме 2: (а) $\Phi_{x,y}(t)$ (чёрная линия) его 95% уровень значимости (серая линия); (б) зависимость $PI(t)$. Доля (процент) значимых выводов о связанности на уровне значимости 0.05, рассчитанный с помощью различных типов суррогатных данных: (с) методом перестановки реализаций, (д) случайным заданием фаз Фурье-образа. Чёрные линии соответствуют адаптивной нелинейной модели (5.7), а серые линии — стандартной линейной модели (5.6). Левые графики на всех четырёх панелях (а–д) обозначают результаты при оценки связанности в верном направлении, а правые — в ложном.

перестановки реализаций демонстрирует недостаточную чувствительность, в то время как метод случайного задания фаз — недостаточную специфичность. Суррогаты, основанные на случайном задании компонент Фурье-образа оказались слишком чувствительны к высокой степени синхронности колебаний, что в действительности, неудивительно: случайное задание фаз полностью разрушает синхронизацию и делает суррогаты некорректными для решения задачи проверки связанности. Вместо тестирования гипотезы о связи они тестируют гипотезу о фазовой синхронности вне зависимости от того, какой механизм привёл к синхронному поведению.

Адаптированная модель (5.7) способна установить факт возрастания PI на второй стадии, причём связь определяется как значимая в верном направлении с помощью обоих суррогатных тестов (более 80% значимых результатов). В обратном направлении обнаруживается незначимое падение $PI(t)$, см. чёрные линии на рис. 5.7 (b–d). Использование сильно нелинейной и низкоразмерной модели с $P = 6$ и $D_s = 2$, более подходящей для описания режима 2, чем режима 1 (см. рис. 5.6(a, b)), может быть причиной падения PI , так как собственная модель оказалась слишком хорошо приспособлена для описания динамики во второй стадии.

Для пар однонаправленно связанных осцилляторов Рёсслера в синхронном режиме (см. рис. 5.8) линейная модель показала увеличение PI в верном направлении. Суррогаты со случайным заданием фаз показали связь в ложном направлении как незначимую, а связь в верном — как значимую в 40% случаев. Адаптированная модель показала увеличение связанности только в верном направлении, причём это увеличение оказалось значимым на основе обоих тестов.

5.5.2. «Несинхронный» сценарий

Для пар однонаправленно связанных осцилляторов с жёстким возбуждением в «несинхронном» режиме (см. рис. 5.9) линейная модель показала увеличение связанности только в верном направлении, но это увеличение было значимо

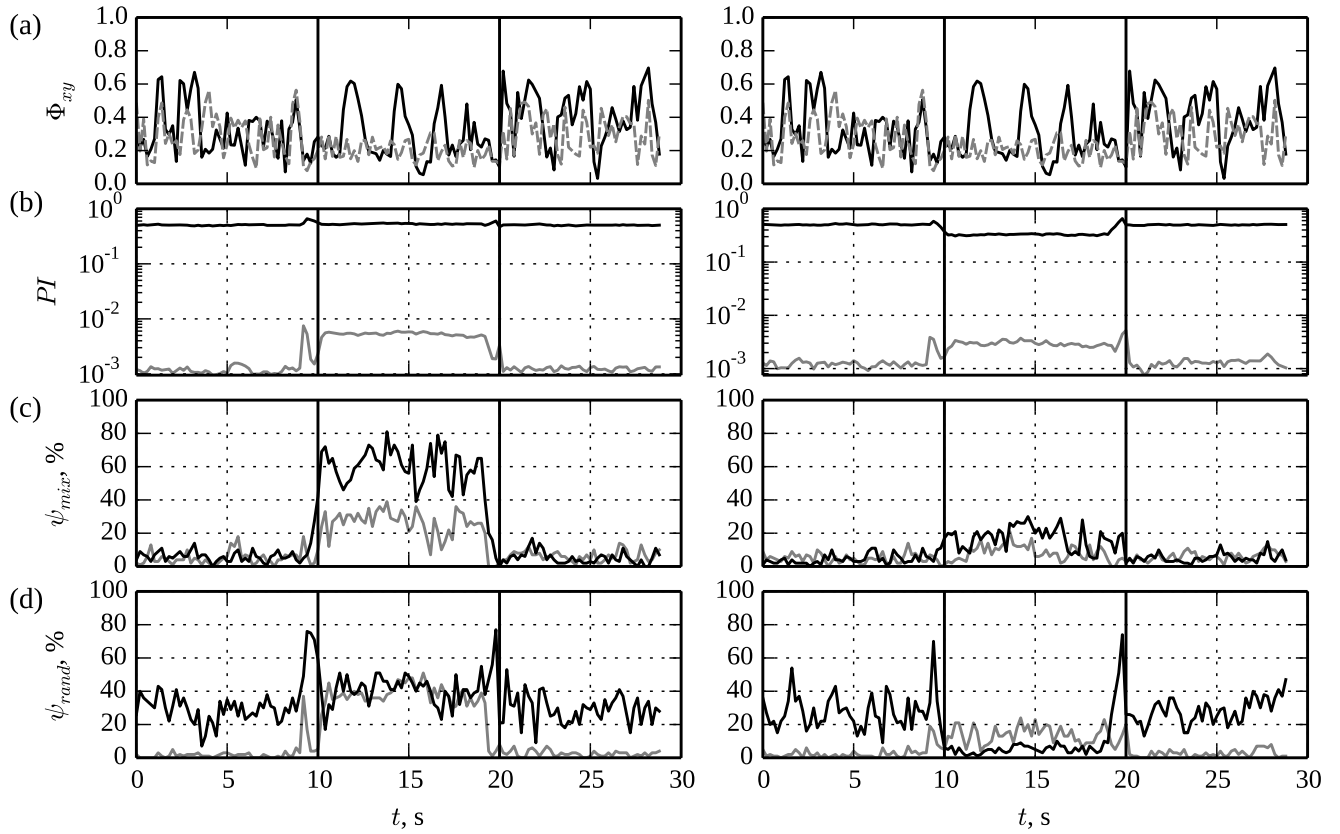


Рис. 5.9. Результаты определения связанности для однонаправленно связанных осцилляторов типа (5.1) в отсутствие значимого возрастания фазовой синхронизации в режиме 2: (а) $\Phi_{x,y}(t)$ (чёрная линия) его 95% уровень значимости (серая линия); (б) зависимость $PI(t)$. Доля (процент) значимых выводов о связанности на уровне значимости 0.05, рассчитанный с помощью различных типов суррогатных данных: (с) методом перестановки реализаций, (д) случайным заданием фаз Фурье-образа. Чёрные линии соответствуют адаптивной нелинейной модели (5.7), а серые линии — стандартной линейной модели (5.6). Левые графики на всех четырёх панелях (а–д) обозначают результаты при оценке связанности в верном направлении, а правые — в ложном.

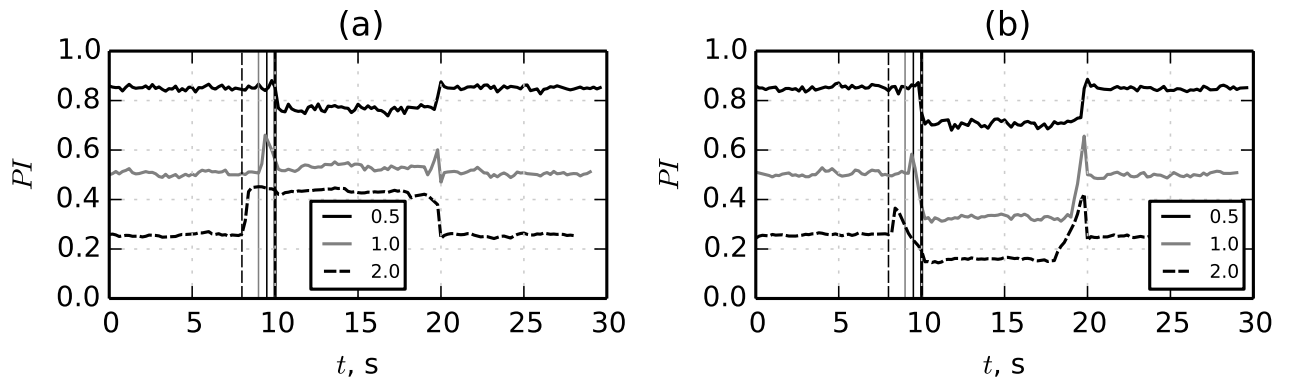


Рис. 5.10. $PI(t)$ для различных длин скользящего временного окна: сплошная чёрная линия соответствует окну длиной 0.5 с (4 колебания), сплошная серая — окну длиной 1 с (8 колебаний) и прерывистая чёрная — 2 с (16 колебаний). Вертикальные линии показывают момент изменения оператора эволюции из-за усиления связи и длины скользящего окна. Результаты получены для однонаправленно связанных генераторов с жёстким возбуждением и потенциалом Тоды (а) при определении связи в верную сторону, (б) — в ложную.

менее чем в 40% случаев. Адаптированная модель продемонстрировала значимое увеличение PI в заведомо верном направлении в 60% с использованием суррогатов с перестановкою реализаций или в 40% с использованием суррогатов со случайным заданием фаз гармоник Фурье-образа. Также адаптированная модель продемонстрировала падение PI для стадии 2, что может объясняться изменением формы колебаний. Амплитуда колебаний на второй стадии увеличилась в два–три раза, но уровень шума остался прежним и, следовательно, отношение сигнал/шум возросло, это привело к падению обеих ошибок аппроксимации: ε_s^2 и ε_j^2 . Однако более регулярный сигнал проще предсказать, используя только собственную модель, поэтому ε_s^2 упало сильнее, чем ε_j^2 , что можно видеть на рис. 5.10. По этой же причине PI и упал в ложном направлении во время стадии 2, в то время как в верном направлении этот небольшой эффект был с запасом компенсирован ростом PI вследствие действительного увеличения связи.

Обобщая данные результаты с результатами, полученными в «синхрон-

ном» режиме (см. рис. 5.7), можно заключить, что простые линейные модели могут более рассматриваться как мера синхронности, а не средство определения направленной связанности, поскольку с их помощью однонаправленная связь определяется как двунаправленная в случае высокой степени синхронности и как отсутствующая в «несинхронном» режиме. Адаптированная модель в большинстве случаев работает лучше, определяя связь в верном направлении и не давая ложно положительных выводов в обратном.

Для пар однонаправленно связанных осцилляторов Рёсслера в «несинхронном» режиме во время стадии 2 (рис. 5.11) линейная модель показывает падение связанности в направлении, в котором в действительности произошло её увеличение, т. е. результаты, прямо противоположные ожидаемым. Правда, это падение оказывается незначимо. Всё это подтверждает, что линейная модель хороша, чтобы определять синхронность поведения, а вовсе не связанность. Адаптированная нелинейная модель продемонстрировала хорошую специфичность при недостаточной чувствительности: в ложном направлении увеличение связанности не произошло, но и увеличение, показанное в верном направлении оказалось значимо только в 25% случаев. Более низкая эффективность адаптированного метода в данном случае может быть объяснена более низким отношением шум/сигнал на второй стадии, чем для связанных уравнений генератора с жёстким возбуждением. Это подтверждается тем, что чувствительность адаптированного подхода может быть увеличена путём увеличения длины временного окна, что явно указывает на роль шума в её снижении. Также повысить чувствительность можно, увеличивая D_a , но это очень опасно, поскольку не только ведёт к существенному росту числа коэффициентов модели, но и провоцирует ложно положительные результаты, так что вопрос об оптимальной величине добавочной размерности D_a остаётся открытым.

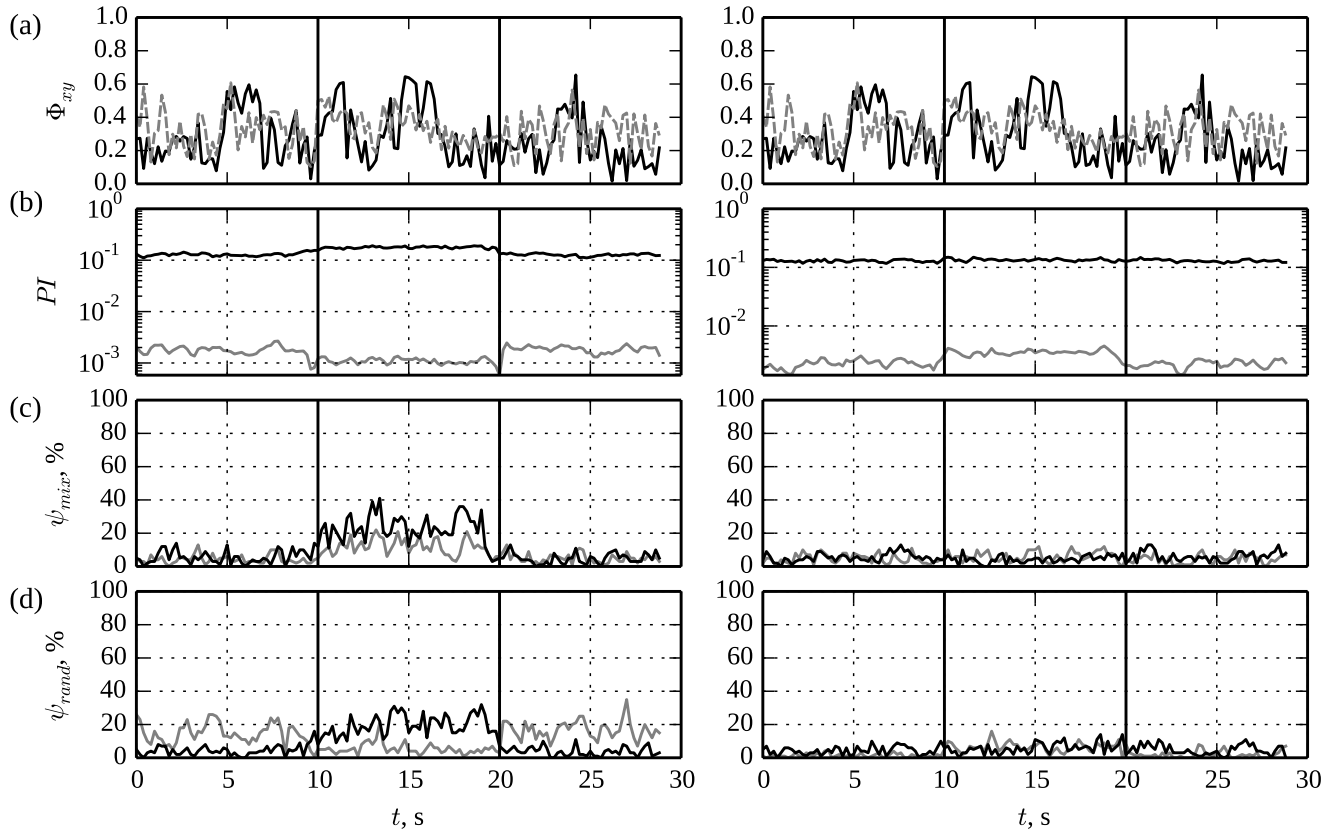


Рис. 5.11. Результаты определения связанности для однонаправленно связанных осцилляторов типа (5.2) в отсутствие значимого возрастания фазовой синхронизации в режиме 2: (а) $\Phi_{x,y}(t)$ (чёрная линия) его 95% уровень значимости (серая линия); (б) зависимость $PI(t)$. Доля (процент) значимых выводов о связанности на уровне значимости 0.05, рассчитанный с помощью различных типов суррогатных данных: (с) методом перестановки реализаций, (д) случайным заданием фаз Фурье-образа. Чёрные линии соответствуют адаптивной нелинейной модели (5.7), а серые линии — стандартной линейной модели (5.6). Левые графики на всех четырёх панелях (а–д) обозначают результаты при оценке связанности в верном направлении, а правые — в ложном.

5.5.3. Эффект ложного увеличения связанности на границе режимов

В большинстве рассмотренных случаев в начале и конце второй стадии на зависимости $PI(t)$ появляется резкий пик. Этот эффект вызван конечностью длины временного окна, в котором построена модель, что можно видеть из рис. 5.10. На этом рисунке зависимости $PI(t)$ построены для различных длин окна: для длины 0.5 с — чёрною сплошною линией, для длины окна 1 с — серою сплошною линией и для длины окна 2 с — чёрною прерывистою. Рис. 5.10 показывает, что чем шире скользящее временное окно, тем шире и пик, сопровождающий начало и конец второй фазы.

Наличие данного пика может быть объяснено тем, что невозможно построить хорошую предсказательную модель для быстрого переходного процесса вследствие нестационарности данных. Трудности описания нестационарных и переходных процессов автономными моделями ранее уже были неоднократно упомянуты [22; 78; 179]. Предсказательная сила собственной модели падает с увеличением доли второго режима до тех пор, пока оба режима не занимают примерно половину длины окна, в то время как предсказательная сила совместной модели уменьшается не столь существенно и роль совместных слагаемых растёт. Поэтому PI подпрыгивает вверх как при увеличении, так и при уменьшении коэффициента связи, см. рис. 5.12.

5.6. Однонаправленно связанные разнотипные осцилляторы

В данном разделе изучалась цепочка из 4 последовательно связанных эталонных осцилляторов: первый и третий описывались уравнениями (5.1), второй и четвёртый — уравнениями (5.2). Для такой цепочки $\Phi_{x,y}(t)$ не показывает значимого увеличения фазовой синхронности во время второй стадии. Анализ

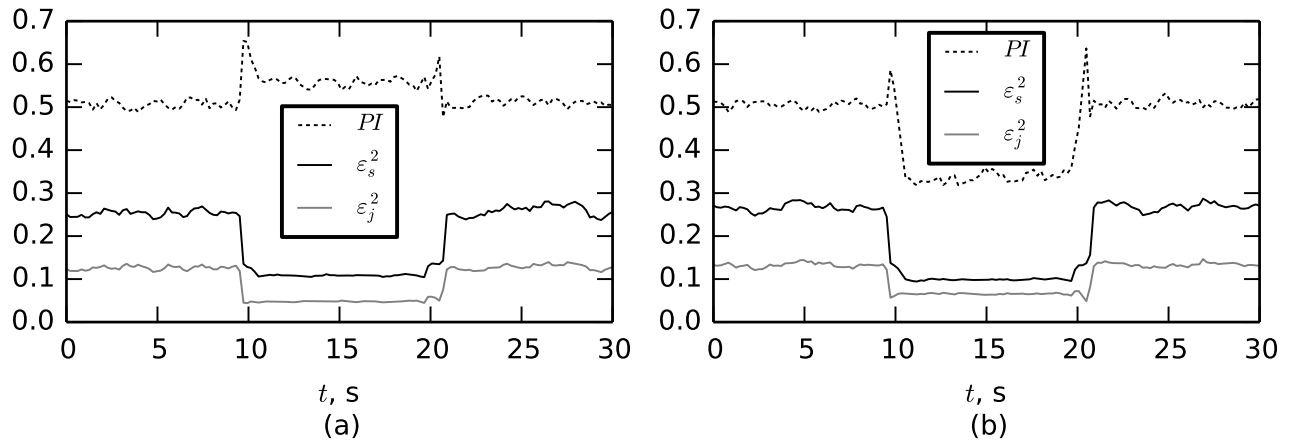


Рис. 5.12. Зависимость PI и ошибок прогноза ε_s^2 и ε_j^2 от времени для уравнений однонаправленно связанных генераторов с жёстким возбуждением: (а) — в верном направлении, (б) — в ложном направлении.

проводился попарно. Рассматривались все три возможные пары соседних по цепочке подсистем: первая со второю, вторая с третьей и третья с четвёртою.

Результаты применения линейного метода с моделями вида (5.6) показали, что обнаружить значимое увеличение связанности в обоих направлениях оказывается невозможно, как это имело место и для однотипных систем в «несинхронном сценарии». Адаптированный подход был способен значимо (на основе обоих типов суррогатов) определить увеличение связанности в верном направлении в 80% случаев, когда генератор с жёстким возбуждением воздействовал на систему Рёсслера. В случае, когда осциллятор Рёсслера воздействовал на генератор с жёстким возбуждением, различные суррогаты дали разное число значимых выводов о связанности: 70% суррогаты со случайным заданием фаз и 40% суррогаты с перестановкою реализаций.

Эти результаты показывают, что даже если подсистемы описываются сильно различными уравнениями, изменение связанности, тем не менее, может быть диагностировано адаптированным методом, в то время как линейная модель способна только измерить степень фазовой синхронности колебаний.

Также интересно, что на стадии 2 опосредованное воздействие первого ос-

циллятора на третий и четвёртый не было обнаружено — результаты были незначимы с точки зрения обоих типов суррогатов. Видимо, вклад опосредованной связи является слишком малым для рассматриваемых систем аналогично тому, что связь с коэффициентом $k = 0.01$ была неотличима от нулевой. Несомненно, что основными причинами этого является влияние динамического шума и недостаточная длина используемого для построения моделей временного окна.

5.7. Двухнаправленно связанные и несвязанные осцилляторы

5.7.1. Двухнаправленно связанные одностипные осцилляторы

Для пар двухнаправленно связанных генераторов с жёстким возбуждением и пар двухнаправленно связанных систем Рёсслера $PI(t)$ вырос на стадии 2. Для генераторов с жёстким возбуждением оба типа моделей показали примерно одинаковые результаты, при том что линейная модель несколько менее чувствительна (чувствительность в районе 50% на основании суррогатов обоих типов) по сравнению с нелинейной адаптивной (более чем в 80% случаев). Для осцилляторов Рёсслера результаты оказались примерно такими же, но суррогаты со случайным заданием фаз Фурье-гармоник оказались несколько более чувствительны, см. рис. 5.13 и рис. 5.14, левая часть.

В среднем, для двухнаправленно связанных систем линейные модели оказались более эффективны, чем для однонаправленно связанных. Это объясняется тем, что для двухнаправленно связанных систем невозможны ложно положительные выводы о связях, которых для однонаправленно связанных линейный подход давал очень много, а степень синхронности очень велика.

