

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ  
ИМ. В.А. КОТЕЛЬНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

---

На правах рукописи



НЕДОСПАСОВ Илья Александрович

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОБРАТНЫХ И ПРЯМЫХ  
АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ  
ПЛАСТИНАХ И СТРУКТУРАХ НА ИХ ОСНОВЕ**

Специальность 01.04.07 – «Физика конденсированного состояния»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д. физ.-мат. наук, доцент.  
И.Е. Кузнецова

Москва 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЛЭМБА В ПЛАСТИНАХ .....</b>	<b>21</b>
§ 1. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ .....	21
§ 2. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА.....	25
§ 3. АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ .....	29
§ 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБРАТНЫХ ВЫТЕКАЮЩИХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЛЭМБА .....	31
РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1 .....	45
<b>ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ.....</b>	<b>47</b>
§ 1. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЧИСТО СДВИГОВЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ НИОБАТА КАЛИЯ Y- И X- СРЕЗОВ .....	47
§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ .....	59
§ 3. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН .....	66
§ 4. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ .....	72
РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2 .....	85

**ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ** **ЛОКАЛИЗОВАННЫХ**  
**АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ....87**

*§ 1. ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМОГО ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ..... 87*

*§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА  
ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВО И КЛИН  
.....95*

*§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В  
УСЕЧЕННОМ КЛИНЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ТРЕХ СРЕД..... 101*

*§ 4. ОБРАТНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ НА КРАЮ ПЛАСТИНЫ И В С  
СИСТЕМЕ ИЗ ТРЕХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД ..... 107*

*РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3 ..... 111*

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ  
РАБОТЫ .....113**

**СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ .....117**

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....119**

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время в различных областях волновой физики особое внимание уделяется изучению волн с противоположно направленными фазовой и групповой скоростями [1, 2]. Такие волны в литературе принято называть обратными. Интерес к этим волнам связан, в том числе, с появлением композитных и периодических метаматериалов. Основной особенностью подобных сред помимо присутствия в спектре частотных полос с запрещенной зоной, является наличие в них таких диапазонов, при которых волны в среде могут иметь отрицательные коэффициенты преломления. Исследование волновых процессов в подобных материалах представляет фундаментальный, и практический интерес. В данной работе речь будет идти о волновых явлениях в упругих, пьезоэлектрических, анизотропных пластинах и клиновидных структурах. Такие пластины не являются композитами, и не содержат в себе периодических структур. Тем не менее, в данных материалах присутствуют частотные диапазоны с разнонаправленными фазовыми и групповыми скоростями.

Хотя волнам Лэмба уже более ста лет и их спектр широко известен в научной литературе, но на существование частотных диапазонов с противоположным направлением фазовой и групповой скоростей впервые обратили внимание только в 1957 г [3]. С тех пор обратные волны Лэмба широко исследовались экспериментально и теоретически как в изотропных, анизотропных и пьезоэлектрических пластинах (см., в частности, статьи [4-18] и цитированные в них работы), так и в многослойных структурах [19, 20], фононных кристаллах [21, 22], трубах, оболочках и полых цилиндрах [23 - 28]. Были аналитически и численно оценены величины материальных постоянных изотропных пластин, при которых возможно существование обратных волн высших порядков [7, 10]. Было аналитически показано, что наличие сложных вогнутостей на поверхности медленности может вносить определяющий вклад в значительное уширение частотных диапазонов существования обратных волн Лэмба [10]. На основании проведенных

исследований был сделан вывод, что необходимым условием существования обратных волн Лэмба является взаимодействие как минимум двух волн с различной поляризацией на границах пластины. Другим условием существования обратных волн Лэмба является присутствие вогнутостей на сечении поверхности медленности объемных волн в перпендикулярной оси относительно направления распространения обратной волны.

Обратные волны возникают не только в спектрах волн Лэмба, но и в спектрах чисто сдвиговых мод в пьезоэлектрических пластинах, притом, что в случае отсутствия пьезоэффекта последние волны не существуют. Следует отметить, что сдвиговые волны в пьезоэлектрических пластинах к настоящему времени мало изучены. В известных работах [29-31] эти волны исследованы для высокосимметричных кубических кристаллов. Что касается кристаллов других симметрий, то такие работы практически отсутствуют. Существует работа [32], в которой частично рассмотрены обратные акустические волны в ниобате калия.

В последнее время большой интерес исследователей вызывает такой материал как ниобат калия, обладающий необычайно сильным пьезоэффектом. Следует отметить, что сдвиговые волны в этом материале характеризуются высоким коэффициентом электро-механической связи. Ранее было показано, что обратные чисто сдвиговые волны существуют в гексагональных пьезопластинах, но только для семейства антисимметричных мод [29], а в кубических пьезопластинах – как для антисимметричных, так и для симметричных [30]. Поэтому представляет большой интерес проанализировать механизмы возникновения обратных чисто сдвиговых волн, например, на основе асимптотического разложения дисперсионных соотношений. Также интересно численно оценить диапазоны существования обратных чисто сдвиговых волн для случая кристалла с более низкой симметрией. Особый интерес представляет наблюдение за уширением частотного диапазона существования этих волн

при повышении номера мод и возможного образования их сплошного спектра.

Следует отметить, что пристальное внимание исследователей привлекают вопросы, связанные с волнами у которых групповая скорость равна нулю [16, 17]. Существование таких волн обусловлено наличием участков в спектрах мод пластин, как с отрицательной, так и с положительной групповой скоростью. Таким образом, из-за непрерывности кривых должна существовать точка перехода, в которой значение скорости переноса энергии равно нулю ( $ZGV$ ), а фазовая скорость волны при этом имеет конечное значение. Была продемонстрирована возможность возбуждения волны Лэмба с нулевой групповой скоростью в мембране AlN толщиной 2.5 мкм на частоте 2 ГГц [17].

Важным аспектом экспериментального исследования обратных акустических волн является проблема их возбуждения и регистрации. Наряду с фундаментальным интересом данный вопрос имеет и практическое значение. Как показано в [17] существует возможность создания резонатора нового типа на основе обратных акустических волн. Очевидно, что при возбуждении на определенной частоте обратной моды можно получить волну с нулевой групповой скоростью. Таким образом, энергия волны будет концентрироваться по толщине пластины в области возбуждающего преобразователя, что приведет к новым возможностям создаваемого устройства. Однако для реализации таких устройств необходимо создавать пространственно-временной синхронизм с большой точностью. Это связано с тем, что частотный диапазон существования обратных волн достаточно невелик, и необходимо иметь возможность тонкой подстройки частоты при фиксированном значении толщины пластины.