Следует отметить, что в данном случае системы Рёсслера демонстрировали задержку величиной ~ 1 с между изменением оператора эволюции и из-

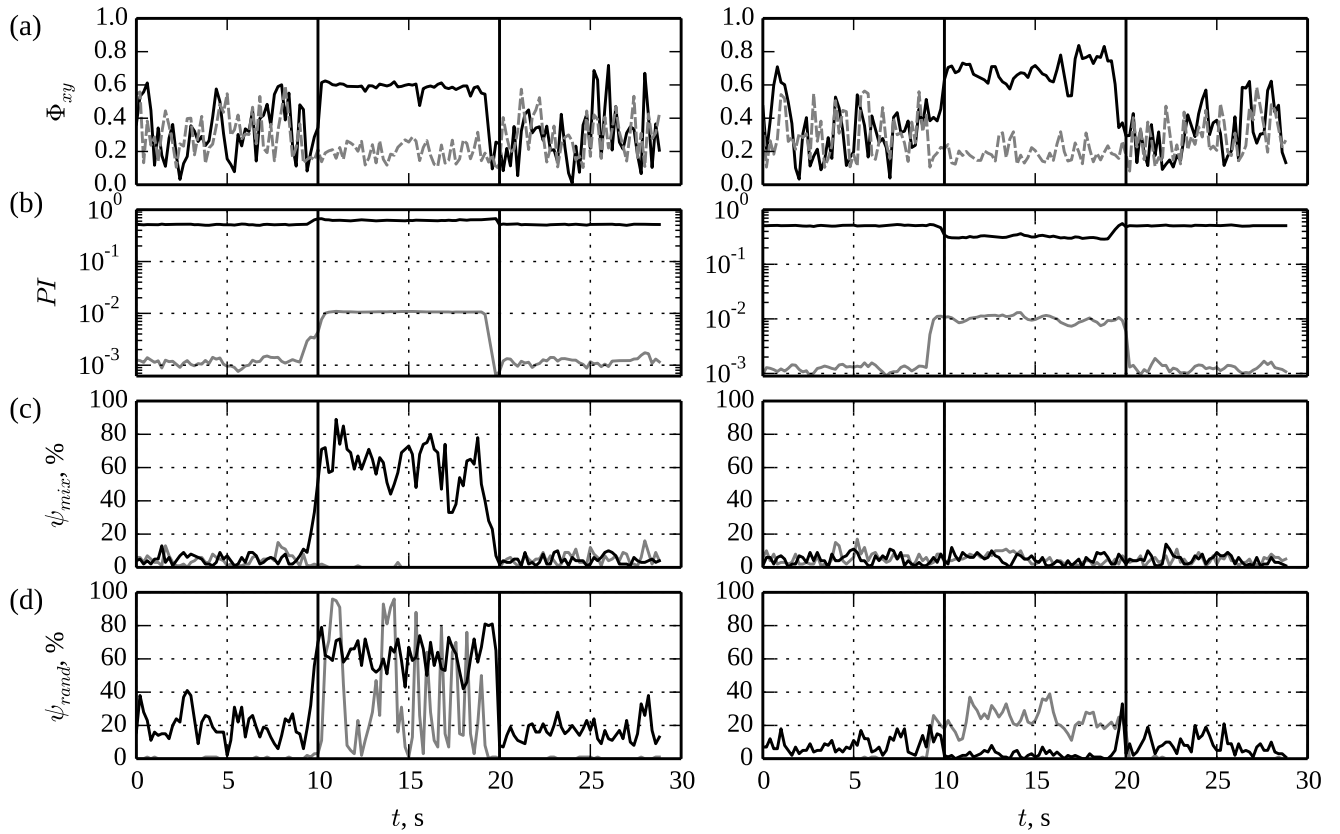


Рис. 5.13. Результаты определения связанности для двунаправленно связанных (слева) и несвязанных (справа) осцилляторов типа (5.1): (a) $\Phi_{x,y}(t)$ (чёрная линия) его 95% уровень значимости (серая линия); (b) зависимость $PI(t)$. Доля (процент) значимых выводов о связанности на уровне значимости 0.05, рассчитанный с помощью различных типов суррогатных данных: (c) методом перестановки реализаций, (d) случайным заданием фаз Фурье-образа. Чёрные линии соответствуют адаптивной нелинейной модели (5.7), а серые линии — стандартной линейной модели (5.6). Левые графики на всех четырёх панелях (a–d) обозначают результаты при оценки связанности в верном направлении, а правые — в ложном.

менением амплитуды и формы колебаний, см. рис. 5.1(а). Однако оба метода с использованием моделей обоих типов верно выявили момент изменения оператора эволюции. Аналогичные результаты были получены и в некоторых других случаях для связанных систем Рёсслера, когда момент смены оператора эволюции и момент изменения режима не совпадают. Данные результаты весьма обнадеживают, поскольку показывают, что причинность по Грейнджеру представляет собою перспективный метод для детектирования именно изменений оператора эволюции, то есть для определения причины изменений, а не просто для автоматической констатации смены режима.

5.7.2. Разнотипные двунаправленно связанные системы

Рассматривались пары двунаправленно связанных осцилляторов, в которых один представлял собою генератор с жёстким возбуждением, а второй — систему Рёсслера. В таких системах фазовая синхронность значимо не возрастала на второй стадии, если судить по оценкам $\Phi_{x,y}(t)$. Связанность исследовалась в обоих направлениях.

Связь в направлении на генератор с жёстким возбуждением оказалось сложно обнаружить с использованием как линейного, так и адаптированного нелинейного метода: оба типа суррогатов давали не более 20% значимых результатов. При этом сам PI увеличивался, это увеличение оказалось более заметным при использовании линейной модели. Этот случай — единственный, когда стандартная линейная модель давала результаты несколько лучше адаптированной нелинейной. Связанность в обратном направлении (на осциллятор Рёсслера) хорошо определялась обоими методами: результаты адаптированного метода были чуть лучше (50% значимых результатов), чем линейного (40% значимых результатов).

Проблемы, вставшие перед адаптивным методом, могут иметь различные причины. Во-первых, в рассмотренном режиме генератор с жёстким возбуждением оказался в режиме колебаний, близком к линейному, так что нелинейность

модели не имела большого значения. Также отношение сигнал/шум оказалось самым малым из всех рассмотренных случаев и доминирование шума привело к потере длинных корреляций, что делает введение второго лага l_T и всю идею использования неравномерного вложения почти бессмысленной. Также, возможно, неэффективным оказалось использование адаптированных моделей одного и того же типа для обеих подсистем, потому что в таком случае модели оказываются не до конца адаптированы. Наконец, линейные модели имеют меньше коэффициентов, что существенно в случае сильного шума при малой длине скользящего окна. Таким образом, сочетание всех этих факторов оказалось критичным для работоспособности адаптивного нелинейного метода, хотя каждый из них в отдельности не может нанести значительного ущерба его эффективности.

5.7.3. Несвязанные осцилляторы

Рассматривались пары несвязанных генераторов с жёстким возбуждением и потенциалом Тоды (5.1) и систем Рёсслера (5.2). Во всех случаях для перехода из режима 1 в режим 2 на второй стадии изменялись собственные параметры обеих подсистем. Из-за способа введения связи полученные таким образом колебания были очень похожи на колебания двунаправленно и однонаправленно связанных систем на второй стадии.

Малая длина временного окна привела к тому, что диагностировать значимое увеличение синхронности с помощью коэффициента фазовой синхронизации не удалось для систем как типа (5.1), так (5.2). Однако линейные модели показали увеличение связи во время второй стадии для обоих типов подсистем, которое оказалось в основном незначимо с точки зрения суррогатных рядов, полученных перестановкой реализаций, но значимо в 20–30% случаев с точки зрения суррогатных рядов, полученных случайным заданием фаз Фурье-гармоник, см. рис. 5.13 и 5.14 справа. Эта находка ещё раз подтвердила, что линейный метод причинности по Грейнджеру очень чувствителен к синхронности

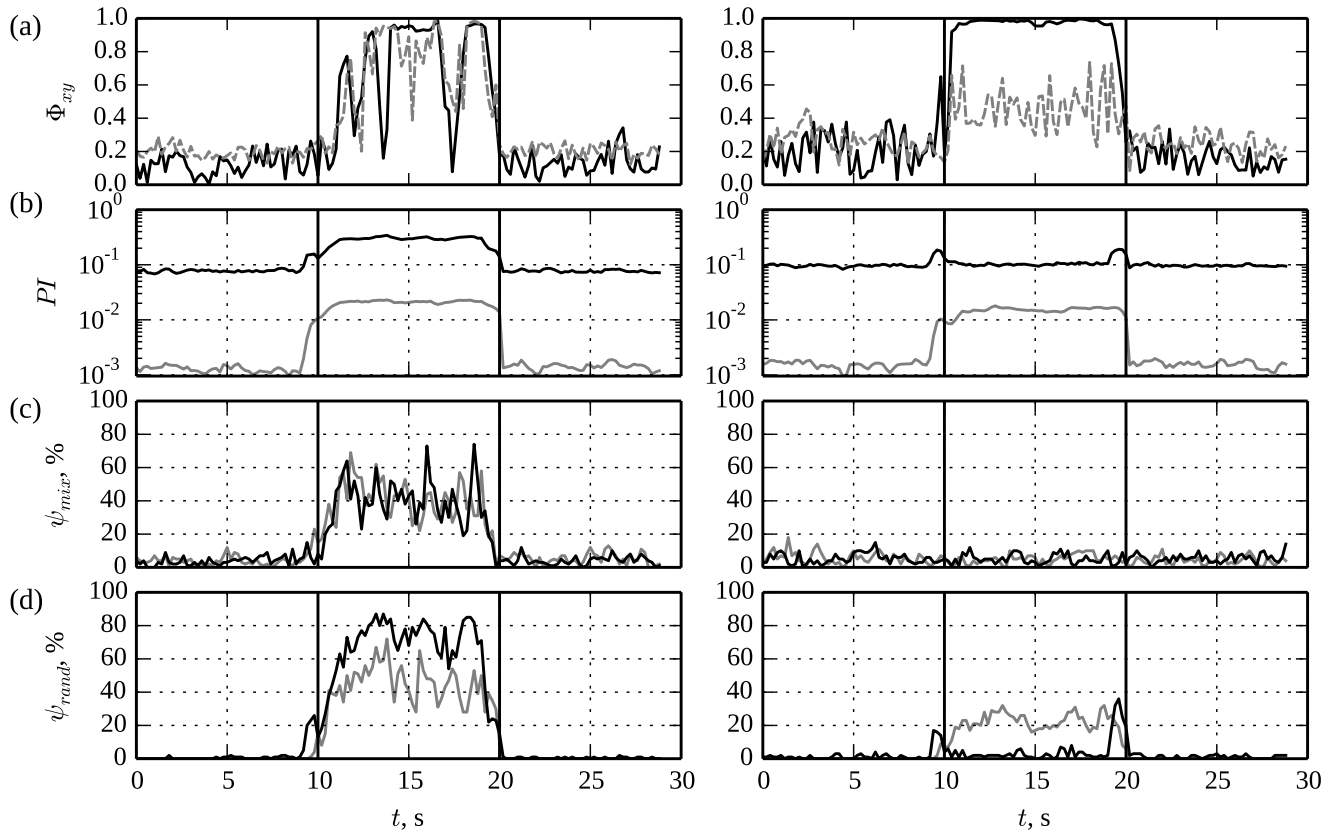


Рис. 5.14. Результаты определения связанности для двунаправленно связанных (слева) и несвязанных (справа) осцилляторов типа (5.2): (a) $\Phi_{x,y}(t)$ (чёрная линия) его 95% уровень значимости (серая линия); (b) зависимость $PI(t)$. Доля (процент) значимых выводов о связанности на уровне значимости 0.05, рассчитанный с помощью различных типов суррогатных данных: (c) методом перестановки реализаций, (d) случайным заданием фаз Фурье-образа. Чёрные линии соответствуют адаптивной нелинейной модели (5.7), а серые линии — стандартной линейной модели (5.6). Левые графики на всех четырёх панелях (a–d) обозначают результаты при оценке связанности в верном направлении, а правые — в ложном..

колебаний и оказывается даже более эффективным в определении совпадения ритмов, пусть и случайного, чем коэффициент фазовой синхронизации. Нелинейный адаптированный метод показал, что значимых связей нет для обоих типов подсистем с точки зрения обоих типов суррогатных данных.

Для несвязанных разнотипных осцилляторов оба метода показали отсутствие связи во время второй стадии независимо от того, какой способ тестирования на значимость использовался. Таким образом, как стандартная линейная, так и адаптированная нелинейная модели сработали весьма эффективно.

5.8. Выводы

Во-первых, стандартная линейная причинность по Грейнджеру более пригодна для измерения синхронности колебаний, чем для определения связанности для рассматриваемого типа подсистем и при длинах временного окна порядка 4–16 периодов. Для связанных систем с большой синхронностью линейный метод обнаруживает связь в неверном направлении (плохая специфичность) и не способен детектировать реально существующую связь в несинхронных режимах. При этом похожие результаты получаются вне зависимости от причины синхронного поведения: будь то однонаправленная связь, двунаправленная или просто случайное совпадение ритмов из-за близких собственных частот колебаний.

Во-вторых, адаптированный нелинейный метод причинности по Грейнджеру работает существенно лучше линейного практически во всех случаях и в большинстве рассмотренных ситуаций он вполне пригоден для практического использования. Однако и он оказывается недостаточно специфичен в некоторых случаях (однонаправленно связанные генераторы с жёстким возбуждением в несинхронном режиме), давая до 20% ложно положительных выводов о связанности, и демонстрируя при этом плохую чувствительность 20%–40% в синхронном режиме для другого типа подсистем — осцилляторов Рёсслера. Недоста-

точная специфичность может быть объяснена принципиальными проблемами, присущими методу [14]. Однако поскольку большое число ложно положительных выводов имело место в основном в случаях, когда рассматривались системы вида (5.1), индивидуальные особенности сигналов также могут иметь большое значение. Колебания генераторов с жёстким возбуждением сильно нелинейные, и потому в моделях используется большой порядок полинома $P = 6$, что вместе с малою длиной ряда легко может вести к плохо определённым матрицам в методе причинности по Грейнджеру.

Хотя чувствительность и специфичность адаптированного подхода не всегда идеальны, он может использоваться для обнаружения причины смены режима. Среднее значение PI и число значимых выводов о связанности, полученное на основе суррогатов с перестановкою реализаций, растёт при переходе от режима 1 к режиму 2 в случае, если этот переход вызван действительным увеличением связанности. Аналогично среднее значение PI и число значимых выводов о связанности падают при переходе от стадии 2 к стадии 3, если этот переход вызван действительным падением связанности.

Обобщая результаты, полученные для подсистем различных типов, разных структур связей, синхронных и несинхронных осцилляторов, можно дать следующие ответы на вопросы, сформулированные во *Введении* к главе в отношении адаптированного нелинейного метода:

1. Метод как правило способен определить направленность связи даже в достаточно коротком временном окне в 1024 точки, что составляет примерно 8 характерных периодов. Однонаправленная, двунаправленная и отсутствующая связи различимы в большинстве случаев, хотя специфичность и особенно чувствительность метода часто ниже желаемых.
2. Чувствительность метода часто недостаточна при анализе сигналов сильно нелинейных систем.
3. Суррогатные временные ряды, построенные с помощью перестановки ре-

ализаций, оказались существенно надёжнее, чем суррогатные временные ряды, построенные с помощью случайного задания фаз гармоник Фурье-образа, хотя для адаптированного нелинейного метода разница в способе тестирования не столь принципиальна, как для линейного.

4. Адаптированный нелинейный метод может быть применён в случае достаточно высокой синхронности колебаний подсистем даже во временном окне, в частности при индексе фазовой синхронизации $\Phi_{x,y} \approx 0.9$. При этом можно выявить, является ли синхронность результатом взаимодействия (двунаправленного или однонаправленного) либо случайного совпадения ритмов колебаний.
5. Очевидно, что временное разрешение метода обуславливается длиной скользящего окна. Для рассмотренных систем и режимов поведения длины окна в 512, 1024 и 2048 отсчётов (примерно от 4 до 16 колебаний) оказались вполне достаточны. По сравнению с другими известными подходами, например, методом фазовой динамики [62], такое временное разрешение оказывается весьма высоким. Более того, адаптированный подход показал, что он способен определить реальный момент изменения оператора эволюции, а не реагировать на изменение амплитуды и формы сигнала.
6. Численные эксперименты с несвязанными осцилляторами, для которых переход между режимами поведения обеспечивался за счёт изменения собственных параметров подсистем, показали, что метод способен выявить причину изменения режима.

Полученные результаты следует, конечно, считать пока предварительными. Они могут зависеть от большого числа факторов, включая размерность моделей, тип и порядок/количество выбранных нелинейных аппроксимирующих функций, специфики наблюдаемых сигналов. Тем не менее, они с очевидностью показывают применимость адаптированного нелинейного метода причинности

по Грейнджеру для определения момента и причины изменения режимов поведения в сложных системах, состоящих из отдельных подсистем, по их экспериментальным временным рядам. Очевидно также, что модели, используемые в методе, должны быть адаптированы к данным самым тщательным образом.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [166; 184].

Адаптация методов оценки связанности к специфике сигналов локальных потенциалов мозга при различных патологиях

6.1. Введение

Приложение различных мер и критериев нелинейной динамики и математической статистики к электроэнцефалограммам пациентов, страдающих различными патологиями, имеет долгую историю [13; 160; 185; 186]. В данной работе основные результаты получены для абсансной эпилепсии, но ряд результатов также относится к детскому церебральному параличу и болезни Паркинсона.

Абсансная эпилепсия — это неконвульсивная генерализованная форма эпилепсии неясной (предположительно, генетической) этиологии. Клинически абсансные приступы проявляются в виде резкого и кратковременного нарушения сознания при прерывании текущей деятельности, снижении отзывчивости, нарушении психического функционирования. Электроэнцефалографически абсансные приступы проявляются пароксизмальной электрической активностью, состоящей из генерализованных 3–4 Гц пик-волновых разрядов (ПВР) [187].

Изучение механизмов ПВР часто проводят на животных-моделях, основными из которых являются генетические модели абсансной эпилепсии — крысы линий GAERS (Genetic Absence Epilepsy Rats from Strasbourg) и WAG/Rij (Wistar Albino Glaxo from Rijswijk). Эти две линии крыс были многократно проверены как надежные генетические животные-модели животных абсансной эпилепсии человека, и потому они широко используются в фундаментальных исследованиях механизмов, участвующих в патогенезе этого заболевания [188—191] .

На крысах линии WAG/Rij, а позднее и на крысах линии GAERS была обнаружена специфическая область в сомато-сенсорной коре, ответственная за инициацию ПБР [192; 193]. Считается, что кора ответственна за инициацию и генерализацию разрядов в таламо-кортикальной сети [194—196]. Переход от преиктальной (доразрядовой) к иктальной (разрядовой) динамике характеризуется значительными изменениями взаимодействия структур таламо-кортикальной сети. Ранее на крысах WAG/Rij связанность уже исследовалась с помощью когерентности [194], и стандартной линейной причинности по Грейнджеру [197]. Результаты этих исследований показали то же, что и исследования на людях [187]: начало ПБР является весьма резким и внезапным явлением. Однако ряд других работ указывали на то, что патологическая активность начинается непосредственно перед разрядом за несколько секунд до него, причём как у людей [198; 199], так и у животных-моделей [192; 196; 200; 201], что согласуется с результатами работы [193], где была обнаружена преиктальная активность отдельных нейронов в глубоких структурах мозга. Предсказание эпилептических разрядов, основываясь на сигналах локальных потенциалов мозга или поверхностной ЭЭГ — это сложная и запутанная проблема, решать которую пытались множество научных групп, поскольку она имеет очень большую клиническую значимость, но без должного успеха [202].

В сравнении с традиционными методами анализа связанности: взаимную корреляционную функцией, когерентностью, фазовой синхронизацией причинность по Грейнджеру может выявлять достаточно слабую связь, не приводящую к синхронизации, а также определять направление связей. Поскольку адаптация метода к данным является критически важным для успеха шагом, для применения к сигналам локальных потенциалов мозга при абсансной эпилепсии в рамках отдельной работы [88] была сначала разработана специализированная структура эмпирической модели (см. раздел 6.3), а затем при её использовании были использованы все основные рекомендации, ранее сформулированные в главах 3–5.

В данной главе на основе переменной во времени нелинейной причинности по Грейнджеру разрабатывается новый подход к оценке связанности по сигналам локальных потенциалов внутричерепных электродов, имплантированных в различные области мозга (коры и таламуса). Этот подход применяется для изучения механизмов связанности, приводящих к запуску ПВР у крыс линии WAG/Rij.

6.2. Животные—модели и экспериментальные данные

Эксперименты проводились на пяти самцах крыс линии WAG/Rij 11–12 месяцев отроду. Все записи были сделаны в отделе биологической психологии Радбод университета Неймегена (Нидерланды) в соответствии с директивами Европейского сообщества (86/609/ЕЕС). Эксперименты были одобрены этической комиссией по экспериментам на животных Радбоуд университета Неймегена. Было сделано всё, чтобы минимизировать стресс и страдание животных.

Крысы были оперированы под полную анестезией изофлураном, были внедрены два стандартных трёхполярных набора электродов (Plastics One MS-333/2-A, Plastic Products, Роанок, США). Были использованы нержавеющей изолированные проводные электроды диаметром 0,2 мм с неизолированными концами. Два эпидуральных электрода были расположены в лобной (AP 2; L 2.5) и затылочной (AP -7; L 6) областях коры больших полушарий вблизи черепа. Два глубинных электрода были имплантированы в вентропостериальное медиальное ядро таламуса (VPM, AP -3.5; L 2.5; H 7.2) и ростральную часть ретикулярного ядра таламуса (RTN, AP -1.5; L 2.2; H 7.2). Все координаты даны относительно брегмы согласно атласу Паксиноса и Уотсона [203]. Все электроды были введены в правую полусферу унилатерально. Электрод заземления и референтный электрод были помещены в мозжечок симметрично друг относительно друга. Электроды внедрялись на постоянной основе и были прикреплены к черепу цементом. Всего от всех 5 животных было получено и

исследовано 84 разряда.

После хирургического вмешательства животным давали как минимум 10 дней на восстановление. В течение этого времени за ними следили, ухаживали и регулярно взвешивали. По окончании измерений крыс усыпляли передозировкой пентобарбитала натрия (200 мг/кг веса) и их мозг исследовался на предмет точности установки электродов в соответствии с атласом [203].

Записи проводились на свободно движущихся животных в клетке Фарадея. Каждая запись длилась от пяти до семи часов в темное время суток. Сигналы локальных потенциалов мозга подавались в многоканальный дифференциальный усилитель, фильтровались полосовым фильтром с частотами пропускания от 1 до 200 Гц, оцифровывались с частотой 1024 отсчёта/с на канал (программное обеспечение CODAS) и сохранялись на жесткий диск.

ПВР (см. рис. 6.1(a)) размечались по сигналу лобной коры используя критерии, предложенные в [204]. Дополнительно к ручной разметке использовался специально разработанный подход [205], основанный на построении предсказательных моделей с аппроксимацией нелинейности радиальными базисными функциями (см. раздел 6.4). Результаты разметки можно видеть на рис. 6.1(b,c).

6.3. Реконструкция эмпирической нелинейной модели электроэнцефалограммы во время абсансного разряда

Первоначально для реконструкции системы связей в мозге при инициации абсансных приступов было решено использовать нелинейные модели вида (3.1) и (3.2), хорошо исследованные в рамках главы 3 в скользящем временном окне, как это было сделано в главе 5. Поскольку проведённые в главах 3–5 исследования показали, что для достижения лучших чувствительности и спе-

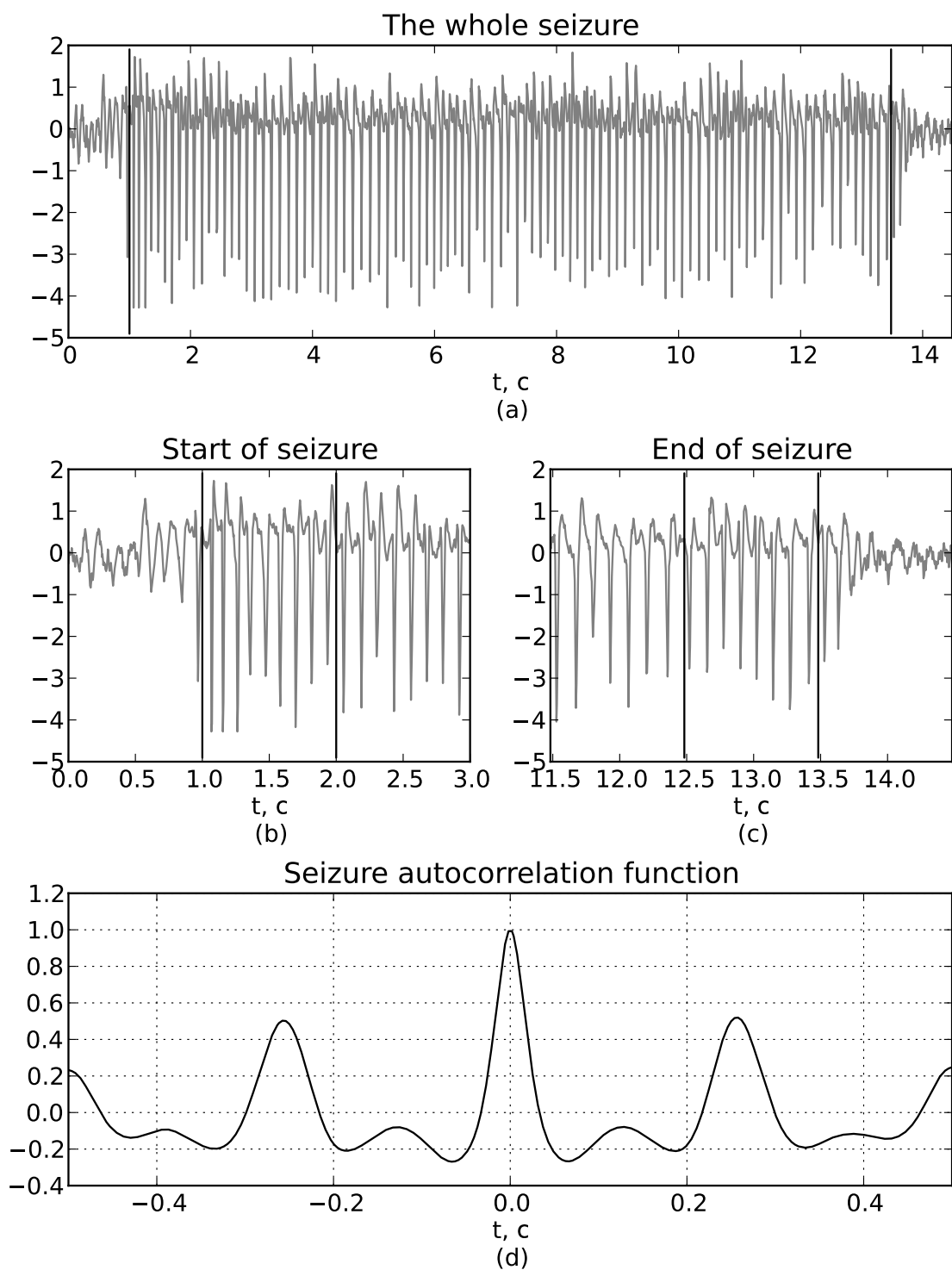


Рис. 6.1. Временные ряды электроэнцефалограммы крысы: (а) — весь пик-волновой разряд (маркерами обозначены его начало и конец), (b) — более крупно начало разряда, (с) — более крупно конец разряда (маркерами обозначены анализируемые фрагменты длиной в 1 с) и (d) — автокорреляционная функция разряда.

цифичности метод должен быть адаптирован к экспериментальным данным, основной временной масштаб был определён по автокорреляционной функции (см. рис. 6.1(d)), первый максимум которой лежит в районе $T = 0.125$ с, что соответствует основной частоте разряда порядка 8 Гц.

Модель (3.1) характеризуется быстрым ростом числа коэффициентов Z при увеличении порядка полинома P и размерности D_s по закону $Z = \frac{(D_s+P)!}{D_s!P!}$. Поэтому в первую очередь решалась задача оптимального подбора D_s и P , а также величины лага l . Величина дальности прогноза τ выбиралась из условия $\tau \approx T/4$, где T — характерный период колебаний, определяемый по первому наибольшему максимуму на графике автокорреляционной функции (см. рис. 6.1(d)).

Для определения оптимального числа коэффициентов можно использовать критерий насыщения ошибки аппроксимации ε_s^2 , как это предложено в [80; 206], но в рассматриваемой здесь ситуации этот критерий оказался неэффективен, поскольку определить, где ε_s^2 выходит на плато, по рис. 6.2 однозначно очень сложно (аналогичные результаты можно получить для подавляющего большинства обработанных временных рядов). Поэтому для определения оптимальных параметров было решено воспользоваться критерием Шварца [31] — минимумом функции (6.1):

$$S = N \ln(\varepsilon_s^2) + Z \ln(N). \quad (6.1)$$

При использовании неадаптированной модели вида (3.1) функция (6.1) либо вообще не имеет четкого минимума, либо для некоторых записей он достигается при очень большом числе параметров Z , как показано на рис. 6.2. Подробный анализ подобранных значений D_s и l показывает, что для всех отведений наилучшая модель при одинаковом числе коэффициентов Z — та, для которой размерность больше, а порядок полинома меньше. Также сочетание размерности D_s и лага l оказывается таким, чтобы среди точек, по которым делаем прогноз, оказалась точка, лежащая через характерный период от предсказыва-

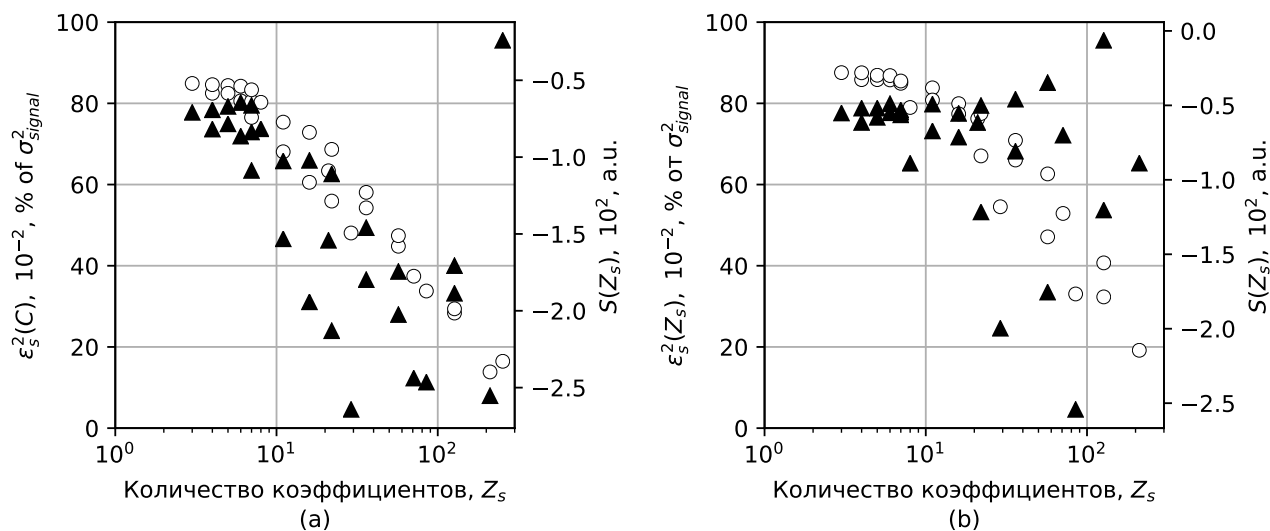


Рис. 6.2. Зависимость среднеквадратичной ошибки прогноза ε_s^2 в процентах от дисперсии сигнала (кружки) и величины критерия Шварца S (треугольники) в относительных единицах от количества коэффициентов Z для стандартной модели с аппроксимирующими функциями в виде полинома общего вида и равномерным вложением. Фрагменты (a) и (b) относятся к различным эпилептическим разрядам (№17 и №23).

емой: $T \approx D_s l + \tau$. Это наводит на мысль, что такие сложные модели получаются, чтобы захватить одну эту точку. Так возникла гипотеза, что для лучшей аппроксимации необходимо использовать модель, составленную из двух компонент: нелинейной, созданной по точкам, лежащим рядом с предсказываемой, и линейной, составленной по точкам, отстоящим от предсказываемой на характерный период.

Учёт точки, лежащей на расстоянии порядка характерного периода, при сохранении небольшой размерности системы возможен, если воспользоваться идеей неравномерного вложения [28] и в дополнение к точкам, выбранным с лагом l , ввести в вектор состояния одну точку на расстоянии l_T . Поскольку зависимость от значения, удалённого ровно на один характерный период, должна быть близка к линейной, в данной работе рассмотрение было ограничено только линейным слагаемым в последнем случае. Таким образом в модель (6.2) доба-

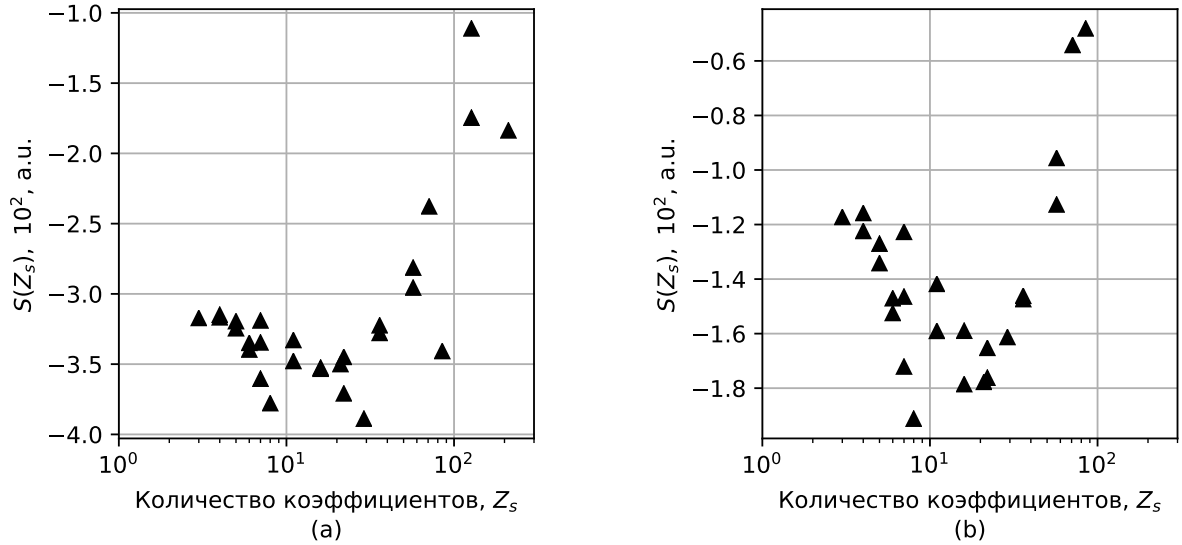


Рис. 6.3. Зависимость величины критерия Шварца (6.1) в относительных единицах от количества коэффициентов Z для модифицированной модели с неравномерным вложением. Фрагменты (a) и (b) относятся к различным эпилептическим разрядам — тем же, что и на рис. 6.2 (№17 и №23).

вится всего один дополнительный коэффициент c_{Z_s+1} :

$$x'_{n+\tau} = \sum_{k=0}^P \sum_{q=1}^{C_{D_s+k}^k} c_i^s \prod_{m=1}^{D_s} x_{n-(m-1)l}^{w_{k,m}^s} + c_{Z_s+1} x_{n-l_T}, \quad (6.2)$$

При использовании такой модели удалось добиться существенного уменьшения числа коэффициентов, а на зависимости $S(Z)$ появился чёткий минимум, чего не было для стандартной модели, см. рис. 6.3. По критерию Шварца значение действительно соответствовало условию $T = D_s l + \tau + l_T$, что подтверждает выдвинутую гипотезу. Важно, что данный результат был достигнут для всех использованных реализаций, несмотря на то, что величина S была различна для разных временных рядов.

В результате была показана возможность реконструкции по экспериментальному временному ряду адекватной и при этом компактной математической модели, описывающей динамику электроэнцефалограммы во время эпилептического припадка. Модель хорошо отражает специфику сигнала: описывает все основные временные масштабы, для чего мы использовали неравномерное вло-

жение, что согласуется с выводами ряда работ о необходимости учёта специфики сигнала при построении эмпирической модели и пользы неравномерного вложения [28; 161; 207], учитывая нелинейные свойства сигнала, причём только для тех отведений, для которых они должны быть существенны из физиологических соображений.

При построении модели для выбора большинства параметров: размерности вложения D_s , порядка полинома P и лагов l и l_T используется автоматизированный метод на основе объективного численного критерия, что повышает применимость данного подхода на практике.

6.4. Метод автоматической разметки пик-волновых разрядов с помощью предсказательных моделей

Вне зависимости от того, какое повреждение мозга является причиной заболевания, электрофизиологические свойства многих видов эпилепсии сходны. Во время приступа у человека лобные доли коры больших полушарий (сомато-сенсорная область) показывают значительный рост активности на фоне фазовой синхронизации больших групп нейронов [208—210], причём данная активность затем захватывает, синхронизуя, также и более глубокие структуры мозга. Синхронная по фазе активность больших ансамблей нейронов вообще считается одним из основных механизмов формирования ритмов мозга, в том числе и при нормальной работе мозга во время циклов запоминания, обработки информации и принятия решений [211]. Но слишком сильная синхронизация часто ведёт к существенным неврологическим заболеваниям, сопровождаемым внешними проявлениями в виде судорог и тремора, таким как эпилепсия или болезнь Паркинсона [212].

Известно, что абсансные эпилептические приступы могут быть детектированы по поверхностной электроэнцефалограмме, поскольку характеризуются специфическими пик-волновыми комплексами, имеющими частоту около

3 Гц у людей [187; 213]. Хорошо зарекомендовавшие себя генетические животные–модели, в частности крысы линии WAG/Rij, демонстрируют аналогичные пик-волновые комплексы не только в коре, но и в глубоких структурах мозга [214].

Для определения пик-волновых разрядов часто используют визуальный анализ ЭЭГ [215], хотя применение математически более сложного аппарата становится всё более популярно. Большинство существующих подходов к автоматической разметке основываются на статистических критериях, математических моделях или мерах из теории сложных сетей [216]. Статистические подходы предполагают, что изменения нормальной активности мозга суть стационарный процесс, к которому время от времени добавляются нестационарные явления, в том числе эпилептические разряды. Такой подход не учитывает изменения в нормальной активности, связанные с циклами сна–бодрствования и часто может принимать артефакты за разряды. Частотно-временной анализ также является очень популярным средством разметки ЭЭГ, в последнее время в основном с использованием вейвлетов [217; 218]. В качестве примера использования сетевых подходов можно привести работу [219], в которой пик-волновые разряды детектируются с помощью специальным образом натренированной нейронной сети.

6.4.1. Предсказательная модель

В рамках предлагаемого подхода к автоматической разметке мы рассматриваем наблюдаемые сигналы локальных потенциалов как временные ряды сложных колебаний нелинейной динамической системы. Если даже наличие динамического шума и предполагается, он не вносит никаких качественных изменений в динамику, а только сужает горизонт предсказания. Эмпирические прогностические модели строятся, следуя в основном [80].

$$x'_{n+\tau} = f(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D-1)l}), \quad (6.3)$$

где f — аппроксимирующая функция, x_n — текущее измеренное значение, а x'_n — спрогнозированное значение (средний квадрат разницы между x_n и x'_n есть ошибка аппроксимации), D — размерность модели, l — временной лаг, используемый для формирования вектора состояния из скалярной реализации методом последовательных задержек [27], τ — дальность прогноза.

Основная идея заключается в том, что ошибка предсказания модели, построенной по фрагменту сигнала, рассматриваемому как абсансный разряд, будет существенно меньше при аппроксимации не только данного, но и других разрядов, чем при аппроксимации нормальной активности. Однако первое непосредственное приложение этой идеи к экспериментальным данным показало недостаток такого подхода, поскольку в данных содержатся не только абсансные разряды и записи нормального поведения, которое существенно варьирует во время сна и бодрствования, но и артефакты, и иные нетипичные явления. Поэтому было решено использовать две модели: одну для абсансов, а вторую — для пассивного нормального бодрствования (фоновая активность). Пассивное бодрствование было выбрано, поскольку оно наиболее часто предшествует пик-волновым разрядам.

Неоднократно отмечалось, что построение оптимальной предсказательной модели невозможно без тщательного учёта специфики наблюдаемых данных [80]. Поскольку пик-волновые разряды представляют собою сильно нелинейное явление [220], для аппроксимации функции f было решено воспользоваться радиальными базисными функциями [221], которые очень хорошо зарекомендовали себя ранее в задачах нейрофизиологии [2; 60]

Аппроксимация радиальными базисными функциями, как правило, строится таким образом, что $f(\mathbf{x})$ представляется в виде линейной комбинации (6.4) базисных функций $\phi(\mathbf{x} - \mathbf{o}_k)$, полученных из родительской функции $\phi(\mathbf{x})$ путём смещения аргумента на вектор \mathbf{o}_k , называемый центром [60; 221]. При этом родительская функция $\phi(\mathbf{x})$ должна удовлетворять ряду условий, основными из которых являются радиальная симметрия относительно нуля, достаточно быст-

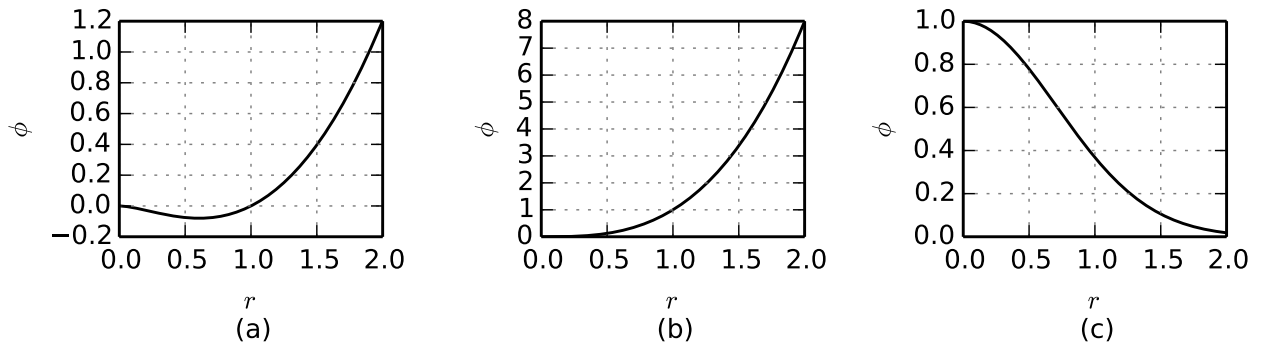


Рис. 6.4. Различные типы родительских радиальных базисных функций: (а) — «плоские», (b) — кубические, (с) — гауссовы.

рое спадание (возможно с осцилляциями) при удалении от нуля и единичная норма.

$$f(x) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi(\mathbf{x} - \mathbf{o}_k) \quad (6.4)$$

В силу свойства радиальной симметрии радиальные базисные функции можно представить как функции одного скалярного аргумента — нормы $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{o}_k\|$.

При разработке метода тестировались три типа родительских функций: «плоские», кубические и гауссовы, см. рис. 6.4:

$$\phi(r) = r^2 \log r, \quad (6.5)$$

$$\phi(r) = r^3, \quad (6.6)$$

$$\phi(r) = e^{-\alpha r^2}, \quad (6.7)$$

где α — положительный параметр.

6.4.2. Описание алгоритма

Успех эмпирического моделирования критически зависит от правильной параметризации. Параметры можно классифицировать, разделив на следующие группы:

1. *Параметры вложения*, то есть те, что используются для получения век-

тора состояния $\mathbf{x}_n = (x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D-1)l})$ по скалярному ряду $\{x_n\}_{n=1}^N$, в нашем случае — размерность D и лаг l .

2. *Параметры базисных функций*: тип базисных функций, их количество K и их индивидуальные свойства, в нашем случае — положение центров.
3. *Параметры, отвечающие за прогноз*. В нашем случае — это дальность прогноза τ и пороговый уровень ошибки аппроксимации ε_{th}^2 , соответствующий максимальному уровню ошибки, при котором активность рассматривается как «родная» — фоновая или эпилептиформная соответственно.

Размерность D варьировала от $D = 2$ до $D = 8$, поскольку при больших значениях D точность прогноза модели только ухудшалась. Надо признать, что глобальный минимум зависимости ошибки аппроксимации от размерности не может быть достигнут алгоритмически (задача сильно нелинейная), а его область сходимости сужается по мере увеличения размерности вектора состояния и числа локальных минимумов. Таким образом, вероятность попадания в глобальные минимумы средней ошибки аппроксимации чрезвычайно мала. Поэтому все построенные модели явно являются субоптимальными. Чтобы увеличить шансы на успех, были использованы все три типа радиальных базисных функций (6.5,6.6,6.7), ошибка аппроксимации рассчитывалась по формуле (6.8).

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N_{\text{eff}} - K} \sum_{i=1}^N (x'_i - x_i)^2 / \sigma_x^2, \quad (6.8)$$

где $N_{\text{eff}} = N - (D - 1)l - \tau$ есть эффективная длина временного ряда, а σ_x^2 — его эмпирическая дисперсия. Для улучшения временного разрешения мы ограничились случаем $\tau = 1$.

Выбор положения центров \mathbf{o}_k очень важен для аппроксимации радиальными функциями. В данной работе метод K -средних использовался для подбора их положения в соответствии с рекомендациями [222]. Поскольку результаты метода K -средних зависят от стартовых догадок для центров, в каждом случае

делалось 1000 попыток оптимизации со случайными стартовыми догадками, а затем выбирался результат, дававший минимальное значение ε^2 .

Количество базисных функций подбиралось с использованием критерия Шварца [31; 223]. Использовался модифицированный критерий Шварца (6.9) с увеличенным штрафным слагаемым для моделей большой размерности.

$$\tilde{S} = \frac{N_{\text{eff}}}{2} \ln \varepsilon^2 + \frac{K \cdot D}{2} \ln \frac{N_{\text{eff}}}{2}. \quad (6.9)$$

Также мы анализировали остатки модели $\xi_n = x_n - x'_n$. Модель принято считать адекватной, если остатки не содержат значимой информации о временном ряде. Обычно предъявляются два главных требования: (см. [80; 95]):

1. они должны быть нормально распределены, если только специально не предполагается иное;
2. они должны быть статистически независимы.

Для тестирования на нормальность использовался тест Колмогорова–Смирнова с эмпирической оценкой дисперсии. Поскольку проверить произвольную статистическую независимость не представляется возможным, проверялись только линейные зависимости, то есть коррелированность.