В настоящее время существует несколько способов возбуждения обратных акустических волн. В изотропных пластинах обратные волны Лэмба могут возбуждаться при помощи лазера. В результате нагрева

лазерным излучением приповерхностного слоя возникают нестационарные термоупругие напряжения, приводящие к возбуждению как прямых, так и обратных акустических волн [18, 33-35]. При помощи этого метода возможно получение отрицательного отражения и фокусировка волн на обратных модах Лэмба, что было использовано для создания акустической суперлинзы [18,35].

Существуют работы, в которых показано, что акустические волны в пластинах можно исследовать с помощью метода пространственной модуляции света (SLM) [36]. В этом случае акустические волны возбуждаются лазерными импульсами, изображенными на поверхности пластины в виде регулярных линий. Этот метод позволяет возбуждать прямые и обратные акустические волны, соответствующие точкам на дисперсионных кривых, включая моды Лэмба с нулевой групповой скоростью [37, 38].

Акустические волны в непьезоэлектрических пластинах могут быть также возбуждены методом клина. В этом случае пьезоэлектрический излучатель размещается в верхней части клина, помещенного на поверхность пластины. Пьезоизлучатель возбуждает объемные акустические волны, проходящие через клин в пластину. В результате на поверхности пластины возникают упругие напряжения, которые приводят к возникновению акустической волны. Варьируя углы клина можно менять проекцию волнового числа на поверхность образца, что позволяет эффективно возбуждать как прямые, так и обратные акустические волны в непьезоэлектрических пластинах [13, 39].

Следует отметить, что при использовании вышеописанного метода клинового возбуждения волн важным моментом является обеспечение хорошего акустического контакта между клином и пластиной. В связи с этим как теоретически, так и экспериментально многие работы исследуют обратные волны в пластинах, погруженные в жидкость [40-46]. Как известно, толщинные резонансы являются точками зарождения обратных

акустических волн. В связи с этим фазовая скорость данных волн может достигать очень больших величин. В случае контакта с жидкостью это приводит к излучению энергии волны в ее объем. Известно, что утекающие волны Лэмба в пластинах характеризуются комплексными волновыми числами. Это приводит в общем случае к неравенству групповой скорости и скорости переноса энергии. Отсюда следует, что применение формулы для расчета групповой скорости акустических волн утечки корректно только при небольших значениях их затухания. Несмотря на несколько попыток анализа утекающих обратных волн Лэмба, до сих пор не проводилось никаких исследований их энергетических характеристик, хотя эти свойства принадлежат к наиболее фундаментальным особенностям для волн любой природы. В связи с вышесказанным для анализа групповой скорости волн утечки предлагалось использовать другие методы. К ним относится анализ потоков энергии волн утечки в пластине и жидкости [47], а также анализ сдвига фазы прошедшей волны через пластину, погруженную в жидкость [41].

Очевидно, что для возбуждения обратных акустических волн в пьезоэлектрических пластинах можно использовать встречно-штыревые преобразователи (ВШП). Основным вопросом при данном способе возбуждения является доказательство возбуждения именно обратной волны. В общем случае ВШП излучает акустическую волну в обе стороны и задача фиксации противоположно направленных фазовой и групповой скоростей в этом случае является нетривиальной. Одним из способов регистрации именно обратной акустической волны является исследование ее распространения в пьезопластине, находящейся в контакте с полупроводниковым слоем. Этот слой формирует продольный поток зарядов и, соответственно, акустоЭДС. Зная знак акустоЭДС и тип носителей заряда можно однозначно определить направление групповой скорости [48].

Как известно, изменение электрических граничных условий на поверхности пьезоэлектрических пластин, приводит к существенному изменению характеристик акустических волн (скорость, затухание и т.д) [49-51]. Однако, работы, посвященные исследованию влияния электрических граничных условий на свойства обратных акустических волн – отсутствуют. Хотя данные исследования очень важны при создании различных сенсоров, основанных на данном типе волн.

Акустические волноводы в целом нашли широкое применение в различных областях науки и техники [52]. Они также активно применяются в сейсмике и геофизической разведке [53, 54]. Их присутствие влияет на рассеяние объемных волн, и поэтому знание о них требуется, даже если они непосредственно не используются в сейсмических исследованиях. Начиная с шестидесятых годов акустические волны, используются в устройствах обработки сигналов и различных типах датчиков [55], и они играют все более важную роль в неразрушающем контроле [56]. Очевидными преимуществами использования волноводных мод вместо объемных акустических волн в этих приложениях является отсутствие (или, по крайней мере, сильное снижение) дифракционных потерь и повышенная чувствительность к геометрическим особенностям и конкретным видам дефектов в зависимости от характера смещения волноводных мод, которые, как правило, гораздо сложнее, чем у объемных волн. Эффективное использование волноводных акустических мод в технических приложениях требует знания их свойств.

Акустические волноводы в твердых телах и жидкостях могут быть классифицированы различными способами, например, в отношении их размерности. Поле деформации, связанное с волноводной модой, может быть ограничено вдоль одного пространственного направления, но в оставшихся двух направлениях волновод демонстрирует инвариантность. Поэтому акустические волны, распространяющиеся в таком волноводе, представляют собой суперпозиции «элементарных волн», которые имеют

характер плоских волн с двухкомпонентными волновыми векторами относительно их зависимости от координат в плоскости поступательной инвариантности. Такие волны мы будем называть двумерными модами (2D). В отличие от этого случая, мы будем использовать термин одномерные (1D) для волноводных мод, которые имеют поле деформации, ограниченное в двух пространственных измерениях в волноводе с поступательной инвариантностью вдоль третьего направления. Такие одномерные волноводные моды могут быть разложены на «элементарные волны», характеризующиеся одномерным волновым вектором. Второй способ классификации волноводных акустических мод приводит к следующим двум группам. Первая группа состоит из волн с соответствующими полями деформации, которые заполняют всю структуру твердое тело/жидкость, которая сама по себе пространственно ограничена. Она охватывает большинство акустических волн в стержнях, трубах и пластинах. Ко второй группе принадлежит структура, в которой распространяются волны, бесконечно вытянута в одном или обоих пространственных направлениях, ортогональных к направлению распространения волноводных мод, и поле смещения, связанное с этими волнами, экспоненциально уменьшается до нуля вдоль этого направления. Простейшими двумерными примерами такого вида волноводных мод являются волны Рэлея, распространяющиеся на поверхности однородного полупространства, или волны Стоунли, локализованные на границе раздела двух твердых упругих сред. Клиновые акустические волны, локализованные на конце бесконечного упругого клина, являются одномерными примерами такого рода. Такие системы также допускают возникновение вытекающих волн, которые излучают энергию в упругую среду вдали от волновода, и их амплитуда уменьшается вдоль направления распространения в результате этой потери энергии. Акустические клиновые волны утечки были впервые обнаружены в однородных анизотропных клиньях в экспериментах с лазерным ультразвуком [57], и недавно было обнаружено, что в численном

моделировании они также существуют в клиньях, сделанных из двух изотропных материалов.