Оптимизированная и подогнанная описанным образом модель применялась к сигналам локальных потенциалов в скользящем временном окне. Ширина окна была выбрана эмпирически, чтобы быть достаточно короткой и таким образом включать только один тип сигнала на длине окна в большинстве случаев, и достаточно длинной, чтобы содержать достаточную информацию об особенностях типа сигнала. Чем меньше средняя погрешность аппроксимации ε^2 , тем больше часть сигнала локальных потенциалов, уместяющаяся в окне, напоминает моделируемый сигнал. Время сдвига окна должно быть в несколько раз меньше, чем ширина окна, чтобы изменения в типе сигнала можно было обнаружить более точно.

Два условия были наложены на ε^2 (обозначим за ε_s^2 ошибку модели, построенной по эпилептиформной активности, и за ε_n^2 — по нормальной) для детектирования разрядов были установлены: нижний порог ε_{ths}^2 для модели эпилептиформной активности и верхний ε_{thn}^2 — для модели нормальной активности. Обе модели предсказывали временной ряд на τ точек вперёд на большом временном интервале. За начало разряда полагался момент, когда выполнялись одновременно условия $\varepsilon_s^2 < \varepsilon_{ths}^2$ и $\varepsilon_n^2 > \varepsilon_{thn}^2$. Как только один из этих критериев переставал выполняться, разряд считался закончившимся. Модель фона критично важна для работоспособности метода, так как модель эпилептиформной активности часто реагирует на артефакты. В противоположность ей, модель фона способна различить артефакты и абсансы, но недостаточно чувствительна и пропускает часть случаев. Кратко алгоритм обработки описан на рис. 6.5.

6.4.3. Подбор параметров метода

Оптимальные значения K и D были найдены по отдельности для каждой рассмотренной крысы. Для этого для каждой крысы строились модели для 6 разрядов и 6 эпизодов нормальной активности при $K \in [2; 15]$ и $D \in [2; 8]$ с использованием всех трёх рассмотренных типов радиальных базисных функций. В результате были выбраны значения $K = 2$ и $D = 5$ с кубическими функциями (6.6) для моделирования абсансов и $D = 5$ и $K = 10$ и гауссовскими функциями (6.7) для моделирования фоновой активности.

Оптимальные параметры оценивались в несколько этапов. Во первых, для выбранных векторов состояния рассчитывалась ошибка аппроксимации ε^2 и далее определялось значение критерия Шварца (6.9). Обозначим число центров, при котором \tilde{S} достигал минимума как $K = K_{\tilde{S}}$. Однако при моделировании реальных данных оказывалось, что минимум \tilde{S} не соответствовал оптимальному числу центров K_{best} , поскольку шумы и несовершенство модели вели к довольно высоким типичным значениям ошибки аппроксимации $\varepsilon^2 \approx 0.12\sigma_x^2$. Затем

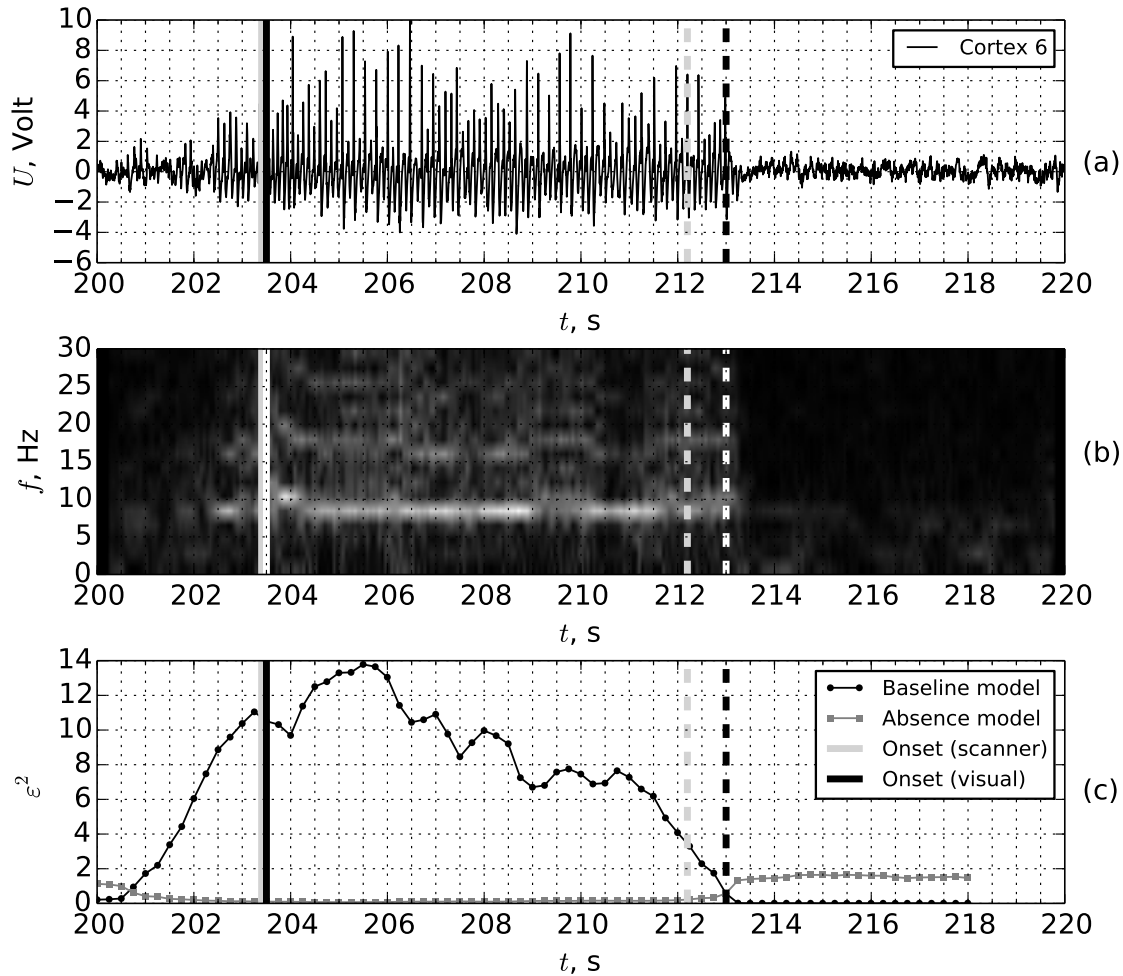


Рис. 6.5. Фрагмент записи локальных потенциалов соматосенсорной коры (6-ой слой) во время абсансных разрядов — (a), его спектрограмма, построенная в скользящем окне — (b), и разметка предлагаемым методом — (c). Автоматическая разметка показана серым, ручная — чёрным. Сплошные линии соответствуют началу разряда, штриховые — окончанию.

при наилучшей размерности $D = D_{best}$ строились модели при различном K и наоборот — при оптимальном $K = K_{best}$ с различной размерностью D . За наилучшую считалась та модель, которая даёт максимальное отношение ошибки прогноза альтернативного типа поведения к ошибке прогноза «родного», т. е. отношение $\varepsilon_s^2/\varepsilon_n^2$ для модели нормы и $\varepsilon_n^2/\varepsilon_s^2$ — для модели эпилептиформной активности.

Для всех 6 крыс были получены одни и те же оптимальные значения размерности и порядка полинома. Этот факт стал следствием того, что ошибка модели, определённая при её приложении к данным другого животного, оказа-

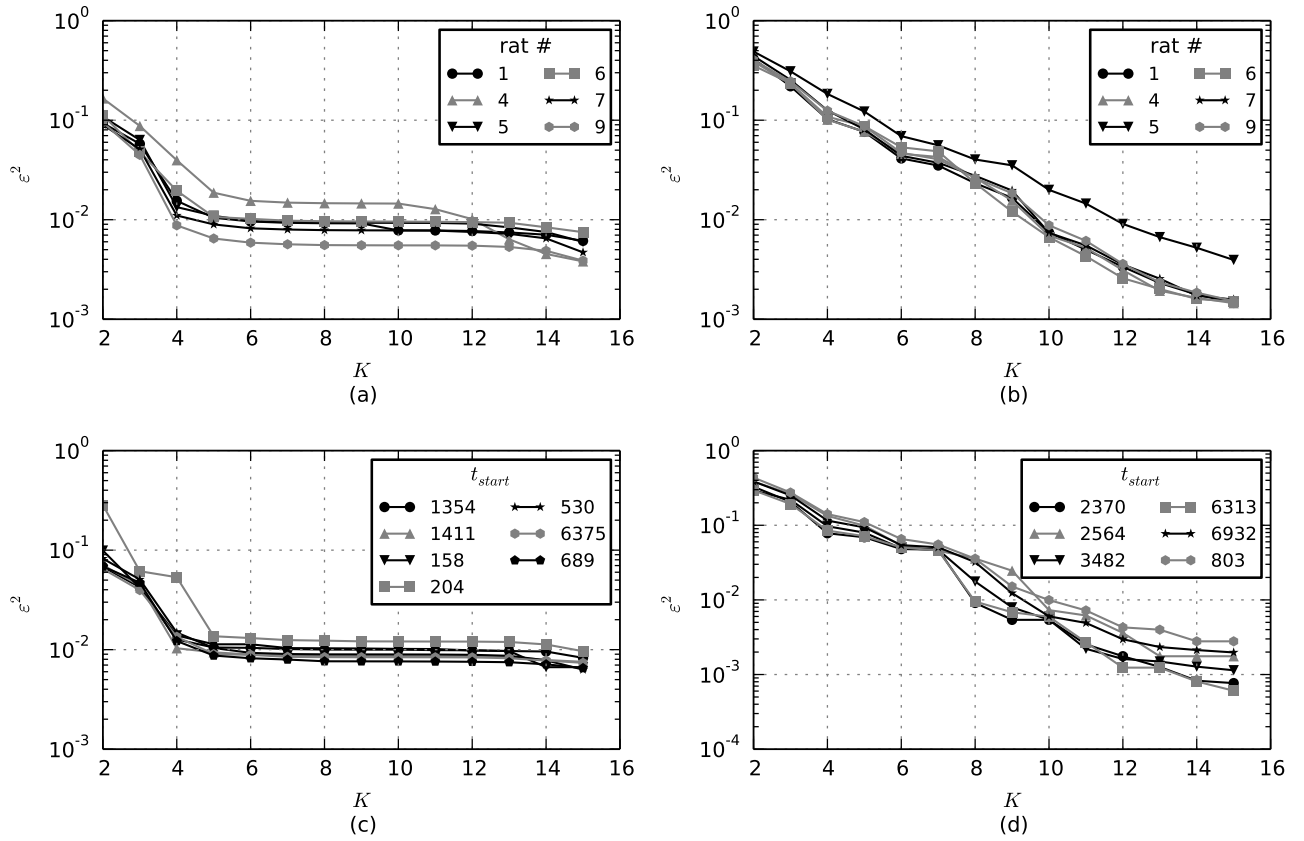


Рис. 6.6. Зависимость ошибки аппроксимации ε^2 от количества базисных функций при построении модели: (a) — усреднённая по всем крысам для предсказания эпилептиформной активности; (b) — усреднённая по всем крысам для предсказания нормально активности; (c) — ошибка для различных эпилептиформных эпизодов для крысы №6; (d) — ошибка для различных эпизодов нормальной активности для крысы №6. Во всех случаях использовалось окно длиной в 2 с при размерности модели $D = 2$ для эпилептиформной активности и $D = 5$ — для нормальной.

лась не намного больше, чем по «родным» данным. В результате можно констатировать, что этап выбора размерности модели и порядка полинома может быть пропущен в дальнейшем и всё, что нужно для настройки метода — это выбрать пороговые значения ε_{thn}^2 и ε_{ths}^2 .

6.4.4. Тестирование на экспериментальных данных

Для апробации метода он был применён к экспериментальным сигналам локальных потенциалов длительностью 12300 с каждый. Рассматривались три

канала: 5-ый и 6-ой слои соматосенсорной коры и постериальное ядро таламуса. При контроле работоспособности алгоритма визуальный анализ был дополнен спектрограммами. Обе модели: нормальной и эпилептиформной активности, подгонялись в скользящем окне длиной в 2 с и со сдвигом между окнами в 0.25 с. На рассмотренном промежутке визуальный анализ сигнала 6-го слоя соматосенсорной коры определил наличие 73 абсансных разрядов. 100% из них были детектированы предложенным алгоритмом. Иногда автоматизированный метод делил разряд на 2 или 3 последовательных разряда, разделённых малыми промежутками, в то время как визуальный анализ и анализ спектрограмм позволяли говорить о непрерывном разряде. Окончательная ясность в данном вопросе пока не может быть получена, так как гипотеза о том, что большинство длинных ПВР представляют собою серию перезапусков и состоят из расположенных вплотную во времени коротких разрядов длиной в 3–6 с не подтверждена, но и не опровергнута до сих пор.

В среднем, только 78% эпизодов, расцененных методом как разряды, были отмечены визуально как ПВР. Оказалось, что из оставшихся 22% 5 представляют собою похожие на абсансы эпизоды, воспроизводящие форму колебаний, характерную для преиктальной активности, сонных веретён или тета-ритма, а остальные 17% представляли собою различные артефакты. Среднее отклонение по времени при детектировании начала разряда было статистически неотличимо от нуля, в то время как средний модуль отклонения составлял около 0.4 с.

Далее модель, построенная по одной крысе, применялась для анализа активности других животных. Параметры модели сохранялись каждый раз на исходном уровне, только пороги ε_s^2 и ε_n^2 подстраивались заново, используя всего 1 тестовый фрагмент. Оказалось, что таким образом можно детектировать все 100% реально существующих разрядов, при этом потеря специфичности метода (рост числа ложных срабатываний) составляет только около 5%.

Хотя 6-ой слой коры демонстрирует наиболее выраженную эпилептиформную активность, анализ других отведений также может помочь, поскольку ос-

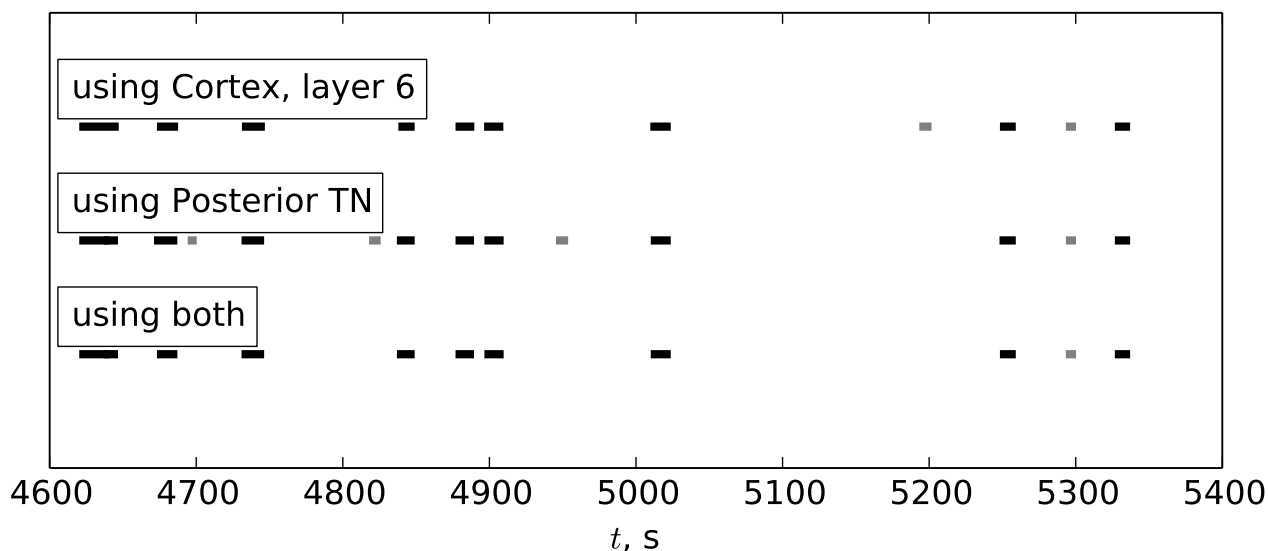


Рис. 6.7. Пример работы метода на длинном участке. Серым обозначены начала разрядов, выявленные верно, а чёрным — ложные срабатывания.

новное число ложных срабатываний имело место из-за артефактов, большинство из которых специфичны для определённых каналов, в то время как ПВР проявляются на различных каналах почти одновременно. Следующие результаты удалось получить, используя одновременно два канала: один из соматосенсорной коры, а другой — из постериального ядра таламуса. 100% абсансов были обнаружены, при этом специфичность подхода выросла с 78% при использовании только сигнала коры до 94.8%. Метод дал ложные срабатывания на 2 артефактах и 2 ПВР-подобных эпизодах, выявив все 73 абсанса. Рис. 6.7 иллюстрирует то, что анализируя 2 канала вместо 1 можно существенно повысить специфичность детектирования.

6.5. Анализ экспериментальных сигналов локальных потенциалов в скользящем временном окне

6.5.1. Методика

Ранее [197] к рассматриваемым экспериментальным сигналам локальных потенциалов уже применялся метод причинности по Грейнджеру с линейной моделью (5.6) со временным лагом $l = 1$ и дальностью прогноза $\tau = 1$. Только размерности D_s и D_a подбирались в соответствии с критерием насыщения ошибки аппроксимации [80]. Поскольку ранее было показано, что линейная модель может в значительной степени выступать как мера синхронности колебаний, а не мера связанности, было решено повторить расчёты как с использованием исходной линейной модели, так и с использованием нелинейной адаптированной модели вида (5.7), построенной с учётом неравномерного вложения с параметрами, подобранными в разделе 6.4.1, затем сопоставив результаты. Поскольку подгонка параметров, включая параметры временных масштабов τ , l и l_T , производилась нами ранее для ПВР, а не для фоновой активности, правомочен вопрос, насколько эта модель может использоваться в преиктальном периоде.

Несмотря на то, что наступление ПВР вызвало заметные изменения в сигнале локальных потенциалов, автокорреляционные функции, рассчитанные до и во время ПВР (см. рис. 6.8b), содержат аналогичные регулярные компоненты с характерным периодом T . Было очевидно, однако, что этот регулярный компонент был более выражен в во время ПВР по сравнению с периодом до начала ПВР. Поскольку длина основного временного масштаба перед и во время ПВР была почти одна и та же, значение T измеренное в течение ПВР было использовано для оценки значения l и τ в преиктальной фазе. Поэтому модель, разработанная в [224] (см. раздел 6.3) на наш взгляд может быть использована для анализа методом причинности по Грейнджеру в скользящем окне для определения процессов, сопутствующих переходу от нормальной к эпилеп-

тиформной активности. Следуя опыту главы 5, были рассмотрены две длины скользящего окна: 1 с и 0.5 с. В результате было решено остановиться на длине 0.5 с, поскольку она обеспечивает лучшее временное разрешение при несколько худшей статистической значимости результатов.

Результирующие зависимости $PI(t)$ усреднялись по всем разрядам для каждого животного отдельно, совмещая моменты начала разрядов. Пик-волновые разряды длиной до 5 с не использовались, для различных животных бралось разное число разрядов, но не менее 10: 34, 94, 10, 22, и 58 соответственно (всего рассматривалось 5 животных). Далее для каждой усреднённой зависимости $PI(t)$ рассчитывался базовый (относящийся к фоновой нормальной активности) уровень улучшения прогноза PI_{bg} . Он получался усреднением средней по разрядам зависимости $PI(t)$ по времени в течении первых 7 с рассматриваемого интервала (от 10-ой до 3-ей секунды до начала ПВР). Очень сходные результаты могут быть получены, если использовать и более короткий и удалённый временной отрезок в качестве базового уровня, например, от 10-ой до 7-ой секунды до начала ПВР. Использование более длинного интервала приводило к несколько большей стабильности по отдельным животным, обеспечивая немного больше значимых выводов об изменении связанности. Затем рассчитывались нормированные на базовый уровень зависимости улучшения прогноза от времени по формуле (6.10)

$$PI_0(t) = PI(t) - PI_{bg} \quad (6.10)$$

Значение $PI_0 = 0$ соответствует фоновому уровню, положительные значения PI_0 означают увеличение связанности по отношению к нему, а отрицательные — падение связанности.

Далее для полученных кривых $PI_0 = 0$ проводилось усреднение по животным и статистический анализ. Значения PI_0 , полученные для различных животных в данный момент времени рассматривались как выборка и затем, с помощью t-теста Стьюдента анализировалось значимое отличие среднего по

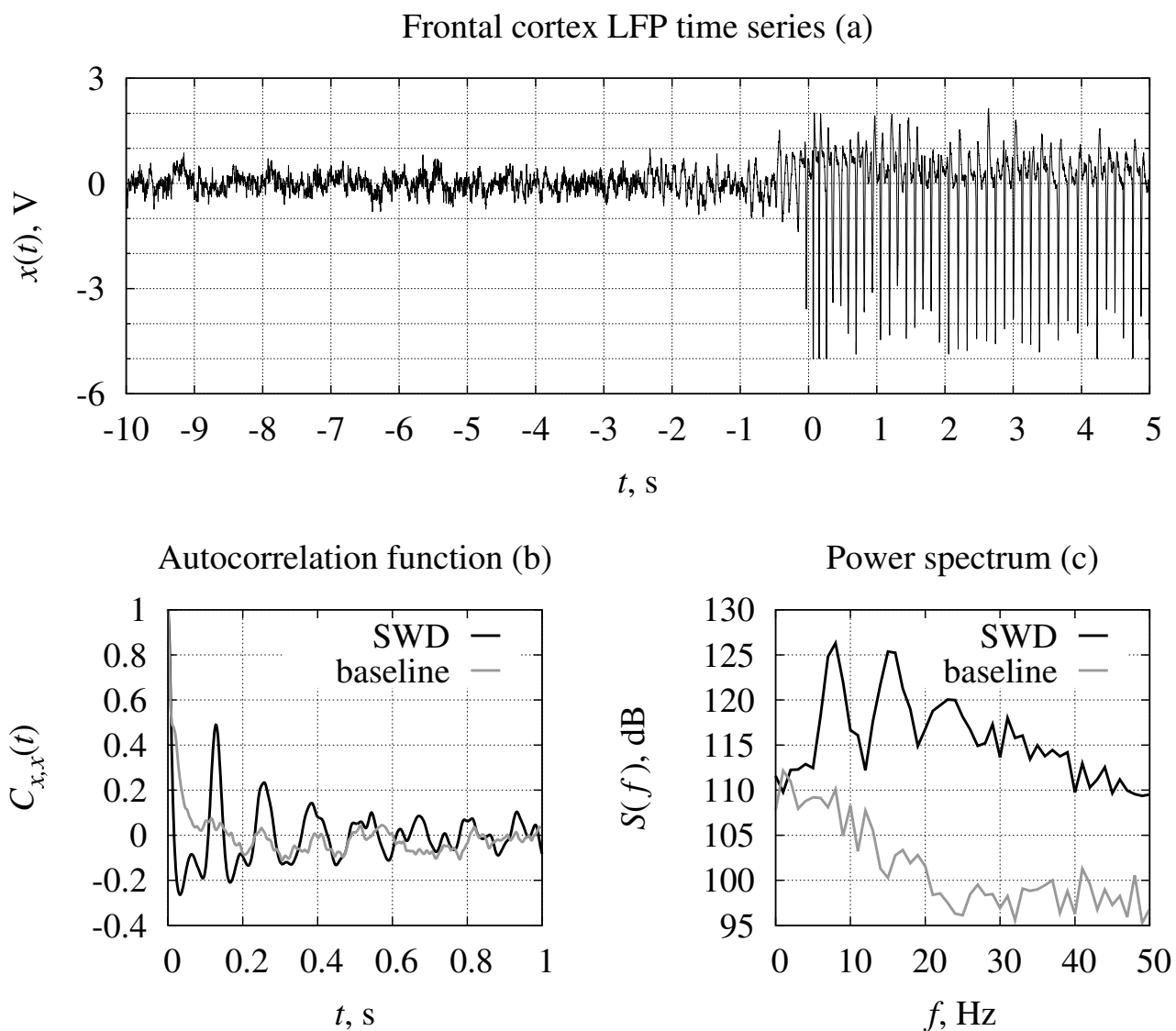


Рис. 6.8. Пример эпилептического пик-волнового разряда (ПВР) у крыс линии WAG/Rij: (a) сигнал локальных потенциалов, записанный из лобной коры в интервале от момента перед началом разряда (10 с) до конца пятой секунды ПВР; (b) автокорреляционная функция, рассчитанная для 10 с перед разрядом (фоновый уровень) и 5 с разряда; (c) спектры мощности, посчитанные по тем же интервалам, что и автокорреляционная функция, с использованием усреднения по фрагментам реализации [225].

этой выборке от нуля. Поскольку вследствие анализа в скользящем окне имело место множественное тестирование, дополнительно накладывалось условие, что несколько последовательных значений (в нашем случае достаточно трёх) должны быть значимы, чтобы признать результаты неслучайными, как это предлагалось ранее в [226].

6.5.2. Результаты

Рис. 6.9 показывает нормированную линейную и нелинейную причинность по Грейнджеру на протяжении всего рассматриваемого интервала от 10 с до начала разряда и заканчивая 5 ою секундою разряда (в реальности график заканчивается значением $t = 4.5$ с из-за конечной длины окна). Для линейной причинности по Грейнджеру PI_0 до начала разряда на протяжении всех рассмотренных 10 с не отличается значимо от нуля для всех рассмотренных пар каналов, как в фоне (первые 7 с), так и в преиктальной фазе (последние 3 с перед разрядом), см. рис. 6.9. Максимальных значений PI_0 достиг только при $t \geq 0.5$ с, то есть после того, как скользящее временное окно стало захватывать только эпилептиформную активность. При использовании нелинейного метода выявленные изменения в связанности оказались более сложными: в большинстве пар каналов PI_0 начинал возрастать за 1,5–3 с до начала ПВР, достигая максимума примерно за 0,5 с до начала и падал с началом разряда. То есть до того, как скользящее окно начинало перекрывать разряд, поэтому такой результат в целом следует считать надёжным и эффект ложного увеличения PI на быстрых переходных процессах (эффект «ушей»), обнаруженный в главе 5, вряд ли имел место. Таким образом, адаптированный метод оказался более чувствительным в преиктальной фазе и смог вскрыть значимые механизмы взаимодействия, приводящие к запуску разряда, которые можно считать его предвестниками или скрытыми проявлениями, аналогичными тому, как в главе 5 метод оказался способен на модельных системах определить реальный момент смены оператора эволюции, предшествовавший изменению статистических ха-

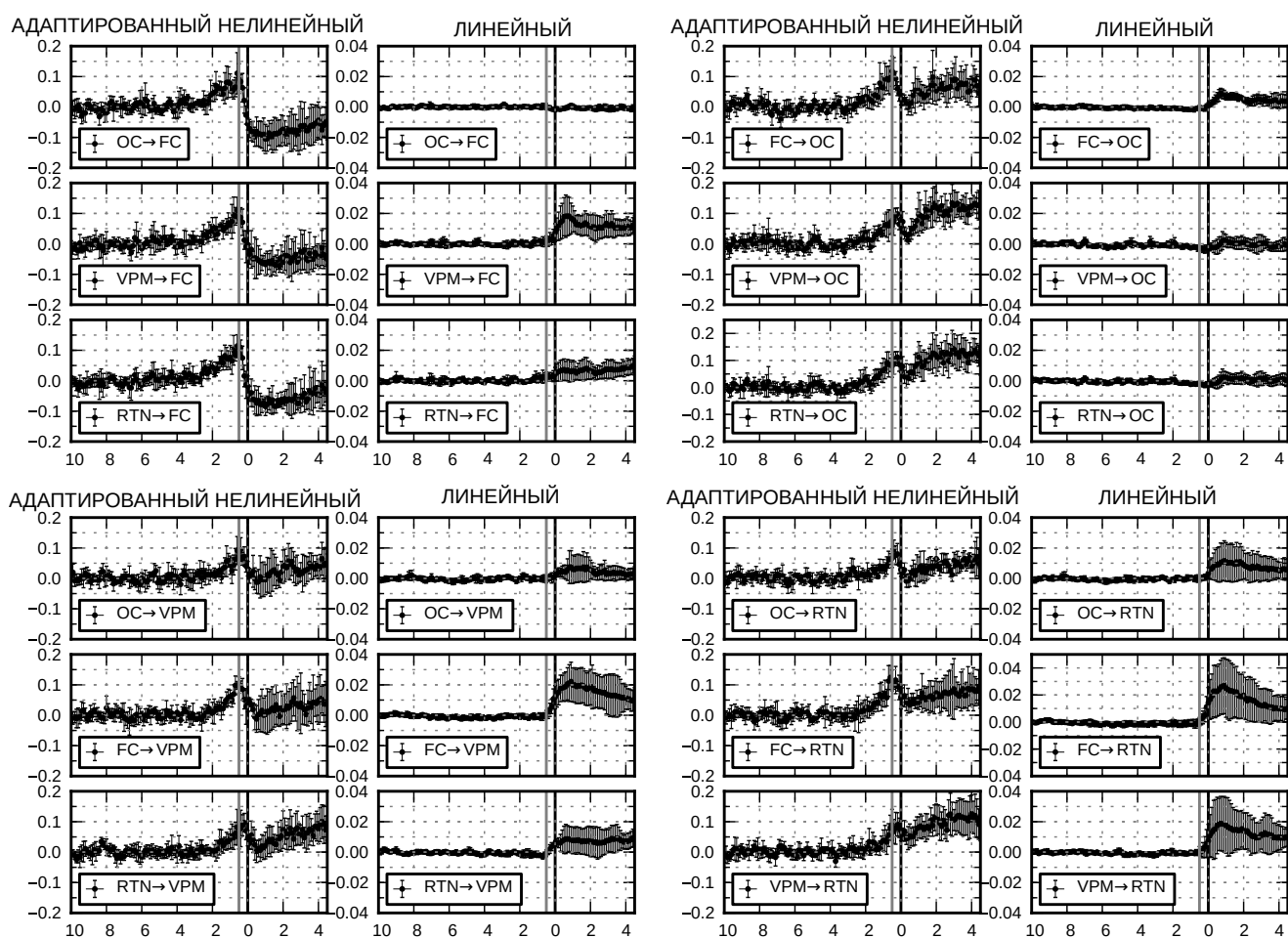


Рис. 6.9. Зависимость от времени нормированного улучшения прогноза PI_0 для при использовании линейных и нелинейных адаптированных моделей непосредственно перед началом и в начале ПВР. Графики сгруппированы по ведомой структуре. Чёрные вертикальные линии соответствуют началу разряда, серые обозначают длину скользящего временного окна, в котором проводился расчёт PI .

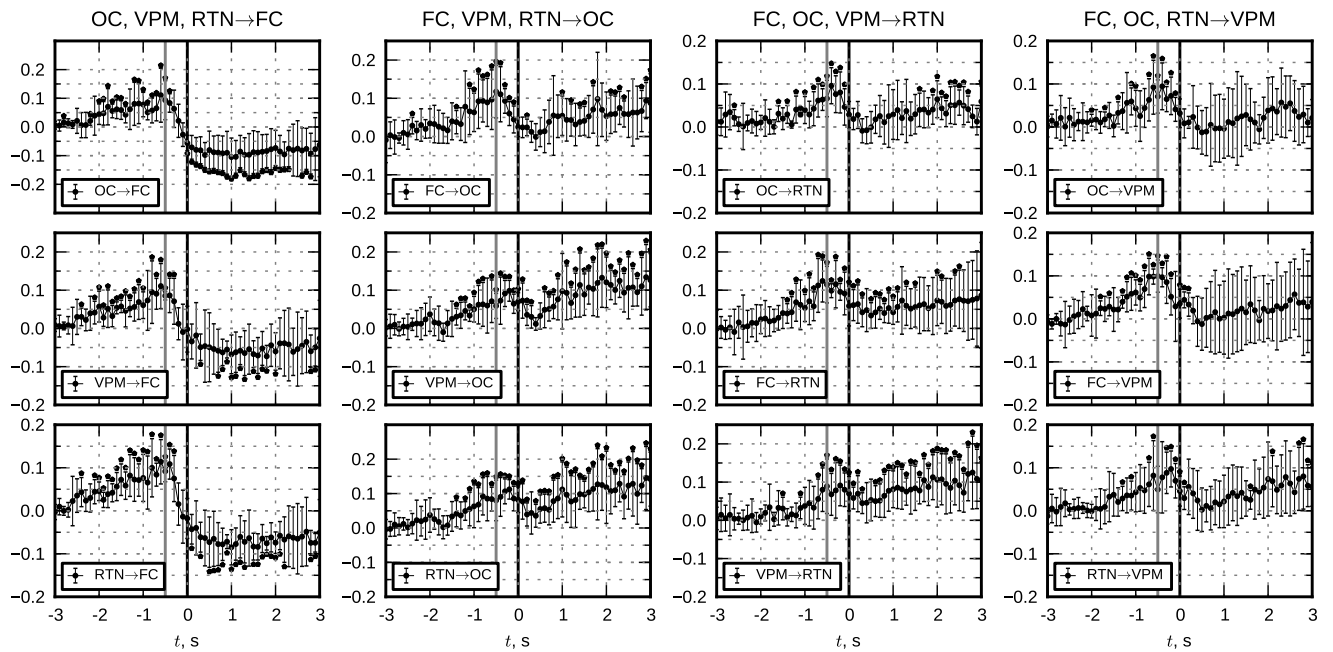


Рис. 6.10. Результаты статистического анализа временной зависимости нормированного улучшения прогноза PI_0 , полученной нелинейным адаптированным методом (3 с до и 3 после начала ПВР). Планки погрешностей показывают 95% уровень значимости. Звёздочки показывают, для каких значений $p - value < 0.05$.

рактеристик сигнала.

Значение PI_0 за 3 с до ПВР и ранее не отличается от фонового уровня во всех рассмотренных парах каналов. Поскольку фоновый уровень PI_{bg} был рассчитан как раз по этим временным интервалам, данное утверждение можно рассматривать как подтверждение стационарности активности на промежутке 10–3 с до начала разряда с точки зрения динамики связей. Статистически значимое увеличение связанности можно диагностировать нелинейным методом в первую очередь в парах, где ядра таламуса влияют на кору: $VPM \rightarrow FC$ и $RTN \rightarrow FC$ и в направлении $OC \rightarrow FC$ за 2.2 с до начала разряда. Начиная с 1.2 с до ПВР было обнаружено обратное увеличение воздействия FC на оба канала в таламусе, OC начинает испытывать усиленное воздействие со стороны VPM и само влиять на RTN. За 0.7–0.4 с до начала возрастает связь в направлении с RTN на OC, с OC на VPM, с FC на OC, в то время как внутриталамические связи так и не были задействованы до начала разряда.

С началом разряда линейный метод показывает значимое увеличение связанности (см. рис. 6.9), причём наибольшее влияние лобная кора оказывает на VPM и RTN, также увеличивается влияние VPM на RTN, в то время как остальные изменения не так выражены. Нелинейный метод отмечает два вида изменений, см. рис. 6.9. В парах, где лобная кора выступала в качестве ведомой структуры (ОС→FC, VPM→FC, RTN→FC), значение PI_0 падало к фоновому уровню или даже ниже вскоре после начала ПВР. При рассмотрении в качестве ведомых остальных отведений, в частности, ОС и RTN, PI_0 сначала рос в преиктальной фазе, затем с началом разряда падал и вновь начинал расти в течении первых 3 с разряда. Влияние на VPM оставалось малым во время ПВР. Для объяснения данной динамики связанности можно предположить, что присутствуют два различных процесса. Первый из них отвечает за начало разряда и проявляется во всех каналах в постепенном росте связанности до начала ПВР, обрываясь в начале иктальной фазы. Второй отвечает за поддержание разряда и запускается не сразу, а с запозданием после начала разряда, следуя за временным падением в связанности. В парах, где затылочная кора и ретикулярное ядро являются ведомыми наблюдается частичное перекрытие этих процессов во времени.

6.6. Сопоставление результатов линейного и нелинейного метода причинности по Грейнджеру для пик-волновых разрядов

Основная находка данного исследования заключается в том, что нелинейный адаптированный метод причинности по Грейнджеру способен выявить больше разнообразных изменений связанности, чем линейный метод. В частности, он выявляет преиктальное усиление взаимодействия в почти всех парах каналов, как и продолжающееся усиление связанности во время разряда.

Полученные нами с помощью линейного подхода результаты показывают низкий и постоянный во времени до самого начала разряда уровень связанности, что согласуется с результатами работы [197]. В этом отношении можно сказать, что линейный подход определяет, что связанность во время разряда изменилась по отношению к фоновой динамике как между областями коры, так и между корой и таламусом. Но выявить преиктальные изменения линейный подход не способен. Тем не менее, некоторые преиктальные изменения уже были ранее обнаружены по записям локальных потенциалов крыс линии WAG/Rij с помощью частотно-временного анализа [196; 200], а также с помощью нелинейной корреляционной функции, рассчитанной в скользящем окне [192; 201], то есть имеются основания полагать, что разряды не начинаются внезапно, а им предшествует некоторая патологическая перестройка таламо-кортикальной сети, которая в течении краткого, но не нулевого интервала времени (преиктальная фаза) приводит к дальнейшей «генерализации» разряда — захвату значительных отделов мозга, в том числе всей таламо-кортикальной сети, включая вентропостериальное медиальное ядро таламуса, ретикулярное ядро, соматосенсорную и моторную кору больших полушарий [214].

Наши расчёты (см. рис. 6.9 и рис. 6.10) указывают на усиление нелинейных взаимодействий в направлении затылочной коры (FC, VPM, RTN → OC) и в направлении ретикулярного ядра таламуса (FC, VPM, OC → RTN) во время преиктальной фазы. Усиление влияния на обе эти структуры может быть связано как с запуском разряда, так и с процессами его генерализации и поддержания. При этом нелинейный метод способен выявить недоступные линейному подходу изменения во взаимодействии, в том числе заблаговременные.

Следует отметить, что в зоне соматосенсорной коры, где традиционно предполагают наличие эпилептического фокуса абсансной эпилепсии, не было электродов. Поэтому полученные результаты не могут расцениваться как окончательные с точки зрения описания изменений в таламо-кортикальной сети при запуске и развитии ПВР. Также нельзя исключить, что некоторые обнаружен-

ные влияния могут быть обусловлены действием третьего общего источника. Для изучения данного вопроса необходимо значительно большее пространственное разрешение, которого можно добиться только с использованием комбинированных электродных схем, включающих частые сети тонких электродов на поверхности коры и ряд глубинных электродов в таламусе. Поэтому основным результатом данного исследования следует считать то, что новый адаптированный нелинейный подход, разработанный ранее на тестовых системах, был применен к экспериментальным данным и показал свою высокую эффективность и значительные преимущества перед используемыми в настоящее время линейными методами и ненаправленными нелинейными мерами.

В ряде случаев наблюдалось значимое падение связанности ниже базового уровня. Хотя отрицать возможность того, что связь действительно уменьшается во время разряда невозможно, результаты рассмотрения эталонных систем в главе 5 показывают, что с большой долей вероятности эти изменения могут быть обусловлены изменением режима поведения на более простой и удобный для предсказания собственной моделью.

6.7. Анализ структуры связей по многоканальной электроэнцефалограмме пациента с односторонним детским церебральным параличом

Обнаружение присутствия и направления связи по сигналам электроэнцефалограммы (ЭЭГ), полученным из различных отведений коры больших полушарий, является популярным подходом в современной нейронауке. В данном разделе модифицированный нелинейный метод причинности Грейнджера применяется к данным ЭЭГ человека — подростка, страдающего односторонним церебральным параличом. Церебральный паралич (ЦП) описывает группу постоянных нарушений движения и осанки, которые приписываются ряду

непрогрессирующих нарушений, которые произошли в развивающемся плоде или младенческом мозге. При одностороннем ЦП поражается преимущественно одна сторона тела, часто верхняя конечность поражается больше, чем нижняя из-за раннего повреждения в двигательных областях контралатерального полушария [227].

6.7.1. Описание экспериментальных данных

Экспериментальные данные представляли собою 32-канальную ЭЭГ, измеренную с частотой выборки 1000 Гц. Все эксперименты были одобрены этическим комитетом Радбоуд университета Неймегена (RU-DEC). Анализировались временные ряды длиной 15000 точек, см. рис. 6.11. Сигналы, полученные в покое и при двигательной активности пораженной и менее поражённой руки, исследовались для двух сеансов записи. Три образца из каждой сессии были проанализированы. Поскольку общее количество каналов было большим и изучение всех возможных комбинаций могло ввести в заблуждение и занять много времени, анализ связи был выполнен для априори выбранных пар каналов (см. рис. 6.12).

Во-первых, необходимо было предварительно обработать временные ряды из многоканальных данных ЭЭГ. Для этого было реализовано вычитание скользящего среднего с длиной окна 1 с для того, чтобы убрать медленные тренды, которые являются результатом дыхания, медленных движений и других типов активности, не имеющих интереса для данного исследования. Затем был применен полосовой фильтр 2.2–30 Гц, поэтому артефакты 50 Гц исчезли автоматически.

Для всех рассматриваемых фрагментов временных рядов были построены спектр и автокорреляционная функция. Анализ спектра показал наличие стабильного пика примерно на частоте 10 Гц (высокий α диапазон). Для многих каналов поднятие также наблюдалось в β диапазоне около 20 Гц. Полученные результаты были использованы для выбора параметров метода.

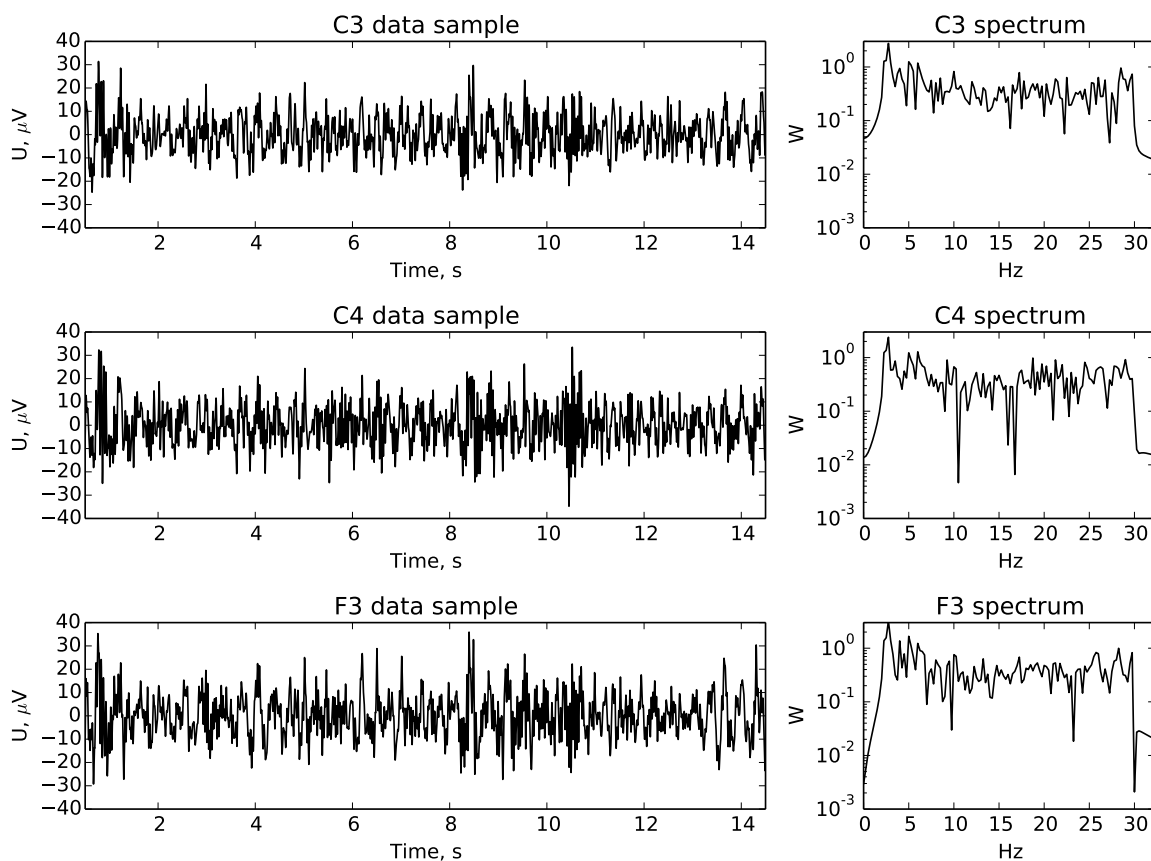


Рис. 6.11. Примеры фильтрованных временных рядов каналов C3, C4 и F3 и их спектры для сессии записи при активности поражённой левой руки.

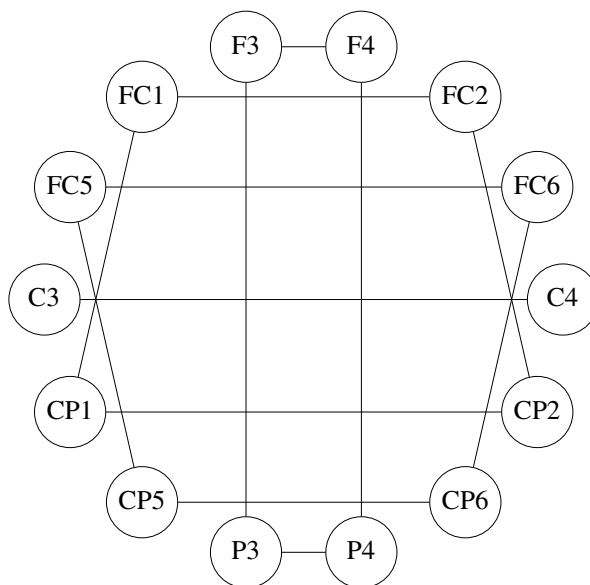


Рис. 6.12. Схема исследования связанности между каналами.