Недавно было показано, что одномерные акустические волны существуют на линии пересечения общей границы раздела и поверхности двух четверть пространств. Они были названы волнами Рэлея-Стоунли [58]. В то время как в изотропных средах волны Рэлея существуют для всех физических значений коэффициента Пуассона, волны Стоунли не существуют для всех комбинаций констант Ламе и плотностей двух соседних сред. Для двух пуассоновских сред (т.е. изотропных упругих сред с двумя равными их константами Ламе) Шолте [59] определил область их существования в двумерном пространстве параметров. В [58] было обнаружено, что область существования одномерных волн Рэлея-Стоунли, распространяющихся на интерфейсе двух четвертьпространств, является небольшим подмножеством области существования волн Стоунли. Важно исследовать существование и свойства одномерных волноводных акустических мод в геометрии, в которых граница раздела между двумя связанными упругими средами больше не является вертикальной по отношению к поверхности. Второе обобщение системы заключается в контакте двух клиньев с одинаковыми углами.

В своих исследованиях акустических волн в работе [60] авторы статьи ослабили граничные условия «сварного контакта» на границе раздела между двумя четвертьпространствами и ввели жесткости границы раздела. Это расширяет область существования одномерных волноводных акустических мод. Было обнаружено, что они существуют даже для четвертьпространств из одинаковых материалов. Также такие граничные условия делают моды дисперсионными.

Для клиновидных систем, состоящих из нескольких сред, были проведены численные поиски одномерных волноводных акустических мод, распространяющихся вдоль направления  $x$ . Цель этого поиска состоит в том, чтобы найти такие волны и исследовать их свойства, например, для

области неразрушающего контроля и геофизики. Волноводные моды систем, рассмотренных в третьей главе, могут, по меньшей мере, частично рассматриваться как обобщения клиновых акустических волн, то есть акустических волн, направляемых линией вершины однородного усеченного упругого клина. Теоретический метод, который мы используем для наших целей, - это, по существу, один из тех, который применялся уже при открытии и ранних исследованиях клиновых волн, а именно полуаналитический метод конечных элементов (FEM) [61,62]. Другой подход, используемый при первом их описании, основывался на разложении поля смещений в двойной ряд специальных функций, особенно подходящих для рассматриваемой геометрии [63-65]. Вычислительные методы были доработаны и адаптированы к системам, рассмотренным здесь для расчетов. В частности, они были расширены, чтобы включить источник, который упрощает поиск вытекающих волн. Комплексное исследование вытекающих волн в этих системах может быть основано на случайных источниках, описанных в [66].

Альтернативными подходами к обсуждаемым здесь являются теоретико-дифракционные методы, используемые для анализа рассеяния акустических волн на клинообразных структурах (см., например, [67, 68] и другие ссылки в [69]). Как и в случае акустических клиновых волн (см., например, обзоры [70, 71]), аналитические результаты для полей смещений и фазовой скорости волноводных мод, как ожидается, будут достижимы только с помощью сильных приближений. Для клиновых волн строгие доказательства существования были даны для изотропных сред и некоторых анизотропных конфигураций в [72-74]. Эти авторы применили вариационный принцип к тестовым функциям, полученным из выражений для полей смещений поверхностных акустических волн. Этот подход, возможно, может быть распространен на более сложные системы. Однако с ростом сложности тестовых функций будет трудно, если не невозможно,

получить аналитические результаты для границ существования в пространстве параметров и использовать численный подход.

## **ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Целью диссертационной работы является аналитическое, численное и экспериментальное исследование прямых и обратных акустических волн различных типов в изотропных и анизотропных пластинах и клиновидных структурах.

## **ЗАДАЧИ РАБОТЫ**

1. Теоретическое и экспериментальное исследование обратных акустических волн Лэмба в пьезоэлектрических пластинах.
2. Анализ энергетических характеристик вытекающих обратных волн Лэмба в изотропных пластинах и структурах на их основе с помощью численных и аналитических методов.
3. Теоретическое исследование вопроса о возникновении и существовании чисто сдвиговых обратных акустических волн в пьезоэлектрических пластинах на основе асимптотического разложения дисперсионных соотношений.
4. Теоретическое исследование влияния различных электрических граничных условий на характеристики обратных сдвиговых акустических волн в пьезоэлектрических пластинах.
5. Теоретическое исследование возбуждения и распространения локализованных акустических мод в волноводах сложной формы.

## **НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ**

1. Впервые предложен и экспериментально верифицирован новый способ детектирования обратных акустических волн в пьезоэлектрических пластинах, основанный на использовании набора

- встречно-штыревых преобразователей с различным пространственным периодом, расположенных на общей подложке.
2. Впервые теоретически установлено необычное свойство энергетических характеристик вытекающих обратных волн Лэмба в изотропных пластинах, погруженных в жидкость, заключающееся в равенстве нулю интегрального усредненного потока энергии.
  3. Теоретически исследован вопрос о существовании чисто сдвиговых обратных волн в пластинах ромбического кристалла ниобата калия. Впервые проведен теоретический анализ сдвиговых волн в пьезоэлектриках на основе асимптотического разложения дисперсионных соотношений. Показано, что главными механизмами возникновения обратных волн являются кривизна поверхности медленности и отрицательный сдвиг фазы отраженной от границы волны.
  4. Теоретически исследовано влияние электрических граничных условий на распределение электрического потенциала по толщине пьезоэлектрической пластины для обратных и прямых сдвиговых волн в пластине из ниобата калия. Впервые показано, что изменением проводимости бесконечно тонких слоев, находящихся на поверхностях пластины, вышеуказанное распределение может быть изменено в пределах 90%.
  5. Теоретически исследованы локализованные акустические моды в волноводах сложной формы состоящих из нескольких сред. Установлены диапазоны существования локализованных акустических волн в пространстве материальных параметров. Впервые показано, что в данных структурах присутствуют обратные акустические волны.

## **НАУЧНАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ**

Работа направлена на теоретическое и экспериментальное исследование характеристик прямых и обратных акустических волн, распространяющихся в изотропных и анизотропных пластинах и структурах, а также в волноводах сложной формы. Научная значимость исследования характеристик обратных волн заключается в получении новых фундаментальных знаний об особенностях волновых процессов в твердых телах и сложных структурах, в том числе характеризующихся уникальными физическими характеристиками. Практическая значимость работы заключается в возможности разработки различных устройств обработки сигналов и сенсоров, характеризующихся повышенной эффективностью и чувствительностью, расширенным частотным диапазоном и улучшенной селективностью. Эти волны могут также использоваться в широко распространённых методах неразрушающего контроля. В ходе работы подробно исследовался вопрос о существовании волн в описанных системах, выявление факторов, к которым они наиболее чувствительны, а также вопрос их возбуждения.