6.7.2. Методика

Использовался адаптированный нелинейный метод с моделями вида (3.1,3.2) и полиномиальной функцией f . Поскольку основной временной масштаб был выражен слабо по сравнению с абсансными разрядами, использование дополнительного лага не давало никакого значимого преимущества. Были подобраны следующие параметры: $P = 3$, $D_s = 2$, $D_a = 1$, $l = 25$, $\tau = 25$. Полученные результаты тестировались на значимость с использованием суррогатных рядов, полученных случайным заданием гармоник Фурье образа, поскольку для построения суррогатов с перемешиванием реализаций не было достаточного количества рядов. Выводы делались на уровне значимости $p - value = 0.05$.

6.7.3. Результаты и обсуждение

Применение нелинейного метода причинности по Грейнджеру к поверхностным ЭЭГ при ДЦП позволило выявить ряд значимых отличий в связанности. Результаты представлены на рис. 6.13. Поскольку анализ для каждой пары каналов проводился для трёх эпизодов каждого временного ряда, использовались следующие обозначения: если значимая связанность была обнаружена в одном случае из 3, связь изображалась серой линией, если в двух — чёрную штриховую, если в трёх — чёрную сплошную. Только связи, значимые на уровне ≤ 0.05 изображались.

Чтобы сделать представление результатов более компактным, суммарный коэффициент связанности C был рассчитан для 4-х различных случаев: для межполушарных взаимодействий в обоих направлениях: $C_{L \rightarrow R}$ (слева направо) и $C_{R \rightarrow L}$ (справа налево), и для внутрислошарных взаимодействий по-отдельности: C_{intraL} для левого полушария и C_{intraR} — для правого. Эти коэффициенты могут быть использованы, чтобы охарактеризовать асимметрию в связанности, которая должна иметь место из-за одностороннего поражения.

Максимальное значение коэффициентов связанности в сети было обнару-

жено для состояния «активная поражённая левая рука», как для ипсилатеральных, так и для контралатеральных связей. Таким образом, вся сеть задействуется более, когда пациент начинает использовать поражённую конечность, что может рассматриваться как проявление механизмов пластичности в мозге. Количество связей при условии «активная непоражённая правая рука» напротив — самое малое, то есть активность непоражённой конечности достигается при минимальном участии непосредственно не связанных с нею областей, включая поражённое полушарие.

Четыре случая, когда связанность исследовалась в покое, дали весьма сходную архитектуру связей. Большинство отличий относятся к случаю $C_{R \rightarrow L}$, то есть когда исследуется связь от нормальной к поражённой полусфере.

Результаты обработки двух различных сессий показывают большое сходство для поражённой конечности и существенные различия не поражённой, особенно в состоянии покоя. Для объяснения этих результатов можно выдвинуть следующую гипотезу: мозг использует различные здоровые области для компенсации поражённых частей. При использовании не поражённой конечности механизм пластичности не задействуется. Для сессии 1 (до лечения) большее число связей в мозге есть результат постоянных перестроек, необходимых для компенсации деятельности поражённой части. После лечения во время сессии 2 компенсаторный механизм становится более стабильным и потому такое большее число связей уже не необходимо.

В целом, количество значимо выявленных связей различно для покоя, при активности поражённой и менее поражённой конечности. Также оно отличается между двумя сессиями записи. Насколько эти различия типичны и значимы с медицинской точки зрения, можно будет сказать, если удастся проанализировать больше пациентов. Однако несомненно, что нелинейный метод причинности по Грейнджеру способен выявить значимые связи также и по записям поверхностных ЭЭГ.

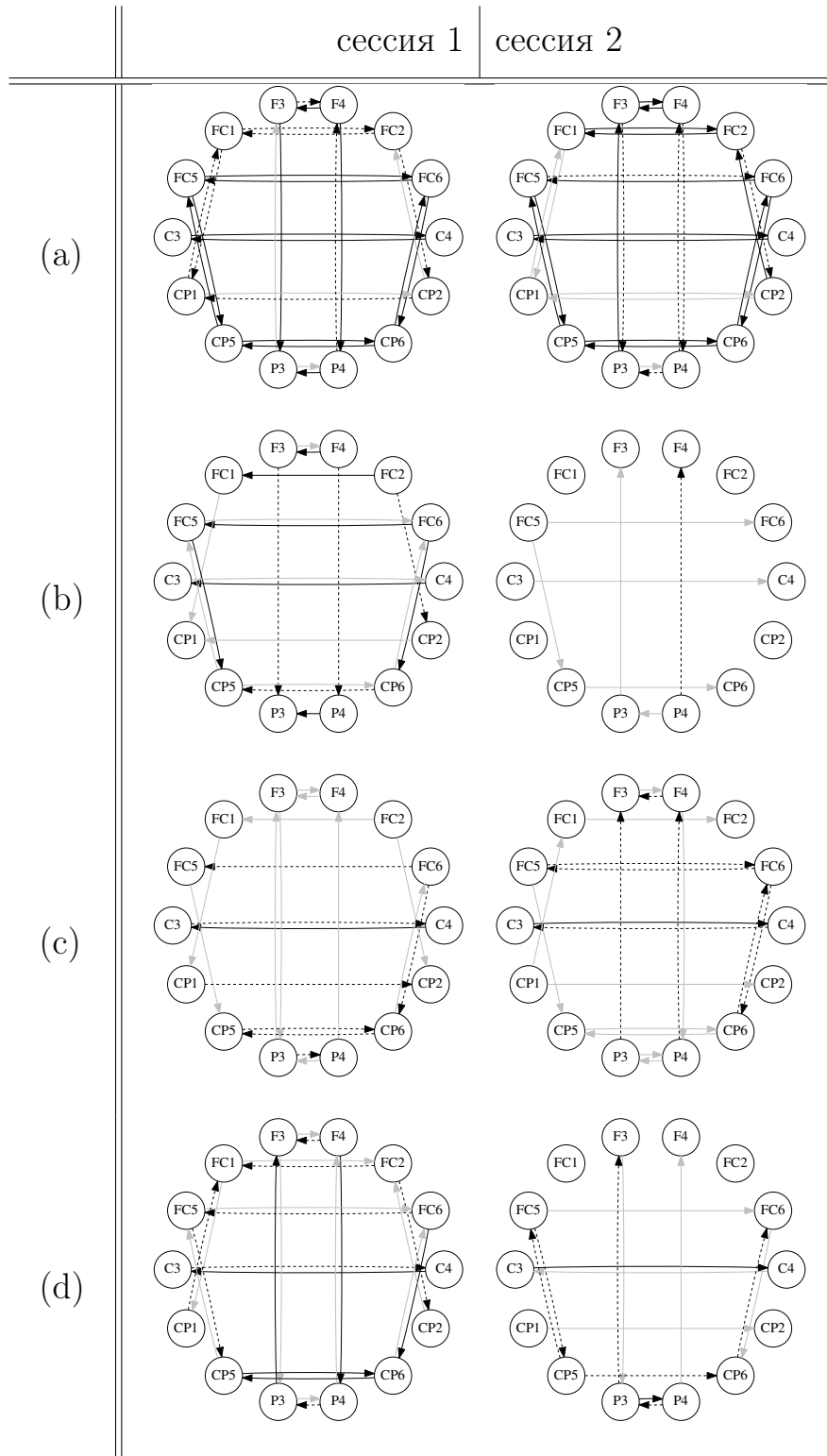


Рис. 6.13. Восстановленная архитектура связей: (a) — реконструкция связанности при активной поражённой левой руке; (b) — при активной непоражённой правой; (c) и (d) — в покое.

6.8. Выводы

Представленный в данной главе метод нелинейной адаптивной причинности Грейнджера основан на эмпирической модели, учитывающей свойства рассматриваемых сигналов. В частности, были проанализированы временные масштабы исходного сигнала локальных потенциалов, а также тщательно оценены размерность и нелинейность модели по критерию Шварца. С помощью метода неравномерного вложения число коэффициентов модели было дополнительно уменьшено, поэтому модель может быть построена в том же коротком временном окне, что и ранее использовавшаяся линейная модель [197]. Все эти модификации дали нам возможность извлечь дополнительную информацию из тех же данных. В результате адаптивная нелинейная причинность по Грейнджеру выявила изменения связи во всех парах каналов во время иктальной фазы (ПВР), а также во время преиктальной фазы, продемонстрировав большую чувствительность нового метода к предвестниковой активности и подтвердив, что ПВР не возникают внезапно.

Необходимо отметить, что крайне важно выполнять каждый этап адаптации модели. Во-первых, включение нелинейности в модель повышает чувствительность к преиктальной и иктальной активности. Во-вторых, включение свойств сигнала в модель (например, доминирующих частот сигналов локальных потенциалов) предотвращает обнаружение ложных связей. В-третьих, применение неравномерного вложения и критерия Шварца для определения оптимальной размерности модели и порядка полинома уменьшает число коэффициентов и помогает решить проблему их недооценки. Это позволяет использовать небольшое временное окно с достаточно хорошим временным разрешением, которое оказалось достаточным для обнаружения сложных изменений сетевых взаимодействий во время преиктальной активности. Отсутствие этих адаптаций существенно ухудшало качество прогнозирования модели и приводило к невнятным или заведомо ложным результатам.

Достигнутые результаты не могут быть объяснены изменением амплитуды сигнала с началом разряда, поскольку изменения в связанности часто начинаются за 1 или даже 1,5 секунды до того, как скользящее временное окно захватывает эпилептиформную активность. Таким образом, после адаптаций метод стал более чувствительным к изменениям связей, но не к изменениям амплитуды сигналов. Это хорошо согласуется с результатами [179], где также показано, что модель может быть нечувствительна к амплитуде сигнала, если построена из верных принципов. Аналогичные выводы можно сделать на основе рассмотрения эталонных систем, как это показано в рамках главы 5.

В целом, только нелинейная причинность показала временное возрастание связанности почти во всей сети, что может быть рассмотрено как свидетельство важности учёта нелинейности при рассмотрении пик-волновых разрядов. В то же время временная динамика связанности в разных парах отведений различна, в том числе и двух различных направлениях в одной и той же паре, что показывает сложность и неоднородность организации таламо-кортикальной сети при абсансной эпилепсии.

Дополнительно в данной работе исследованы многоканальные данные ЭЭГ у подростка, страдающего односторонним церебральным параличом. Проанализированы сигналы, полученные в покое и при двигательной активности пораженной и менее пораженной руки. Изучены изменения межполушарных и внутриполушарных взаимодействий с интервалом в два месяца. Полученные результаты связи были проверены на значимость с помощью суррогатных временных рядов. В настоящей работе мы сообщаем данные одного пациента. Модифицированная нелинейная причинность Грейнджера действительно способна выявить асимметрию связей в человеческом мозге по поверхностной энцефалограмме, если использовать модели и параметры, специально подогнанные к экспериментальным данным.

Результаты главы 6 опубликованы в работах [171; 205; 224; 228; 229].

Заключение

Идея реконструкции математических моделей по экспериментальным временным рядам и идея оценки связанности систем по временным рядам активности двух и более систем имеют весьма почтенный возраст и в значительной степени пересекаются. Реконструкция неавтономных [22] или связанных [23] осцилляторов всегда предполагает реконструкцию воздействия в дополнение к индивидуальной динамике. А использование предсказательных моделей для оценки связанности, как это было предложено Винером [230] и Грейнджером [1] всегда предполагает моделирование собственной динамики отдельных подсистем.

Но непосредственная реализация методов, основанных на этих двух идеях, разнилась в течении многих лет. В то время как исходная работа Грейнджера [1] не предполагала ограничиваться определённым типом моделей для детектирования связанности, почти все известные реализации основаны на авторегрессионных моделях, которые могут рассматриваться с точки зрения нелинейной динамики как стохастические отображения. В противоположность, именно системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались в качестве основного объекта в задачах реконструкции по временным рядам с самого начала [100], поскольку именно ОДУ и иногда дифференциальные уравнения с запаздывающей обратной связью используются для описания большинства объектов неживой и живой природы, а также техники: радиофизических генераторов [15–18], климатических явлений [149], генерации потенциалов действия нервных клеток [122; 123]. В то время, как задача реконструкции уравнений в частных производных, как правило, считается слишком сложной и заменяется на задачу реконструкции сетей более простых систем, описываемых теми же ОДУ.

Разделение на методы оценки связанности и методы идентификации (восстановления) систем имеет определённые основания. Если стоит задача именно

оценить связи, работать с узлами, описываемыми сложными моделями обычно неудобно, поскольку в дополнение к связям придётся восстанавливать индивидуальные параметры и нелинейные функции отдельных узлов, а это может представлять даже большую сложность. Поэтому часто, см. [24], например, такие функции рассматриваются как известные. Но в реальном эксперименте предполагать это было бы слишком наивно. Аппроксимация степенными или тригонометрическим полиномами также возможна и неоднократно предлагалась, в частности в [22; 29; 130]. Но разложение неизвестных функций по базису часто ведёт к значительному росту числа оцениваемых параметров и падению работоспособности методики, её грубости и к увеличению требований к объёму экспериментальных данных.

Другая проблема заключается в том, что реконструкция сложных моделей для индивидуальных узлов требует возможности измерять векторные временные ряды для каждого осциллятора в ансамбле. Известные подходы к реконструкции при наличии скрытых (неизмеряемых) переменных ориентированы на маломерные системы такие, как [155], и их обобщение на многомерный случай принципиально затруднено существенным ростом сложности задачи нелинейной оптимизации в пространстве всё большей размерности.

Поэтому наиболее успешные методы [2; 4; 6—8; 171; 231], внесшие огромный вклад в понимание организации сетей в нейронауке [232—237], климатологии [238; 239] и даже социологии [12], эксплуатировали идею функциональной связанности, не пытаясь реконструировать действительный механизм взаимодействия и его параметры. То есть эти подходы по сути выявляли степень влияния одной подсистемы в ансамбле на другую. Хотя их успех очевиден, сложность интерпретации полученных результатов очень велика. Тем не менее, специализация и тонкая настройка подходов, эксплуатирующих идею грейнджеровской причинности, могут существенно повысить их надёжность, что и продемонстрировано в главах 3–6 данной работы на численных и нейрофизиологических примерах.

Другой способ продвинуться вперёд — это постараться использовать априорную информацию об объекте и одновременно постараться отказаться от параметризации входящих в модель нелинейных функций там, где возможно, как это сделано, например в [140] для функций связи. Как возможная реализация данного подхода, в данной работе предложена идея оптимизации гладкости описания нелинейных функций отдельных узлов. В данной работе этот подход последовательно реализуется для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием первого порядка, нейроосцилляторов, описывающих вариабельность частоты бёрстинга нейронов, в том числе при наличии запаздывания в связях, и, наконец, обобщённых осцилляторов ван дер Поля, включая как частные случаи осцилляторов Рэля и Бонхёффера–ван дер Поля (модель нейрона ФитцХью–Нагумо). При этом оказывается возможно восстановить как архитектуру связей (различить реальные и ложные связи), так и оценить индивидуальные параметры и восстановить нелинейные функции подсистем.

Основные результаты и выводы по работе можно сформулировать следующим образом.

1. Разработано и апробировано в численном и радиофизическом эксперименте семейство алгоритмов для реконструкции ансамблей осцилляторов с запаздыванием первого порядка по векторным временным рядам. Алгоритмы позволяют восстановить систему и коэффициенты связей, собственные параметры, включая времена запаздывания, и нелинейные функции элементов.
2. Разработан подход к реконструкции ансамблей нейроосцилляторов, моделирующих изменение частоты генерации элементов нейронной популяции, по их векторным временным рядам, в том числе для неизвестных функций связи и при наличии запаздывания в связях.
3. Разработан подход к реконструкции связанных обобщённых осцилляторов

ван дер Поля по скалярным временным рядам всех элементов ансамбля. Подход использует специальную целевую функцию, уменьшая параметризацию и повышая таким образом общность решаемой задачи.

4. Исследованы чувствительность и специфичность метода нелинейной причинности по Грейнджеру при оценке связанности между системами с выраженным временным масштабом и сформулированы критерии и рекомендации по выбору параметров метода. Показано, что модели с полиномиальными аппроксимирующими функциями дают существенно лучшие чувствительность и специфичность по сравнению с линейными и кусочно-линейными.
5. Исследована эффективность различных подходов к генерации суррогатных временных рядов для диагностики связанности методом нелинейной причинности по Грейнджеру. Показано, что все известные методики занижают уровень значимости при слабом взаимодействии, а для коротких временных рядов и в скользящем временном окне удовлетворительно работает только подход, основанный на перестановке реализаций.
6. Исследован вопрос о пределах применимости метода нелинейной причинности по Грейнджеру при наличии шумов измерения, общих низкочастотных помех и при непрямом взаимодействии.
7. Показано, что метод причинности по Грейнджеру эффективно определяет изменение силы взаимодействия при его использовании в скользящем временном окне, если параметры метода настроены с учётом временных масштабов исследуемых сигналов, а для тестирования значимости используются суррогатные временные ряды, полученные путём перестановки реализаций в исходных данных.
8. Разработаны специализированные модели для оценки связанности и автоматической разметки при абсансной эпилепсии по сигналам внутричереп-

ных ЭЭГ. Показано, что с использованием такой модели можно получить существенно больше информации о динамике связанности, сопутствующей инициации и поддержанию пик-волновых разрядов, чем с использованием стандартных линейных моделей или иных подходов.

Несомненно, полученные результаты в области разработки методов оценки связанности, несмотря на их успешное приложение в задачах радиотехники и нейрофизиологии, не являются окончательными. Перспективным выглядит дальнейшее развитие результатов работы, в том числе в следующих направлениях. Во-первых, дальнейшее сближение результатов, полученных в главах 1–2 и 3–6, например, использование сложных моделей в виде ОДУ при реализации метода причинности по Грейнджеру. Во-вторых, приложение полученных результатов к экспериментальным данным с большим числом элементов, нежели это рассмотрено в данной работе, чтобы понять все присущие им ограничения. В-третьих, экстраполяция методики с использованием целевой функции как функции гладкости описания на новые практически важные объекты, в том числе радиотехнические и биофизические. В-четвёртых, дальнейшее развитие методов оценки значимости результатов, в том числе на основе статистических критериев и путём генерации суррогатных временных рядов.

Всё это шаг за шагом позволит, как теперь представляется, значимо продвинуться в области реконструкции сложных сетей таким образом, что не только можно будет оценивать функциональные и структурные взаимодействия между подсистемами в сложных сетях по экспериментальным данным, но и надёжно интерпретировать полученные результаты.

Список литературы

1. *Granger C.* Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods // *Econometrica*. — 1969. — Vol. 37, no. 3. — Pp. 424–438.
2. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Phys. Rev. E*. — 2006. — Vol. 73. — P. 066216.
3. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Kernel-Granger causality and the analysis of dynamical networks // *Phys. Rev. E*. — 2008. — Vol. 77. — P. 056215.
4. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies / R. Hesse [et al.] // *J. Neurosci. Methods*. — 2003. — Vol. 124. — Pp. 27–44. — DOI: [10.1016/S0165-0270\(02\)00366-7](https://doi.org/10.1016/S0165-0270(02)00366-7).
5. *Chen Y., Bressler S. L., Ding M.* Frequency decomposition of conditional Granger causality and application to multivariate neural field potential data // *J. Neuroscience Methods*. — 2006. — Vol. 150, no. 2. — Pp. 228–237. — DOI: [10.1016/j.jneumeth.2005.06.011](https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2005.06.011).
6. *Schreiber T.* Measuring Information Transfer // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — P. 461.
7. Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality / Y. Chen [et al.] // *Phys. Lett. A*. — 2004. — Vol. 324, no. 1. — Pp. 26–35.
8. *Baccala L., Sameshima K.* Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination // *Biol. Cybern.* — 2001. — Vol. 84. — Pp. 463–474.

9. *Kraskov A., Stögbauer H., Grassberger P.* Estimating mutual information // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 69. — P. 066138.
10. The use of signal-analysis for the location of an epileptogenic focus: a new approach. *Advances in Epileptology / J. Pijn [et al.] // Advances in Epileptology.* — 1989. — Vol. 17. — Pp. 272–276.
11. *Smirnov D. A., Mokhov I. I.* From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80. — P. 016208.
12. *Hiemstra C., Jones J. D.* Testing for Linear and Nonlinear Granger Causality in the Stock Price-Volume Relation // *The Journal of Finance.* — 1994. — Vol. 49, no. 5. — Pp. 1639–1664. — DOI: [10.1111/j.1540-6261.1994.tb04776.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb04776.x).
13. *Gourévitch B., Le Bouquin-Jeannès R., Faucon G.* Linear and nonlinear causality between signals: Methods, examples and neurophysiological applications // *Biological Cybernetics.* — 2006. — Vol. 95, no. 4. — Pp. 349–369. — DOI: [10.1007/s00422-006-0098-0](https://doi.org/10.1007/s00422-006-0098-0).
14. *Smirnov D. A., Bezruchko B. P.* Spurious causalities due to low temporal resolution: Towards detection of bidirectional coupling from time series // *Europhys. Lett.* — 2012. — Vol. 100. — P. 10005.
15. *Кислов В. Я., Залогин Н. Н., Мясин Е. А.* Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // *Радиотехника и электроника.* — 1979. — Т. 24, № 6. — С. 1118–1130.
16. *Кляшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // *Радиотехника и электроника.* — 1980. — Т. 25, № 2. — С. 336–343.

17. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е.* Многочастотные и стохастические автоколебания в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. — 1982. — Т. 27, № 10. — С. 1972—1978.
18. *Дмитриев А. С., Кислов В. Я.* Стохастические колебания в автогенераторе с инерционным запаздыванием первого порядка // Радиотехника и электроника. — 1984. — Т. 29, № 12. — С. 2389—2398.
19. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / В. С. Афраймович [и др.] // / под ред. Р. М. Гапонова-Грехова А.В. — Горький : ИПФ АН СССР, 1989.
20. *Чуа Л. О.* Генезис схемы Чуа // Изв. вузов. ПНД. — 1993. — Т. 1, № 3—4. — С. 5—16.
21. *Linsay P.* Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // Phys. Rev. Lett. — 1981. — Vol. 47, no. 19. — Pp. 1349—1352.
22. *Besruchko B. P., Smirnov D. A.* Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 63. — P. 016207.
23. *Prokhorov M., Ponomarenko V.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72. — P. 016210. — DOI: [10.1103/PhysRevE.72.016210](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.016210).
24. *Shandilya S. G., Timme M.* Inferring network topology from complex dynamics // New Journal of Physics. — 2011. — Vol. 13, no. 1. — P. 013004. — URL: <http://stacks.iop.org/1367-2630/13/i=1/a=013004>.
25. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. — НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — С. 560.

26. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Восстановление уравнений системы с задержкой по экспериментальному временному ряду // Известия вузов. ПНД. — 2002. — Т. 10, № 1–2. — С. 52–64.
27. Geometry from a Time Series / N. Packard [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45. — Pp. 712–716. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.45.712](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.712).
28. Kougioumtzis D. State space reconstruction parameters in the analysis of chaotic time series—the role of the time window length // Physica D. — 1996. — Vol. 91, no. 1. — Pp. 13–28.
29. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L2 approximation on nets // Phys. Rev. E. — 1994. — Vol. 49. — P. 4955.
30. Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data / J. Theiler [et al.] // Physica D. — 1992. — Vol. 58. — Pp. 77–94.
31. Schwarz G. Estimating the Dimension of a Model // The Annals of Statistics. — 1978. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 461–464. — DOI: [10.1214/aos/1176344136](https://doi.org/10.1214/aos/1176344136).
32. Strong and weak chaos in networks of semiconductor lasers with time-delayed couplings / S. Heiligenthal [et al.] // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 88, no. 1. — P. 012902. — DOI: [10.1103/PhysRevE.88.012902](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.012902).
33. Burić N., Vasović N. Global stability of synchronization between delay-differential systems with generalized diffusive coupling // Chaos, Solitons & Fractals. — 2007. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 336–342. — ISSN 0960-0779. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.09.066>.

34. *Krishna B. M., John M. P., Nandakumaran V.* Multi-user bidirectional communication using isochronal synchronisation of array of chaotic directly modulated semiconductor lasers // *Physics Letters A*. — 2010. — Vol. 374, no. 17. — Pp. 1835–1842. — ISSN 0375-9601. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.02.038>.
35. *Mincheva M., Roussel M. R.* Graph-theoretic methods for the analysis of chemical and biochemical networks. II. Oscillations in networks with delays // *Journal of Mathematical Biology*. — 2007. — Vol. 55, no. 1. — Pp. 87–104. — DOI: [10.1007/s00285-007-0098-2](https://doi.org/10.1007/s00285-007-0098-2).
36. *Kuang Y.* *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. — Boston : Academic Press, 1993. — P. 398.
37. *Bocharov G. A., Rihan F. A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2000. — Vol. 125, no. 1. — Pp. 183–199. — ISSN 0377-0427. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00468-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00468-4). — Numerical Analysis 2000. Vol. VI: Ordinary Differential Equations and Integral Equations.
38. *Orosz G., Moehlis J., Murray R. M.* Controlling biological networks by time-delayed signals // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2010. — Vol. 368, no. 1911. — Pp. 439–454. — ISSN 1364-503X. — DOI: [10.1098/rsta.2009.0242](https://doi.org/10.1098/rsta.2009.0242). — eprint: <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/368/1911/439.full.pdf>.
39. *Fowler A., Kember G.* Delay recognition in chaotic time series // *Physics Letters A*. — 1993. — Vol. 175, no. 6. — Pp. 402–408. — ISSN 0375-9601. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90991-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90991-8).

40. Identifying and Modeling Delay Feedback Systems / R. Hegger [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81, no. 3. — Pp. 558–561. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.558](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.558).
41. Reconstruction of systems with delayed feedback: I. Theory / M. J. Bünner [et al.] // The European Physical Journal D. — 2000. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 165–176.
42. *Tian Y.-C., Gao F.* Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1997. — Vol. 108, no. 1. — Pp. 113–118. — ISSN 0167-2789. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)82008-8](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)82008-8).
43. Recovery of the time-evolution equation of time-delay systems from time series / M. J. Bünner [et al.] // Phys. Rev. E. — 1997. — Vol. 56, no. 5. — Pp. 5083–5089. — DOI: [10.1103/PhysRevE.56.5083](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.5083).
44. *Voss H., Kurths J.* Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // Physics Letters A. — 1997. — Vol. 234, no. 5. — Pp. 336–344. — ISSN 0375-9601. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00598-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00598-7).
45. Inferring mechanism from time-series data: Delay-differential equations / S. P. Ellner [et al.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1997. — Vol. 110, no. 3. — Pp. 182–194. — ISSN 0167-2789. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00123-1](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00123-1).
46. Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series / M. Prokhorov [et al.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2005. — Vol. 203, no. 3. — Pp. 209–223. — ISSN 0167-2789. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.03.013>.

47. *Prokhorov M., Ponomarenko V., Khorev V.* Recovery of delay time from time series based on the nearest neighbor method // *Physics Letters A*. — 2013. — Vol. 377, no. 43. — Pp. 3106–3111. — ISSN 0375-9601. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.09.046>.
48. Time delay identification in chaotic cryptosystems ruled by delay-differential equations / V. S. Udaltsov [et al.] // *J. Opt. Technol.* — 2005. — Vol. 72, no. 5. — Pp. 373–377. — DOI: [10.1364/JOT.72.000373](https://doi.org/10.1364/JOT.72.000373).
49. Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis / L. Zunino [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2010. — Vol. 82, no. 4. — P. 046212. — DOI: [10.1103/PhysRevE.82.046212](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.046212).
50. *Horbelt W., Timmer J., Voss H.* Parameter estimation in nonlinear delayed feedback systems from noisy data // *Physics Letters A*. — 2002. — Vol. 299, no. 5. — Pp. 513–521. — ISSN 0375-9601. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(02\)00748-X](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)00748-X).
51. Seeker optimization algorithm for parameter estimation of time-delay chaotic systems / C. Dai [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 83, no. 3. — P. 036203. — DOI: [10.1103/PhysRevE.83.036203](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.036203).
52. *Sorrentino F.* Identification of delays and discontinuity points of unknown systems by using synchronization of chaos // *Phys. Rev. E*. — 2010. — Vol. 81, no. 6. — P. 066218. — DOI: [10.1103/PhysRevE.81.066218](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.066218).
53. Adaptive identification of time delays in nonlinear dynamical models / H. Ma [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2010. — Vol. 82, no. 6. — P. 066210. — DOI: [10.1103/PhysRevE.82.066210](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.066210).
54. *Siefert M.* Practical criterion for delay estimation using random perturbations // *Phys. Rev. E*. — 2007. — Vol. 76, no. 2. — P. 026215. — DOI: [10.1103/PhysRevE.76.026215](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.026215).

55. *Yu D., Frasca M., Liu F.* Control-based method to identify underlying delays of a nonlinear dynamical system // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 78, no. 4. — P. 046209. — DOI: [10.1103/PhysRevE.78.046209](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.046209).
56. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Recovery of systems with a linear filter and nonlinear delay feedback in periodic regimes // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 78, no. 6. — P. 066207. — DOI: [10.1103/PhysRevE.78.066207](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.066207).
57. *Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I.* Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80, no. 6. — P. 066206. — DOI: [10.1103/PhysRevE.80.066206](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.066206).
58. *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks / V. S. Afraimovich [et al.].* — : WORLD SCIENTIFIC, 1995. — DOI: [10.1142/2412](https://doi.org/10.1142/2412). — eprint: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/2412>.
59. *Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — Техносфера. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — С. 496.
60. *Ancona N., Marinazzo D., Stramaglia S.* Radial basis function approach to nonlinear Granger causality of time series // *Physical Review E.* — 2004. — Vol. 70. — P. 056221.
61. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 64. — 045202(R). — DOI: [10.1103/PhysRevE.64.045202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.045202).
62. *Smirnov D. A., Bezruchko B. P.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 68. — P. 046209.

63. *Schelter B., Timmer J., Eichler M.* Assessing the Strength of Directed Influences Among Neural Signals Using Renormalized Partial Directed Coherence // *J. Neuroscience Methods*. — 2009. — Vol. 179. — Pp. 121–130.
64. *Wu X.* Synchronization-based topology identification of weighted general complex dynamical networks with time-varying coupling delay // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2008. — Vol. 387, no. 4. — Pp. 997–1008. — ISSN 0378-4371. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.10.030>.
65. Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay / H. Liu [et al.] // *Automatica*. — 2009. — Vol. 45, no. 8. — Pp. 1799–1807. — ISSN 0005-1098. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.03.022>.
66. *Xu Y., Zhou W., Fang J.* Topology identification of the modified complex dynamical network with non-delayed and delayed coupling // *Nonlinear Dynamics*. — 2012. — Vol. 68, no. 1–2. — Pp. 195–205. — DOI: [10.1007/s11071-011-0217-x](https://doi.org/10.1007/s11071-011-0217-x).
67. Online estimation of unknown delays and parameters in uncertain time delayed dynamical complex networks via adaptive observer / X. Wu [et al.] // *Nonlinear Dynamics*. — 2013. — Vol. 73, no. 3. — Pp. 1753–1768. — DOI: [10.1007/s11071-011-0217-x](https://doi.org/10.1007/s11071-011-0217-x).
68. *Savitzky A., Golay M.* Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures // *Analytical Chemistry*. — 1964. — Vol. 38, no. 8. — Pp. 1627–1639. — DOI: [10.1021/ac60214a047](https://doi.org/10.1021/ac60214a047).
69. *Nelder J. A., Mead R.* A simplex for function minimization // *Computer Journal*. — 1965. — Vol. 7. — Pp. 308–313.

70. *Kendall M., Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics. — New York : MacMillan, 1979.
71. *Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Distributions. Vol. 2. — New York : Wiley, 1995. — P. 752.
72. *Ikeda K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Optics Communications. — 1979. — Vol. 30, no. 2. — Pp. 257–261. — ISSN 0030-4018. — DOI: [10.1016/0030-4018\(79\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0030-4018(79)90090-7).
73. *Mackey M., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. — 1977. — Vol. 197, no. 4300. — Pp. 287–289. — ISSN 0036-8075. — DOI: [10.1126/science.267326](https://doi.org/10.1126/science.267326).
74. *Мандель И. Д.* Кластерный анализ. — М : Финансы и статистика, 1988. — С. 176.
75. *Ringwood V., Malpas S. C.* Slow oscillations in blood pressure via a non-linear feedback model // Am. J. Physiol. Regulatory Integrative Comp. Physiol. — 2001. — Vol. 280. — R1105–R1115.
76. *Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I.* Encryption and decryption of information in chaotic communication systems governed by delay-differential equations // Chaos, Solitons & Fractals. — 2008. — Vol. 35, no. 5. — Pp. 871–877.
77. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // Physica D. — 1987. — Vol. 29. — Pp. 223–235.
78. Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия / Д. А. Смирнов [и др.] // Письма в ЖТФ. — 2003. — Т. 29, № 19. — С. 69–76.

79. *Безручко Б. П., Смирнов Д. А., Сысоев И. В.* Реконструкция при наличии скрытых переменных: модифицированный алгоритм Бока // Известия вузов. ПНД. — 2004. — Т. 12, № 6. — С. 93–104.
80. *Bezruchko B. P., Smirnov D. a.* Extracting Knowledge From Time Series: (An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling). — New York : Springer, 2010. — (Springer Series in Synergetics).
81. Identification of nucleocytoplasmic cycling as a remote sensor in cellular signaling by data based modeling / I. Swameye [et al.] // Proc. National Acad. Sci. USA. — 2003. — Vol. 100, no. 3. — Pp. 1028–1033. — DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.0237333100>.
82. *Вольнова А. Б., Н. Л. Д.* Абсансная эпилепсия: механизмы гиперсинхронизации нейронных ансамблей // Медицинский академический журнал. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 7–19.
83. *Jensen K. S., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Self-sustained oscillations and chaotic behaviour in kidney pressure regulation // Mondes en Developpement. — 1986. — Vol. 54/55. — Pp. 91–109.
84. *Milton J., Jung P.* Epilepsy as a Dynamical Disease. — New York : Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
85. Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems / J. H. Talla Mbé [et al.] // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 91, no. 1. — P. 012902. — DOI: [10.1103/PhysRevE.91.012902](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.012902).
86. Fitting ordinary differential equations to chaotic data / E. Baake [et al.] // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45, no. 8. — Pp. 5524–5529. — DOI: [10.1103/PhysRevA.45.5524](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.5524).
87. *Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г.* Методы поиска глобального экстремума. — М : Наука, Физматлит, 1991. — С. 248.

88. *Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Восстановление архитектуры связей в ансамбле связанных систем с запаздыванием // Письма в ЖТФ. — 2012. — Т. 38, № 15. — С. 1—9.
89. Определение параметров элементов и архитектуры связей в ансамблях связанных систем с запаздыванием по временным рядам / И. Сысоев [и др.] // Журнал технической физики. — 2014. — Т. 84, № 10. — С. 16—26.
90. *Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Восстановление архитектуры связей в ансамбле связанных систем с запаздыванием // Письма в ЖТФ. — 2016. — Т. 42, № 1. — С. 95—102.
91. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay system from time series / I. V. Sysoev [et al.] // Phys. Rev. E. — 2014. — Vol. 89. — P. 062911. — DOI: [10.1103/PhysRevE.89.062911](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.062911).
92. Recovery of couplings and parameters of elements in networks of time-delay systems from time series / I. V. Sysoev [et al.] // Phys. Rev. E. — 2016. — Vol. 94. — P. 052207. — DOI: [10.1103/PhysRevE.94.052207](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052207).
93. *Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Реконструкция однонаправленно связанных систем с запаздыванием первого порядка по временной реализации ведомой системы // Известия вузов. ПНД. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 84—93. — DOI: [10.18500/0869-6632-2017-25-1-84-93](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-1-84-93).
94. Реконструкция систем с запаздыванием под внешним периодическим воздействием / М. В. Сысоева [и др.] // Нелинейная динамика. — 2013. — Т. 9, № 4. — С. 613—625. — DOI: [10.20537/nd1304001](https://doi.org/10.20537/nd1304001).
95. *Gouesbet G., Meunier-Guttin-Cluzel G., Menard O.* Chaos and its Reconstruction. — New York : Nova Science Publishers, 2003.

96. *Wang W.-X., Lai Y.-C., Grebogi C.* Data based identification and prediction of nonlinear and complex dynamical systems // Phys. Rep. — 2016. — Vol. 644. — Pp. 1–76. — DOI: [10.1016/j.physrep.2016.06.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.06.004).
97. Random dynamical models from time series / Y. I. Molkov [et al.] // Phys. Rev. E. — 2012. — Vol. 85. — P. 036216. — DOI: [10.1103/PhysRevE.85.036216](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.036216).
98. Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series / D. N. Mukhin [et al.] // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73. — P. 036211. — DOI: [10.1103/PhysRevE.73.036211](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.036211).
99. *Smirnov D., Bezruchko B.* Detection of coupling in ensembles of stochastic oscillators // Phys. Rev. E. — 2009. — Vol. 79. — P. 046204.
100. *Cremers J., Hübler A.* Construction of Differential Equations from Experimental Data // Zeitschrift für Naturforschung - Section A Journal of Physical Sciences. — 1987. — Vol. 42, no. 8. — Pp. 797–802.
101. *Anishchenko V. S., Pavlov A., Janson N.* Global reconstruction in the presence of a priori information // Chaos, Solitons & Fractals. — 1998. — Vol. 9, no. 8. — Pp. 1267–1278.
102. Special approaches to global reconstruction of equations from time series / B. P. Bezruchko [et al.] // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics (Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika). — 2002. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 137–158.
103. *Severyuknina A.* Optimization of basis function set for model map reconstruction of short electroencephalogram tracings during epileptic seizure // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics (Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika). — 2013. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 88–95.

104. *Timme M., Wolf F., Geisel T.* Prevalence of Unstable Attractors in Networks of Pulse-Coupled Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 154105. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.154105](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.154105).
105. How basin stability complements the linear-stability paradigm / P. Menck [et al.] // *Nature Phys.* — 2013. — Vol. 9. — Pp. 89–92. — DOI: [10.1038/nphys2516](https://doi.org/10.1038/nphys2516).
106. *Bezruchko B. P., Dikanev T. V., Smirnov D. A.* Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 64. — P. 036210.
107. Robust Reconstruction of Complex Networks from Sparse Data / X. Han [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 28701. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.114.028701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.028701).
108. *Brunton S., Proctor J., Kutz J.* Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* — 2016. — Vol. 113. — Pp. 3932–7. — DOI: [10.1073/pnas.1517384113](https://doi.org/10.1073/pnas.1517384113).
109. Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics / N. Mangan [et al.] // *IEEE Trans. Mol. Biol. Multi-Scale Commun.* — 2016. — Vol. 2. — Pp. 52–63. — DOI: [10.1109/TMBMC.2016.2633265](https://doi.org/10.1109/TMBMC.2016.2633265).
110. Глобальная реконструкция по нестационарным данным / Н. Б. Янсон [и др.] // *Письма в ЖТФ.* — 1999. — Т. 25, № 10. — С. 74–81.
111. Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series / Y. I. Molkov [et al.] // *Phys. Rev. E.* — 2011. — Vol. 84. — P. 036215. — DOI: [10.1103/PhysRevE.84.036215](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.036215).

112. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing / W. Wang [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 154101. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.154101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.154101).
113. Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) / Б. П. Безручко [и др.] // *Успехи физических наук.* — 2008. — Т. 178. — С. 323–329.
114. *Barnett L., Barrett A., Seth A.* Granger Causality and Transfer Entropy Are Equivalent for Gaussian Variables // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103. — P. 238701.
115. Evaluating the effective connectivity of resting state networks using conditional Granger causality / W. Liao [et al.] // *Biological Cybernetics.* — 2010. — Vol. 102, no. 1. — Pp. 57–69. — DOI: [10.1007/s00422-009-0350-5](https://doi.org/10.1007/s00422-009-0350-5).
116. *Timme M., Casadiego J.* Revealing networks from dynamics: an introduction // *J. Phys. A Math. Theor.* — 2014. — Vol. 47. — P. 343001. — DOI: [10.1088/1751-8113/47/34/343001](https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/34/343001).
117. *Smirnov D.* Quantifying causal couplings via dynamical effects: A unifying perspective // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Vol. 90. — P. 062921.
118. *Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H. E.* Chaos in random neural networks // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Vol. 61, no. 3. — Pp. 259–262. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.61.259](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.259).
119. *Pol B. van de* A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // *Radio Review (later Wireless World).* — 1920. — Vol. 1. — Pp. 701–710.
120. *Strutt J. W.* *The Theory of Sound* vol. II. — London : Macmillan, 1878.

121. A Bonhoeffer-van der Pol oscillator model of locked and non-locked behaviors of living pacemaker neurons / T. Nomura [et al.] // *Biol. Cybern.* — 1993. — Vol. 69, no. 5–6. — Pp. 429–437.
122. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical J.* — 1961. — Vol. 1. — Pp. 445–466.
123. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proc. IRE.* — 1962. — Vol. 50. — Pp. 2061–2070.
124. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // *Phys. Rev. A.* — 1976. — Vol. 14, no. 6. — Pp. 2338–2345. — DOI: [10.1103/PhysRevA.14.2338](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.14.2338).
125. *Levenberg K.* A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares // *Quarterly of Applied Mathematics.* — 1944. — Vol. 2. — Pp. 164–168.
126. *Marquardt D.* An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1963. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 431–441. — DOI: [10.1137/0111030](https://doi.org/10.1137/0111030).
127. *Coleman T. F., Li Y.* An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds // *SIAM J. Opt.* — 1996. — Vol. 6. — Pp. 418–445.
128. Overarching framework for data-based modelling / B. Schelter [et al.] // *EPL.* — 2014. — Vol. 105. — P. 30004.
129. Choosing the optimal model parameters for Granger causality in application to time series with main timescale / M. V. Kornilov [et al.] // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2016. — Vol. 82. — Pp. 11–21. — DOI: [10.1016/j.chaos.2015.10.027](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.10.027).

130. Global vector-field reconstruction of nonlinear dynamical systems from a time series with SVD method and validation with Lyapunov exponents / W. Liu [et al.] // Chinese Physics. — 2003. — Vol. 12, no. 12. — Pp. 1366–1373.
131. Феномен уравнения ван дер Поля / А. П. Кузнецов [и др.] // Известия вузов. ПНД. — 2014. — Т. 22, № 4. — С. 3–42. — ISSN 0869-6632. — DOI: [10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42).
132. *Addoasah W., Akpati H., Mickens R.* Investigation of a generalized van der pol oscillator differential-equation // Journal of Sound and Vibration. — 1995. — Vol. 179, no. 4. — Pp. 733–735. — DOI: [10.1006/jsvi.1995.0048](https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0048).
133. *Kovacic I.* On the motion of a generalized van der Pol oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2011. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 1640–1649.
134. A generalization of the van-der-Pol oscillator underlies active signal amplification in Drosophila hearing / R. Stoop [et al.] // Eur Biophys J. — 2006. — Vol. 35, no. 6. — Pp. 511–516. — DOI: [10.1007/s00249-006-0059-5](https://doi.org/10.1007/s00249-006-0059-5).
135. *Kawahara T.* Coupled van der Pol oscillators – A model of excitatory and inhibitory // Biol. Cybern. — 1980. — Vol. 39. — P. 37.
136. *Linkens D., Taylor I., Duthie H.* Mathematical modeling of the colorectal myo-electrical activity in humans // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. — 1976. — Vol. BME-23, no. 3. — P. 101.
137. *Lucero J., Schoentgen J.* Modeling vocal fold asymmetries with coupled van der Pol oscillators // Proceedings of Meetings on Acoustics. — 2013. — Vol. 19. — P. 060165.

138. *Long G., Tubis A., Jones K.* Modeling synchronization and suppression of spontaneous otoacoustic emissions using Van der Pol oscillators: Effects of aspirin administration // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1991. — Vol. 89, no. 3. — P. 1201.
139. *Sysoeva M., Kuznetsova G., Sysoev I.* The modeling of rat EEG signals in absence epilepsy in the analysis of brain connectivity // *Biophysics (Russian Federation)*. — 2016. — Т. 61, № 4. — С. 661–669.
140. *Pikovsky A.* Reconstruction of a neural network from a time series of firing rates // *Phys. Rev. E.* — 2016. — Vol. 93. — P. 062313.
141. Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series / Y. I. Molkov [et al.] // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80. — P. 046207. — DOI: [10.1103/PhysRevE.80.046207](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.046207).
142. *Сысоев И. В., Пономаренко В. И.* Реконструкция матрицы связей ансамбля идентичных нейроподобных осцилляторов с запаздыванием в связи // *Нелинейная динамика*. — 2016. — Т. 12, № 4. — С. 567–576. — DOI: [10.20537/nd1604002](https://doi.org/10.20537/nd1604002).
143. Model-free inference of direct network interactions from nonlinear collective dynamics / J. Casadiego [et al.] // *Nature Communications*. — 2017. — Vol. 8. — P. 2192.
144. *Lauterborn W., Eick I.* Numerical investigation of a periodically driven laser with an intracavity saturable absorber // *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*. — 1988. — Vol. 5, no. 5. — Pp. 1089–1096.
145. *Kadmon J., Sompolinsky H.* Transition to Chaos in Random Neuronal Networks // *Phys. Rev. X.* — 2015. — Vol. 5, no. 4. — P. 041030. — DOI: [10.1103/PhysRevX.5.041030](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.041030).