## **ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ**

1. Обратные акустические волны возбуждаются и детектируются при помощи системы из резонаторов на основе встречно-штыревых преобразователей с различным пространственным периодом, расположенных на одной пьезоэлектрической подложке. Данный новый способ реализован в устройстве для возбуждения и детектирования  $A_1$  волны Лэмба в  $YX$  пластине ниобата лития.
2. Усредненный по времени интегральный поток энергии вытекающих обратных волн Лэмба в изотропных пластинах, находящихся в контакте с жидкостью равен нулю. Определение скорости переноса

энергии в случае обратных вытекающих волн Лэмба возможно на основе ограничения области интегрирования только толщиной пластины.

3. Основными механизмами возникновения чисто сдвиговых обратных акустических волн в пьезоэлектрических пластинах являются отрицательная кривизна поверхности медленности объемных сдвиговых волн и отрицательный сдвиг их фазы при отражении волны от границы пластины с вакуумом.
4. Распределение электрического потенциала прямых и обратных акустических сдвиговых волн внутри пьезоэлектрической пластины изменяется путем варьирования проводимости бесконечно тонких слоев, находящихся на поверхностях пластины. В пластине  $YX$   $KNbO_3$  изменение проводимости слоев на ее поверхностях от  $10^{-6}$  до  $10^{-3}$  См/м позволяет управлять распределением электрического поля вышеуказанных волн в пределах до 90%.
5. Акустические локализованные моды существуют в волноводах в виде полупространства состоящего из двух клиньев с общей наклонной границей (i), в клине, состоящем из двух сред (ii) и в волноводах в виде усеченного клина состоящих из трех сред (iii). Область существования в пространстве материальных параметров для случаев пуассоновских сред уменьшается с увеличением угла наклона в волноводах (i) и (ii). В спектрах волноводов в виде края из искусственного каучука с жесткими границами и того же края, граничащего с двумя четверть пространствами из оргстекла, существуют частотные диапазоны, соответствующие обратным акустическим волнам.

## **АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ**

Результаты проведенных исследований докладывались на ряде научных конференций, в число которых входят:

Конкурс молодых ученых имени Ивана Анисимкина ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН (2014, 2016, 2018, Москва, Россия), Days on Diffraction (2017, St. Petersburg, Russia), Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» имени А.П. Сухорукова (2016, Можайск, Россия), 2016 IEEE International Ultrasonics Symposium (2016, Tours, France), 2017 IEEE International Ultrasonics Symposium (2017, Washington, D.C., USA), 2017 EFTF and IEEE International Frequency Control Symposium (2017, Besançon, France), 2018 IEEE International Ultrasonics Symposium (2018, Kobe, Japan), сессия Российского акустического общества (2017, Нижний Новгород, Россия), всероссийская научная конференция молодых ученых «нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика» (2015, Саратов, Россия), International Conference for Young Researches «Wave Electronics and Its Applications in the Information and Telecommunication» (2017, St. Petersburg, Russia), семинар кафедры акустики физического факультета МГУ (2019, Москва, Россия).

## **ПУБЛИКАЦИИ**

По теме диссертации в журналах и сборниках опубликовано 15 печатных работ (из них 9 статей в рецензируемых журналах, 5 входящих в список ВАК, 4 статьи в журналах, входящих в системы цитирования WOS и Scopus).

## **ВКЛАД АВТОРА**

Все материалы и результаты, вошедшие в данную диссертационную работу, подготовлены либо лично автором, либо совместно с соавторами работ, опубликованных по теме диссертации.

## **СТРУКТУРА И ОБЪЁМ ДИССЕРТАЦИИ**

Диссертация включает в себя введение, три главы и заключение. Полный объем диссертации составляет 128 страниц с рисунками и таблицами. Список литературы состоит из 113 ссылок.

Во **введении** представлен обзор основной литературы по теме работы. Описаны актуальность тематики, научная новизна и значимость результатов. Также введение содержит список основных положений, выносимых на защиту, и информацию о том, где эти результаты прошли апробацию. Представлен обзор работ по теоретическим и экспериментальным методам исследования обратных волн в различных пластинах и структурах. Также представлен обзор о волноводах сложной формы, таких как клин, четвертьпространства с различными граничными условиями. Описаны работы с возможными приложениями данных волноводов.

**Первая глава** посвящена задаче распространения и возбуждения волн Лэмба. Описан основной метод решения задачи на распространение, широко используемый во всех главах работы. С помощью данного метода рассчитаны дисперсионные кривые для волн Лэмба в пластине из ниобата лития. На основе полученных результатов проведено экспериментальное исследование обратных волн с помощью возбуждения данных мод в резонаторах на встречно штыревых преобразователях с различными пространственными периодами. Для сравнения экспериментальных и теоретических результатов методом конечных элементов в среде COMSOL проведено моделирование указанных резонаторов с учетом источников, возбуждающих волны. Также в данной главе проведены теоретические расчеты энергетических характеристик обратных вытекающих акустических волн Лэмба, в изотропных пластинах, погруженных в жидкость. Применение теории возмущений для анализа обратных вытекающих волн Лэмба в контакте с жидкостью позволило получить соответствующие выражения для характеристик данных мод.

Во **второй** главе проводится точный вывод дисперсионных соотношений для чисто сдвиговых волн в пластинах ниобата калия Y- и X-срезом. Данные секулярные уравнения решаются численно и строятся графики дисперсионных кривых. С другой стороны, применение теории возмущений и асимптотического разложения дисперсионных уравнений позволяет получить выражения для приближенного описания дисперсии фазовой и групповой скоростей в окрестностях точек рождения. Сравнение численных и асимптотических результатов показывает хорошее совпадение в данной области. Далее данные разложения использовались для анализа механизмов возникновения обратных сдвиговых волн. Оказалось, что в данном представлении каждый механизм прописывается аддитивно в виде коэффициентов членов разложения. Показано, что можно точно указать какой коэффициент данного разложения, за какой механизм отвечает. На основании полученных результатов были идентифицированы основные механизмы, ответственные за возникновение сдвиговых обратных акустических волн. В данной главе также проведен теоретический анализ влияния электрических граничных условий на характеристики обратных сдвиговых акустических волн в пьезоэлектриках. Показано, что с помощью изменения проводимости тонких слоев, расположенных на поверхностях пьезоэлектрической пластины, можно управлять распределением потенциала указанных волн по толщине пластины.

В **третьей** главе исследуются локализованные моды в волноводах сложной формы. Сначала описывается полуаналитический метод конечных элементов для исследования мод в данных геометриях. Описывается решение задачи с учетом гармонического источника на поверхностях структур. Для того чтобы удовлетворять условиям погашаемости на бесконечности вводится и описывается математическое понятие идеально согласованного слоя. В данной главе подробно исследуются аналоги волны Рэлея-Стоунли в полупространствах, состоящих из двух упругих клиньев. Рассчитывается график существования данных волн в пространстве

материальных параметров для случаев пуассоновских сред. Исследуется задача распространения в усеченном клине, состоящем из трех сред. Построены графики дисперсионных кривых для подобных сложных структур и распределения их полей для первых четырех мод. Подробно исследуются вытекающие волны в данных геометриях. Показано, что в геометриях в виде края с жесткими границами и в системе, состоящей из трех изотропных сред, образующих полупространство наблюдаются частотные диапазоны с обратными волнами.

**В заключении** приведены основные выводы и результаты диссертационной работы.

# ГЛАВА 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЛЭМБА В ПЛАСТИНАХ

## § 1. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ

Как уже упоминалось во введении, основными объектами исследования в данной работе будут волны, распространяющиеся в анизотропных пьезоэлектрических пластинах. Известно, что в общем случае дисперсионные характеристики данных волн описываются трансцендентными уравнениями, которые не поддаются решению точными аналитическими методами. Подобные уравнения достаточно хорошо решаются численными итерационными способами. Ниже будет описана основная идеология нахождения решений дисперсионных уравнений для мод пластин [75]. Она же хорошо расширяется и на многослойные структуры и волноводы. Данный итерационный способ решения будет широко использоваться и во второй главе данной диссертационной работы.

Для нахождения дисперсионных зависимостей прямых и обратных акустических волн в пьезоэлектрической пластине рассмотрим следующую геометрию задачи (рис. 1.1). Пусть волна распространяется вдоль направления оси  $x_1$  пластины, ограниченной плоскостями  $x_3=0$  и  $x_3=h$ . В областях  $x_3<0$  и  $x_3>h$  считаем, что расположен вакуум. Поскольку задача является двумерной все механические и электрические переменные считаются постоянными в направлении оси  $x_2$ . Запишем уравнение движения и связанное квазиэлектростатическое уравнение, а также материальные уравнения для пьезоэлектрической среды [76]:

$$\rho \partial^2 U_i / \partial t^2 = \partial T_{ij} / \partial x_j, \quad \partial D_j / \partial x_j = 0, \quad (1.1)$$

$$T_{ij} = C_{ijkl} \partial U_l / \partial x_k + e_{kij} \partial \Phi / \partial x_k, \quad D_j = -\varepsilon_{jk} \partial \Phi / \partial x_k + e_{jlk} \partial U_l / \partial x_k, \quad (1.2)$$

здесь  $U_i$  - компонента механического смещения частиц,  $t$  - время,  $T_{ij}$  - компонента тензора механического напряжения,  $x_j$  - декартовы

координаты,  $D_j$  – компонента вектора электрической индукции,  $\Phi$  – электрический потенциал,  $\rho$ ,  $C_{ijkl}$ ,  $e_{ikl}$ , и  $\varepsilon_{jk}$  – плотность, упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные пьезоэлектрика соответственно.

Внешнюю среду в областях  $x_3 < 0$  и  $x_3 > h$  считаем вакуумом, для которого электрическая индукция должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\partial D_j^V / \partial x_j = 0, \quad (1.3)$$

где  $D_j^V = -\varepsilon_0 \partial \Phi^V / \partial x_j$ . Здесь индекс V обозначает величины, относящиеся к вакууму, а  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума.

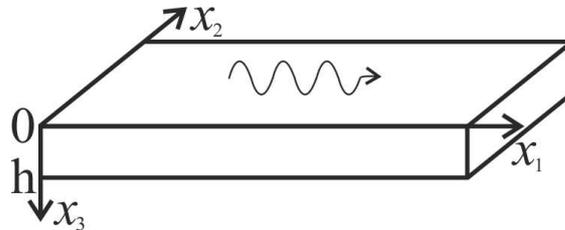


Рис.1.1. Геометрия задачи.

Верхнюю и нижнюю поверхности пластины считаем свободными и используем стандартные граничные условия отсутствия нормальных напряжений. Запишем соответствующие механические и электрические граничные условия. В плоскостях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$  они имеют следующий вид

$$T_{3j} = 0, \quad \Phi^V = \Phi, \quad D_3^V = D_3. \quad (1.4)$$

Решение вышеописанной граничной задачи представляется в виде плоских неоднородных волн [75, 77] бегущих вдоль пластины и имеет вид

$$Y_i(x_1, x_3, t) = Y_i(x_3) \exp[j\omega(t - x_1/V)], \quad (1.5)$$

где  $i=1 - 8$  для пьезоэлектрика, а для вакуума  $i=1, 2$ ,  $V$  – фазовая скорость,  $\omega$  – круговая частота акустической волны. Здесь введены следующие нормированные переменные:

$$Y_i = \omega C_{11}^* U_i / V, Y_4 = T_{13}, Y_5 = T_{23}, Y_6 = T_{33}, Y_7 = \omega e^* \Phi / V, Y_8 = e^* D_3 / \varepsilon_{11}^*, \quad (1.6)$$

где  $i = 1 - 3$ ;  $C_{11}^*, \varepsilon_{11}^*$  – нормировочные материальные постоянные пьезоэлектрической среды в кристаллофизической системе координат;  $e^* = 1$  и имеет размерность пьезоэлектрической постоянной.

Подставляя выражение (1.5) в уравнения (1.1) – (1.4), получим системы из восьми и из двух обыкновенных дифференциальных линейных уравнений для пьезоэлектрической среды и вакуума, соответственно. Каждую из этих систем можно записать в следующем матричном виде:

$$[A][dY / dx_3] = [B][Y]. \quad (1.7)$$

Здесь  $[dY/dx_3]$  и  $[Y]$  – восьмимерные векторы для среды и двумерные векторы для вакуума, компоненты которых определены в соответствии с формулами (1.6). Матрицы  $[A]$  и  $[B]$  – квадратные размером  $8 \times 8$  для пьезоэлектрической среды и размером  $2 \times 2$  для вакуума.