146. *Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Pikovsky A.* Reconstruction of coupling architecture of neural field networks from vector time series // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2018. — Vol. 57. — Pp. 342–351. — DOI: [10.1016/j.cnsns.2017.10.006](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.10.006).
147. *Sysoev I. V.* Reconstruction of ensembles of generalized Van der Pol oscillators from vector time series // Physica D. — 2018. — DOI: [10.1016/j.physd.2018.07.004](https://doi.org/10.1016/j.physd.2018.07.004).
148. *Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Реконструкция ансамблей осцилляторов с нелинейными запаздывающими связями // Письма в ЖТФ. — 2018. — Т. 44, № 22. — С. 57–64. — DOI: [10.21883/PJTF.2018.22.46922.17479](https://doi.org/10.21883/PJTF.2018.22.46922.17479).
149. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 130–141. — DOI: [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2).
150. *Rössler O. E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. — 1976. — Vol. 57, no. 5. — Pp. 397–398.
151. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // Comm. Math. Phys. — 1976. — Vol. 50, no. 1. — Pp. 69–77.
152. *Заславский Г. М., Рачко Х.-Р. Я.* Особенности перехода к турбулентному движению // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1979. — Т. 76, № 6. — С. 2052–2064.
153. *Смирнов Д.* Выявление нелинейных связей между стохастическими осцилляторами по временным рядам // Известия вузов. ПНД. — 2010. — Т. 18, № 2. — С. 16–38. — DOI: [10.18500/0869-6632-2010-18-2-16-38](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-2-16-38).
154. *Dolan K. T., Neiman A.* Surrogate analysis of coherent multichannel data // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65. — P. 026108.

155. Fitting ordinary differential equations to chaotic data / E. Baake [et al.] // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45, no. 8. — Pp. 5524–5529.
156. *Bezruchko B. P., Smirnov D. A., Sysoev I. V.* Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock's algorithm) // Chaos, Solitons & Fractals. — 2006. — T. 29. — С. 82–90.
157. *Bjork A.* Solving Linear Squares Problem by Gram-Schmidt Orthogonalization // Math. Comp. — 1976. — Vol. 20. — Pp. 325–328.
158. *Голуб Д., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления: Пер. с англ. — Мир, 1999. — С. 548.
159. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // Lecture Notes in Math. — 1981. — Vol. 898. — Pp. 366–381.
160. Pathological tremor: deterministic chaos or nonlinear stochastic oscillators / J. Timmer [et al.] // Chaos. — 2000. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 278–288.
161. *Vlachos I., Kugiumtzis D.* Nonuniform state-space reconstruction and coupling detection // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82. — P. 016207.
162. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients / F. Mormann [et al.] // Physica D. — 2000. — Vol. 144, no. 3–4. — Pp. 358–369. — DOI: [10.1016/S0167-2789\(00\)00087-7](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00087-7).
163. *Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И.* Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // Известия вузов. ПНД. — 2010. — Т. 18, № 4. — С. 81–87. — DOI: [10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90).

164. *Сысоева М. В., Диканев Т. В., Сысоев И. В.* Выбор временных масштабов при построении эмпирической модели // Известия вузов. ПНД. — 2012. — Т. 20, № 2. — С. 54—62. — DOI: [10.18500/0869-6632-2012-20-2-54-62](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2012-20-2-54-62).
165. *Корнилов М. В., Безручко Б. П., Сысоев И. В.* Оптимальный подбор параметров прогностических моделей в методе нелинейной причинности по Грейнджеру в приложении к сигналам, характеризуемым хорошо выраженными временными масштабами // Нелинейная динамика. — 2014. — Т. 10, № 3. — С. 279—295. — DOI: [10.20537/nd1403003](https://doi.org/10.20537/nd1403003).
166. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Исследование эффективности метода нелинейной причинности по Грейнджеру в случае сильной синхронизации систем // Известия вузов. ПНД. — 2014. — Т. 22, № 4. — С. 66—75. — DOI: [10.18500/0869-6632-2014-22-4-66-76](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-66-76).
167. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Влияние выбора структуры модели на работоспособность метода нелинейной причинности по Грейнджеру // Известия вузов. ПНД. — 2013. — Т. 21, № 2. — С. 74—88. — DOI: [10.18500/0869-6632-2013-21-2-74-87](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2013-21-2-74-87).
168. Comparison of Linear Signal Processing Techniques to Infer Directed Interactions in Multivariate Neural Systems / M. Winterhalder [et al.] // Signal Processing. — 2005. — Vol. 85. — Pp. 2137–2160.
169. *Nalatore H., Ding M., Rangarajan G.* Mitigating the Effects of Measurement Noise on Granger Causality // Phys. Rev. E. — 2007. — Vol. 75. — P. 031123.
170. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Оценка работоспособности метода причинности по Грейнджеру для выявления однонаправленной связи при наличии общей внешней низкочастотной помехи // Нелинейная динамика. — 2017. — Т. 13, № 3. — С. 329—362. — DOI: [10.20537/nd1703004](https://doi.org/10.20537/nd1703004).

171. Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model / M. Syssoeva [et al.] // *J Neurosci Methods*. — 2014. — Vol. 226. — Pp. 33–41. — DOI: [10.1016/j.jneumeth.2014.01.028](https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2014.01.028).
172. Реконструкция однонаправленно связанных систем с запаздыванием первого порядка по временной реализации ведомой системы / Ю. В. Яхно [и др.] // *Изв. вузов. ПНД*. — 2011. — Т. 19, № 6. — С. 156–172.
173. *Yick J., Mukherjee B., Ghosal D.* Wireless sensor network survey // *Computer Networks*. — 2008. — Vol. 52, no. 12. — Pp. 2292–2330. — DOI: [10.1016/j.comnet.2008.04.002](https://doi.org/10.1016/j.comnet.2008.04.002).
174. Влияние интервала выборки на эффект ложной связи осцилляторов с различными параметрами собственных колебаний / С. Н. Крылов [и др.] // *Письма в ЖТФ*. — 2015. — Т. 41, № 11. — С. 94–102.
175. *Медведева Т. М., Парамонов Ф. Б., Сысоев И. В.* Эффект увеличения чувствительности метода причинности по Грейнджеру с ростом измерительного шума // *Нелинейная динамика*. — 2015. — Т. 11, № 4. — С. 657–670. — DOI: [10.20537/nd1604002](https://doi.org/10.20537/nd1604002).
176. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Реконструкция архитектуры связей в цепочке из трёх однонаправленно связанных систем методом причинности по Грейнджеру // *Письма в ЖТФ*. — 2018. — Т. 44, № 10. — С. 86–95.
177. Distinguishing Direct from Indirect Interactions in Oscillatory Networks with Multiple Time Scales / J. Nawrath [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 038701.
178. *Stramaglia S., Cortes J. M., Marinazzo D.* Synergy and redundancy in the Granger causal analysis of dynamical networks // *New Journal of Physics*. — 2014. — Vol. 16. — P. 105003.

179. EEG nonstationarity during intracranially recorded seizures: statistical and dynamical analysis / T. V. Dikanev [et al.] // *Clinical Neurophysiology*. — 2005. — Vol. 116. — Pp. 1796–1807.
180. *Schreiber T., Schmitz A.* Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77, no. 4. — Pp. 635–638. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.77.635](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.635).
181. Twin surrogates to test for complex synchronisation / M. Thiel [et al.] // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2006. — Vol. 75, no. 4. — P. 535.
182. *Judd K., Mees A.* Embedding as a modeling problem // *Physica D*. — 1998. — Vol. 120. — Pp. 273–286.
183. *Faes L., Nollo G., Porta A.* Information-based detection of nonlinear Granger causality in multivariate processes via a nonuniform embedding technique. // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 83. — P. 051112.
184. *Sysoev I. V., Sysoeva M. V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // *Physica D*. — 2015. — Vol. 309. — Pp. 9–19. — DOI: [10.1016/j.physd.2015.07.005](https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.07.005).
185. Evaluating causal relations in neural systems: Granger causality, directed transfer function and statistical assessment of significance / M. Kamiński [et al.] // *Biological Cybernetics*. — 2001. — Vol. 85, no. 2. — Pp. 145–157. — DOI: [10.1007/s004220000235](https://doi.org/10.1007/s004220000235).
186. Beta oscillations in a large-scale sensorimotor cortical network: Directional influences revealed by Granger causality / A. Brovelli [et al.] // *PNAS*. — 2004. — Vol. 101. — Pp. 9849–9854.
187. *Panayiotopoulos C. P.* Treatment of typical absence seizures and related epileptic syndromes // *Paediatric Drugs*. — 2001. — Vol. 3, no. 5. — Pp. 379–403. — DOI: [10.2165/00128072-200103050-00006](https://doi.org/10.2165/00128072-200103050-00006).

188. *Coenen A., van Luijtelaar G.* Genetic animal models for absence epilepsy: a review of the WAG/Rij strain of rats // *Behav Genetics*. — 2003. — Vol. 33. — Pp. 635–655. — DOI: [10.1023/A:1026179013847](https://doi.org/10.1023/A:1026179013847).
189. Spontaneous spike and wave discharges in thalamus and cortex in a rat model of genetic petit mal-like seizures / M. Vergnes [et al.] // *Experimental Neurololy*. — 1987. — Vol. 96. — Pp. 127–136.
190. *Marescaux C., Vergnes M., Depaulis A.* Genetic absence epilepsy in rats from Strasbourg - a review // *J. Neural. Transm. (suppl)*. — 1992. — Vol. 35. — Pp. 37–69. — DOI: [10.1007/978-3-7091-9206-1_4](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-9206-1_4).
191. *Depaulis A., van Luijtelaar G.* Genetic models of absence epilepsy in the rat // *Animal Models of Seizures and Epilepsy* / ed. by A. Pitkanen, P. Schwartzkroin, S. Moshe. — San Diego : Elsevier Inc, 2006. — Pp. 223–248.
192. Cortical focus drives widespread corticothalamic networks during spontaneous absence seizures in rats. *Journal of Neuroscience* / H. Meeren [et al.] // *ournal of Neuroscience*. — 2002. — Vol. 22. — Pp. 1480–1495.
193. Deep layer somatosensory cortical neurons initiate spike-and-wave discharges in a genetic model of absence seizures / P. Polack [et al.] // *Journal of Neuroscience*. — 2007. — Vol. 27. — Pp. 6590–6599. — DOI: [10.1523/JNEUROSCI.0753-07.2007](https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.0753-07.2007).
194. *Sitnikova E., van Luijtelaar G.* Cortical and thalamic coherence during spike-wave seizures in WAG/Rij rats // *Epilepsy Research*. — 2006. — Vol. 71. — Pp. 159–180.
195. Identifying neural drivers with functional MRI: an electrophysiological validation / O. David [et al.] // *PLoS Biology*. — 2008. — Vol. 6. — Pp. 2683–2697.

196. *Lüttjohann A., Stoffelen J. M., van Luijtelaar G.* Peri-ictal network dynamics of spike-wave discharges: Phase and spectral characteristics // *Experimental Neurology*. — 2012. — Vol. 239. — Pp. 235–247.
197. Granger causality: cortico-thalamic interdependencies during absence seizures in WAG/Rij rats / E. Sitnikova [et al.] // *J Neurosci Methods*. — 2008. — Vol. 170, no. 2. — Pp. 245–254. — DOI: [10.1016/j.jneumeth.2008.01.017](https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2008.01.017).
198. Increases in the power spectral slope of background electroencephalogram just prior to asymmetric spike and wave complexes in epileptic patients / T. Inouye [et al.] // *Neuroscience Letters*. — 1994. — Vol. 173, no. 1–2. — Pp. 197–200.
199. *Gupta D., Ossenblok P., van Luijtelaar G.* Space-time network connectivity and cortical activations preceding spike wave discharges in human absence epilepsy: a MEG study // *Medical & Biological Engineering & Computing*. — 2011. — Vol. 49. — Pp. 555–565.
200. Spike-wave discharges in WAG/Rij rats are preceded by delta and theta precursor activity in cortex and thalamus / G. van Luijtelaar [et al.] // *Clin Neurophysiol*. — 2011. — Vol. 122, no. 4. — Pp. 687–695. — DOI: [10.1016/j.clinph.2010.10.038](https://doi.org/10.1016/j.clinph.2010.10.038).
201. *Lüttjohann A., van Luijtelaar G.* The dynamics of cortico-thalamo-cortical interactions at the transition from pre-ictal to ictal LFPs in absence epilepsy // *Neurobiology of Disease*. — 2012. — Vol. 47. — Pp. 47–60.
202. Seizure prediction: the long and winding road / F. Mormann [et al.] // *Brain*. — 2007. — Vol. 130, no. 2. — Pp. 314–333.
203. *Paxinos G., Watson C.* *The Rat Brain in Stereotaxic Coordinates*, 6th Edition. — San Diego : Academic Press, 2006.

204. *van Luijtelaar E. L. J. M., Coenen A. M.* Two types of electrocortical paroxysms in an inbred strain of rats // *Neuroscience Letters*. — 1986. — Vol. 70. — Pp. 393–397.
205. A new method for automatic marking epileptic spike-wave discharges in local field potential signals / S. A. Startceva [et al.] // *Proceedings of SPIE*. — 2015. — Vol. 9448. — 1R. — DOI: [10.1117/12.2179017](https://doi.org/10.1117/12.2179017).
206. *Wang C. W.* *Nonlinear Phenomena Research Perspectives*. — New York : Nova Science Publishers, 2007. — Pp. 7–53.
207. *Koutlis C., Kugiumtzis D.* Discrimination of coupling structures using causality networks from multivariate time series // *Chaos*. — 2016. — Vol. 26. — P. 093120. — DOI: [10.1063/1.4963175](https://doi.org/10.1063/1.4963175).
208. *Sander J. W.* The epidemiology of epilepsy revisited // *Current Opinion in Neurology*. — 2003. — Vol. 16. — Pp. 165–170.
209. Epileptic Seizures and Epilepsy: Definitions Proposed by the International League Against Epilepsy (ILAE) and the International Bureau for Epilepsy (IBE) / R. S. Fisher [et al.] // *Epilepsia*. — 1999. — Vol. 46, no. 4. — Pp. 470–472.
210. *McNamara J. O.* Emerging insights into the genesis of epilepsy // *Nature*. — 1999. — Vol. 399. — Pp. 15–22.
211. *Buzsáki G.* *Rhythms of The Brain*. — London : Oxford University Press, 2006. — DOI: [10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001).
212. *Fell J., Axmacher N.* The role of phase synchronization in memory processes // *Nature Reviews Neuroscience*. — 2011. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 105–118.

213. Machine Detection of Spike-Wave activity in the EEG and its Accuracy Compared with Visual Interpretation / J. W. Whisler [et al.] // *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. — 1982. — Vol. 54. — Pp. 541–551.
214. *van Luijtelaar G., Sitnikova E., Lüttjohann A.* On the origin and suddenness of absences in genetic absence models // *Clinical EEG and Neuroscience*. — 2011. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 83–97.
215. *Lüders H., Noachtar S.* Atlas of Epileptic Seizures and Syndromes. — Elsevier Science, Health Science Division, 2001. — P. 204.
216. *Sartoretto F., Ermani M.* Automatic detection of epileptiform activity by single-level wavelet analysis // *Clinical Neurophysiology*. — 1999. — Vol. 110. — Pp. 239–249.
217. *Kalayci T., Özdamar Ö.* Wavelet Preprocessing for Automated Neural Network Detection of EEG Spikes // *IEEE Engineering in Medicine and Biology*. — 1995. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 160–166.
218. An algorithm for real-time detection of spike-wave discharges in rodents / A. Ovchinnikov [et al.] // *Journal of Neuroscience Methods*. — 2010. — Vol. 194, no. 1. — Pp. 172–178.
219. Real-time detection of epileptic seizures in animal models using reservoir computing / P. Buteneers [et al.] // *Epilepsy Research*. — 2013. — Vol. 103. — Pp. 124–134.
220. *Coenen A. M. L., van Luijtelaar E. L. J. M.* Genetic animal models for absence epilepsy: a review of the WAG/Rij strain of rats // *Behav. Genetics*. — 2003. — Vol. 33. — Pp. 635–655.
221. *Buhmann M. D.* Radial Basis Functions: Theory and Implementations (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). — Cambridge University Press, 2003. — P. 272.

222. *Tan P. N., Steinbach M., Kumar V.* Introduction to Data Mining. — Addison-Wesley, 2005. — P. 769.
223. *McQuarrie A. D. R., Tsai C. L.* Regression and time series model selection. — World Scientific, 1998. — P. 455.
224. *Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // Письма в ЖТФ. — 2012. — Т. 38, № 3. — С. 103–110.
225. *Bartlett M. S.* Smoothing Periodograms from Time-Series with Continuous Spectra // Nature. — 1948. — Vol. 161. — Pp. 686–687.
226. *Maris E., Oostenveld R.* Nonparametric statistical testing of EEG and MEG-data // J. Neurosci. Methods. — 2007. — Vol. 164, no. 1. — Pp. 177–90.
227. A report: The definition and classification of cerebral palsy April 2006 / P. Rosenbaum [et al.] // Developmental Medicine & Child Neurology. — 2007. — Vol. 49. — Pp. 8–14.
228. Анализ связей между отведениями электроэнцефалограмм крыс до и во время эпилептического припадка с помощью предсказательных моделей / М. В. Сысоева [и др.] // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2013. — 1(1). — С. 73–78.
229. Analysing coupling architecture in the cortical EEG of a patient with unilateral cerebral palsy / M. V. Kornilov [et al.] // Proceedings of SPIE. — 2016. — Vol. 9917. — P. 991729. — DOI: [10.1117/12.2229781](https://doi.org/10.1117/12.2229781).
230. *Wiener N.* The theory of prediction // Modern Mathematics for the Engineer / ed. by E. F. Beckmann. — New York : McGraw-Hill, 1956.
231. Time-series-based prediction of complex oscillator networks via compressive sensing / W.-X. Wang [et al.] // Europhys. Lett. — 2011. — Vol. 94. — P. 48006. — DOI: [10.1209/0295-5075/94/48006](https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/48006).

232. *Lüttjohann A., van Luijtelaar G.* The dynamics of cortico-thalamo-cortical interactions at the transition from pre-ictal to ictal LFPs in absence epilepsy // *Neurobiology of Disease*. — 2012. — Vol. 47. — Pp. 47–60. — DOI: [10.1016/j.nbd.2012.03.023](https://doi.org/10.1016/j.nbd.2012.03.023).
233. Extraction of Network Topology From Multi-Electrode Recordings: Is there a Small-World Effect? / F. Gerhard [et al.] // *Front Comput Neurosci*. — 2011. — Vol. 5. — P. 4. — DOI: [10.3389/fncom.2011.00004](https://doi.org/10.3389/fncom.2011.00004).
234. *Porta A., Faes L.* Wiener-Granger Causality in Network Physiology with Applications to Cardiovascular Control and Neuroscience // *Proceedings of the IEEE*. — 2016. — Vol. 104, no. 2. — P. 7347340. — DOI: [10.1109/JPROC.2015.2476824](https://doi.org/10.1109/JPROC.2015.2476824).
235. Dynamics of directional coupling underlying spike-wave discharges / M. Sysoeva [et al.] // *Neuroscience*. — 2016. — Vol. 314. — Pp. 75–89. — DOI: [10.1016/j.neuroscience.2015.11.044](https://doi.org/10.1016/j.neuroscience.2015.11.044).
236. Changes in corticocortical and corticohippocampal network during absence seizures in WAG/Rij rats revealed with time varying Granger causality / M. Sysoeva [et al.] // *Epilepsy and Behavior*. — 2016. — Vol. 64. — Pp. 44–50. — DOI: [10.1016/j.yebeh.2016.08.009](https://doi.org/10.1016/j.yebeh.2016.08.009).
237. *Sysoeva M., Sitnikova E., Sysoev I.* Thalamo-cortical mechanisms of initiation, maintenance and termination of spike-wave discharges at WAG/Rij rats // *Zh Vyssh Nerv Deiat Im I P Pavlova*. — 2016. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 103–112.
238. *Mokhov I. I., Smirnov D. A.* El Niño — Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophysical Research Letters*. — 2006. — Vol. 33. — P. L03708. — DOI: [10.1029/2005GL024557](https://doi.org/10.1029/2005GL024557).

239. Nonlinear interactions between the Amazon River basin and the Tropical North Atlantic at interannual timescales / A. Builes-Jaramillo [et al.] // *Climate Dynamics*. — 2018. — Vol. 50, no. 7–8. — Pp. 2951–2969.

Благодарности

Автор благодарен всем своим коллегам по лаборатории СФ-6 Саратовского филиала Института радиотехники и электроники и по кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ имени Н.Г. Чернышевского, многие из которых внесли значимый вклад в данную работу. А именно, профессору, ведущему научному сотруднику Владимиру Ивановичу Пономаренко, взявшемуся помогать с оформлением этой работы и значительно обогатившему её как идейно, так и благодаря своим техническим навыкам. Без него эта работа не стала бы подлинно радиофизической. Борису Петровичу Безручко, поддерживавшему автора во многих начинаниях, особенно на ранней стадии работы, и не раз помогавшему с написанием статей по теме диссертации. Михаилу Дмитриевичу Прохорову, чья научная и организационная поддержка всегда была существенна, человеку, умеющему довести начатое дело до конца. Максиму Вячеславовичу Корнилову, выполнившему большой объём работы в рамках совместных исследований и с которым вместе мы прошли много этапов научного взросления. Профессору Потсдамского университета, ученику нижегородской радиофизической школы и живому классику Аркадию Самуиловичу Пиковскому, сотрудникам СФ ИРЭ РАН Данилу Дмитриевичу Кульминскому, Анатолию Сергеевичу Караваеву как и моим дипломникам Павлу Наконечному, Фёдорову Парамонову, Софии Старцевой, Татьяне Медведевой (Головой) как соавторам работ.

Моя благодарность моим зарубежным коллегам–нейрофизиологам из Неймегена и Мюнстера: профессору Жилю ван Луйтелаара, доктору Клементине ван Рейн, доктору Аннике Люттйоханн, а также и доктору, ведущему научному сотруднику Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН Евгении Юрьевне Ситниковой, внесшим большой вклад в практическую направленность этой работы. Они все мне очень мне дороги.

Я признателен также многим другим людям, поддерживавшим меня на

протяжении моей научной и преподавательской жизни, в том числе д.ф.-м.н., зам. директора СФ ИРЭ РАН и моему зав. кафедрой Евгению Петровичу Селезнёву и главному научному сотруднику ИВНДиН РАН, д.б.н. Галине Дмитриевне Кузнецовой, безвременно покинувшей нас в 2017 году, за практическую помощь, глубокие знания, которыми они всегда делились, и неиссякаемый жизненным оптимизм, а также многим другим хорошим людям, с которыми меня свела судьба.

Так получилось, что жизнь несколько раз сводила меня с замечательным человеком и большим учёным — Дмитрием Ивановичем Трубецковым: когда я поступил в Лицей прикладных наук в 1995 впервые, затем, когда стал преподавать в университете в 2005 на его кафедре, и в третий раз, когда в 2014 принял его приглашение стать ответственным секретарём редколлегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», где не раз публиковался до этого. Я признателен ему за помощь, которую он оказал и оказывает мне и моим товарищам своим умом и благодаря своим обширным научным контактам.

Наибольшую признательность выражаю своей супруге Марине, без которой эта работа не была бы возможна, помогавшей мне во всём и сделавшей мою жизнь значительно лучше. В значительной степени благодаря ей мне вновь удалось найти себя в науке и ей я непосредственно обязан примерно половиною приведённых результатов. Её постоянная помощь и поддержка рядом были для меня неоценимы.

Эту работу я посвящаю нашим детям: Родиону, Фёдору и Григорию.