Поскольку матрица  $[A]$  не является особенной ( $\det[A] \neq 0$ ), то для каждой контактирующей среды можно записать следующее уравнение  $[dY/dx_3] = [A^{-1}][B][Y] = [C][Y]$ . Далее для решения системы уравнений (1.7) необходимо найти собственные значения  $\beta^{(i)}$  матрицы  $[A^{-1}][B]$  и соответствующие им собственные векторы  $Y^{(i)}$ , определяющие параметры парциальных волн, для каждой из контактирующих сред. В конечном счете общее решение будет иметь вид суммы всех парциальных волн для каждой среды:

$$Y_k = \sum_{i=1}^N A_i Y_k^{(i)} \exp(\beta^{(i)} x_3) \exp(i\omega[t - x_1/V]), \quad (1.8)$$

где  $N=8$  это число собственных значений для пьезоэлектрической среды и  $N=2$  для вакуума,  $A_i$  - неизвестные величины. Для нахождения величин  $A_i$  и скорости  $V$  воспользуемся механическими и электрическими граничными условиями (1.4), которые также были записаны в нормированном виде с учетом (1.6). Для вакуума, собственные значения расположенного в областях  $x_3 < 0$  с отрицательной действительной частью и  $x_3 > 0$  положительной действительной частью исключим из рассмотрения, чтобы удовлетворить закону сохранения энергии, поскольку все поля должны

иметь убывающую амплитуду при удалении в бесконечность от пьезоэлектрической пластины. Таким образом, неизвестные величины  $A_i$  и скорость  $V$  можно определить из системы однородных алгебраических линейных уравнений (1.4).

В результате проведенных расчетов были построены дисперсионные зависимости для фазовых скоростей акустических волн в пластине YX ниобата лития (рис. 1.2). Материальные постоянные для ниобата лития были взяты из сайта фирмы производителя кристаллов [78] и приведены в табл. 1.1. Известно, что для данной кристаллографической ориентации ниобата лития в диапазоне частот  $hf = 2.5 - 4$  км/с существуют только две пьезоактивные моды первого порядка: поперечно-горизонтальная  $SH_1$  волна и антисимметричная  $A_1$  волна Лэмба [79]. На рис. 1.2 представлены более подробные дисперсионные зависимости для данных волн. Было обнаружено, что дисперсионная зависимость для моды  $A_1$  имеет как прямую часть, так и обратную части ветви кривой.

Таблица 1.1. Материальные постоянные кристалла  $LiNbO_3$  [78]

Упругие модули, $C_{ij}^E$ ( $10^{10}$ Н/м <sup>2</sup> )						
$C_{11}^E$	$C_{12}^E$	$C_{13}^E$	$C_{14}^E$	$C_{33}^E$	$C_{44}^E$	$C_{66}^E$
20.3	5.73	7.52	0.85	24.24	5.95	7.28
Пьезоконстанты, $e_{ij}$ (Кл/м <sup>2</sup> )				Диэлектрические проницаемости, $\epsilon_{ij}^S / \epsilon_0$		Плотность, (кг/ м <sup>3</sup> )
$e_{15}$	$e_{22}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$\epsilon_{11}^S / \epsilon_0$	$\epsilon_{33}^S / \epsilon_0$	$\rho$
3.83	2.37	0.23	1.3	44.3	27.9	4650

Очевидно, что для возбуждения обратных волн можно использовать и встречно штыревые преобразователи. В общем случае этот преобразователь возбуждает акустические волны в обе стороны. Вместо линии задержки было предложено использовать резонатор, где одна и та же система встречно штыревых преобразователей используется как для возбуждения, так и для приема сигнала. Для того чтобы зафиксировать появление именно обратной волны было создано устройство из 19 резонаторов с ВШП на

одной пластине ниобата лития с увеличивающимся периодом и, соответственно, длиной возбуждаемой волны. Причем, каждый из этих ВШП имеет по 10 электродов. Для определения пространственного периода ВШП на рис. 1.2 были построены вспомогательные линии  $V_{ph} = \lambda f$ .

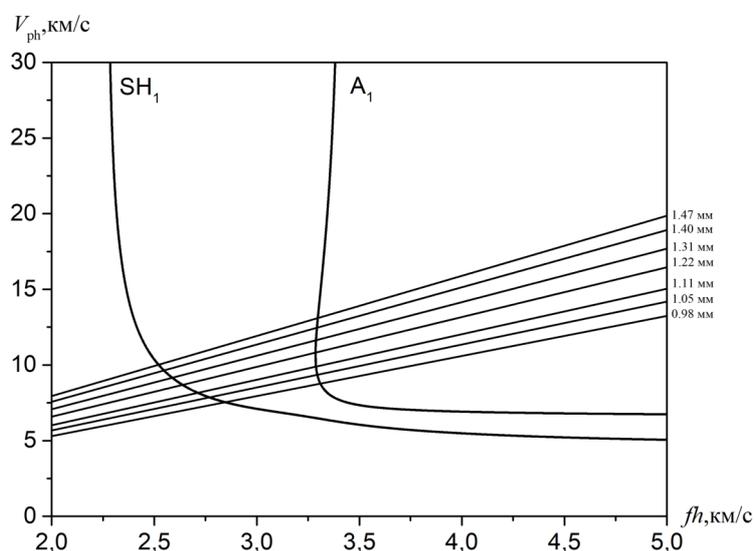


Рис.1.2. Дисперсионные кривые для кривых  $SH_1$  и  $A_1$  пьезоактивных волн в пластине  $YX$   $LiNbO_3$ .

Для реализации эксперимента с ВШП были выбраны те длины волн, изменение которых позволяет проследить переход от прямой моды к обратной. Из рис. 2 видно, что при фиксированной толщине пластины ( $h=0.37$  мкм) с ростом периода ВШП резонансная частота  $SH_1$  волны должна монотонно уменьшаться. Для  $A_1$  волны в области существования прямой волны частота также должна уменьшаться, а при переходе дисперсионной зависимости в область существования обратной волны резонансная частота должна увеличиваться.

## **§ 2. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА**

Основываясь на проведенных расчетах, приведенных в параграфе выше, были оценены необходимые длины волн, которые пересекают прямую и обратную части кривой моды Лэмба. Соответственно, зная

данные величины, в графическом редакторе была нарисована схема фотошаблона будущего образца (рис. 1.3). Затем на целлулоидном носителе был создан данный фотошаблон с набором из 19 ВШП, которые отличались друг от друга пространственным периодом в диапазоне от 0.98 мм до 1.47 мм (рис. 1.3) [80].

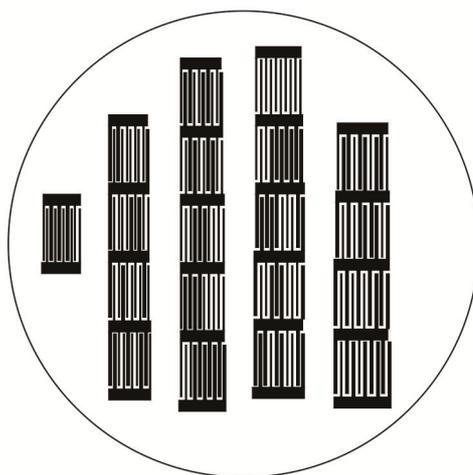


Рис. 1.3. Фотошаблон для ВШП с различными периодами.

Создание матрицы, состоящей также из 19 ВШП с различным пространственным периодом на пластине ниобата лития  $Y$  – среза толщиной 0.37 мм и диаметром 3.5 см, осуществлялось с помощью фотолитографии. Вначале в вакууме на установке ВУП-5 напылялась сплошная пленка алюминия толщиной 200-300 нм на отполированную поверхность пластины. Затем на алюминиевое покрытие наносился слой положительного фоторезиста AZ5214E толщиной несколько микрон с помощью специальной центрифуги. После этого структура выдерживалась 30 мин при температуре 80С, а затем фоторезист засвечивался через фотошаблон ртутной лампой в течение 25 сек. Далее ненужная часть фоторезиста удалялась проявителем AZ726MIF, а излишняя часть пленки алюминия стравливалась смесью азотной и фосфорной кислот. Остатки фоторезиста удалялись ацетоном. После этого к контактным площадкам приклеивались золотые проволочки диаметром 25 мкм и длиной 30 мм с

помощью проводящего клея «Silver Print». Все пространство вокруг каждого преобразователя было покрыто быстросохнущим поглощающим лаком толщиной  $\sim 0.2$  мм для акустической изоляции преобразователей. Указанная пластина фиксировалась в специально изготовленном держателе, имеющем две контактные ножки для подключения к LCR измерителю 4285A (Agilent) (рис. 1.4).

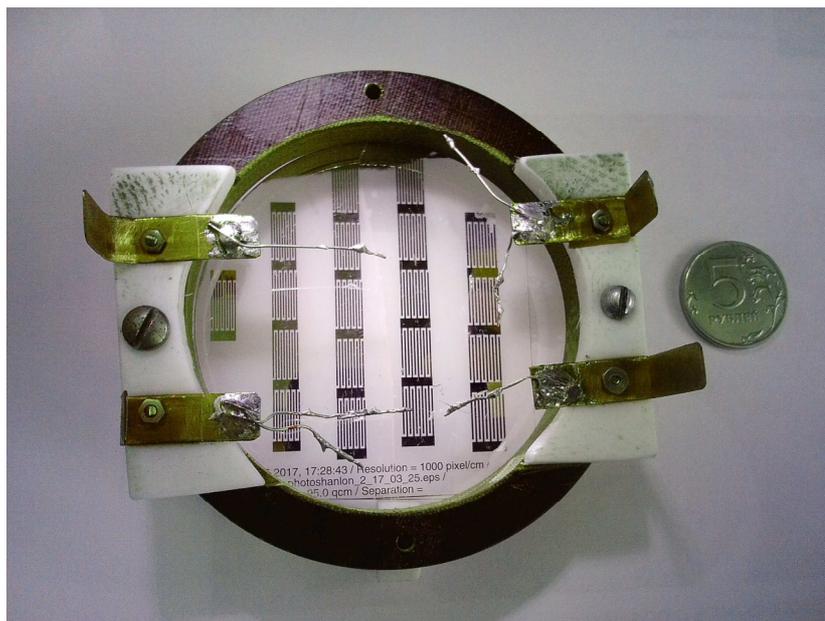


Рис. 1.4. Фото экспериментального образца.

С помощью микропаяльника к обратной стороне контактных ножек приклеивались золотые проволочки выбранного преобразователя. Устройство подключалось к измерителю 4285A, и измерялись частотные зависимости действительной и мнимой частей электрического импеданса преобразователя. Затем к контактным ножкам припаивались проволочки другого преобразователя и измерения повторялись.

На рис. 1.5 приведены экспериментально измеренные частотные зависимости действительной части электрического импеданса в резонаторе на ВШП с пространственными периодами 0.98 мм (а), 1.113 мм (б), 1.33 мм (в) и 1.47 мм (г). Как и было предсказано в теории с ростом периода ВШП для прямой  $SH_1$  волны резонансная частота, при которой наблюдается

максимум значения импеданса, уменьшается. Что касается  $A_1$  волны, то в области прямой моды ее резонансная частота уменьшается, а при переходе дисперсионной зависимости в область существования обратной волны резонансная частота увеличивается.

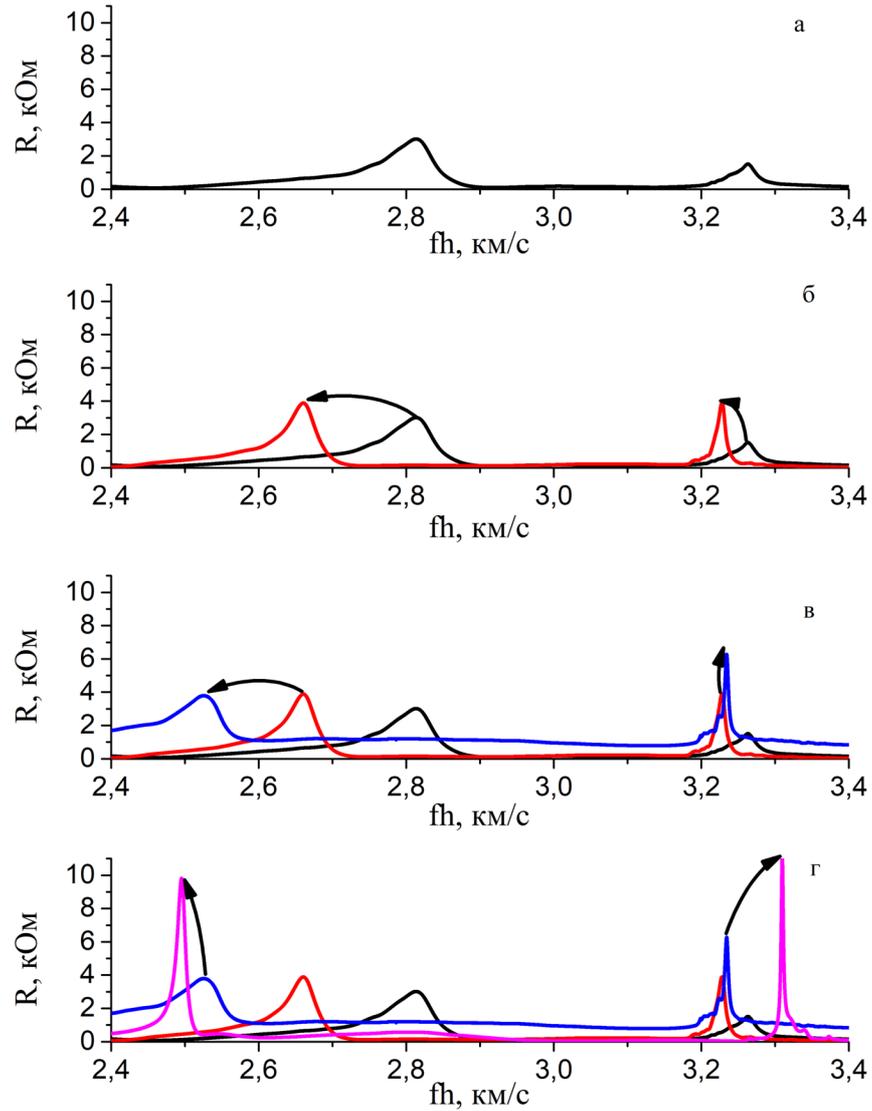


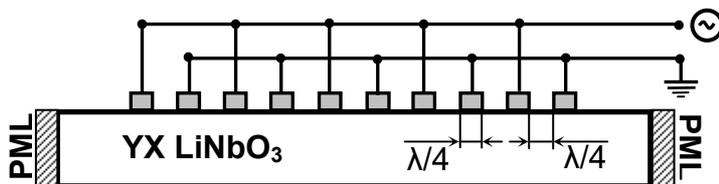
Рис. 1.5. Зависимость положения пиков реальной части импеданса системы от частоты для различных периодов ВШП 0.98 мм (а), 1.113 мм (б), 1.33 мм (в) and 1.47 мм (г).

Следует отметить, что малое изменение резонансных частот моды  $A_1$  связано с поведением дисперсионной зависимости в области перехода от прямой к обратной волне. Как видно из рисунка 1.2 частоты, на которых

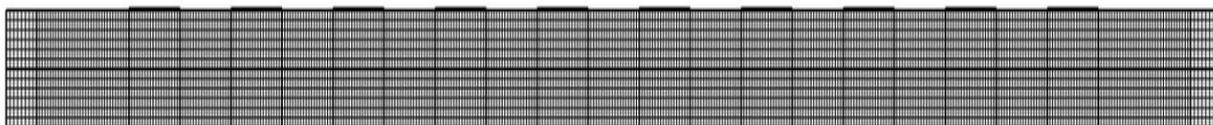
пересекаются линии вспомогательных прямых и дисперсионных кривых для моды Лэмба лежат в очень узком диапазоне частот, а точки пересечений этих же прямых линий и кривой SH моды находятся в достаточно широком диапазоне.

### § 3. АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Теоретический анализ, проведенный в параграфе 1 данной главы, не принимал во внимание вопросы возбуждения акустических волн. Для полного понимания процесса необходимо учесть влияние гармонического источника, возбуждающего волны в пластине. В модели данный источник представляет с собой алюминиевые полоски с заданным потенциалом на границе между пластиной и металлом (рис. 1.6а). При математическом моделировании экспериментальной ситуации был использован метод конечных элементов реализованный в коммерческом пакете программирования COMSOL Multiphysics 5.2. Геометрия исследуемой структуры с ВПП на поверхности представлена на рис. 1.6.



(а)



(б)

Рис.1.6. Топология модели (а) и сетка для МКЭ (б).

По обоим краям пластины в модели расположены идеально согласованные слои (PML) для предотвращения переотражений возбуждаемых волн от границ. При реализации этих поглощающих слоев были использованы квадратичные функции затухания. В области пластины

свободной от ВШП используются механические граничные условия, соответствующие свободным границам. В области контакта штырей ВШП с пластиной в качестве механических граничных условий используется непрерывность смещений и механических напряжений между штырем и пластиной. Возбуждение акустической волны моделируется путем использования периодического изменения электрического потенциала в области штырей ВШП. На один штырь подается напряжение, а соседний следующий – закорачивается. Таким образом, получается, что ширина штыря равна четверти длины волны. Аналогично эксперименту моделирование производится с 10 штырями на поверхности пластины. При составлении модели была сгенерирована ручная сетка в виде прямоугольников, а область под электродами была разбита на более мелкие элементы. При моделировании использовалась достаточно мелкая сетка с линейным размером элемента равным  $\lambda/50$ .

Как уже говорилось выше, благодаря использованию PML на границах резонатора переотражение волн было практически исключено, что привело к исчезновению ложных пиков на моделируемой резонансной кривой. В результате проведенного моделирования были получены частотные зависимости действительной части электрического импеданса в резонаторах на ВШП для различных значений их пространственного периода.

На рис. 1.7 приведены полученные теоретические (круги) и экспериментальные (квадраты) значения резонансных частот волн  $A_1$  (а) и  $SH_1$  (б) от периода исследованных ВШП. Видно хорошее количественное и качественное совпадение двух теоретических вычислений с экспериментальными измерениями.

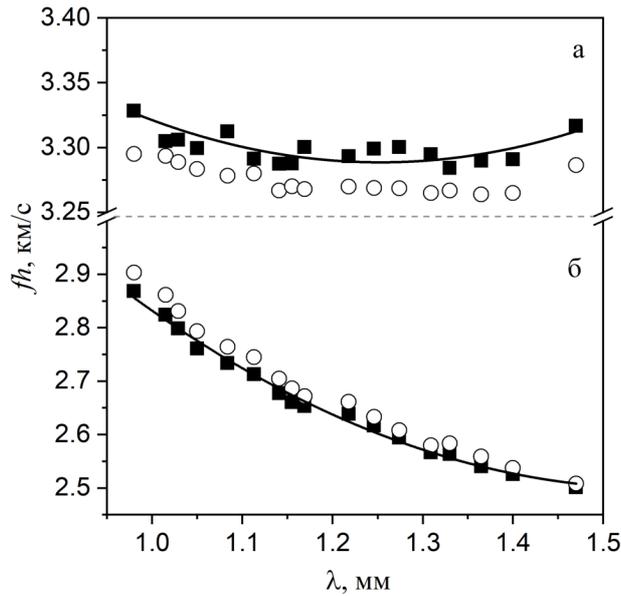


Рис.1.7. Частотные зависимости положений откликов  $A_1$  (а) и  $SH_1$  (б) волн от периодов ВШП.

Следует отметить, что резонансные частоты возбуждаемых обратных волн оказались очень чувствительны к толщине пластины. Это может быть связано с тем, что произведение  $hf$  входит в дисперсионные соотношения как один параметр. С другой стороны, в выбранной области происходит переход от обратной волны в прямую волну, и все резонансные пики лежат в узком частотном диапазоне. Из рисунка 2. видно, что малейшее изменение толщины пластины приводит к большим изменениям фазовой скорости в данной области. В связи с этим зависимости на рис.1.7 были построены для параметра  $hf$  ( $h$  – толщина пластины,  $f$  – частота волны).

#### **§ 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБРАТНЫХ ВЫТЕКАЮЩИХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЛЭМБА**

Несмотря на известные работы по анализу обратных вытекающих волн Лэмба [40-46] до сих пор не было работ, непосредственно исследовавших их энергетические свойства, хотя эти свойства относятся к наиболее фундаментальным для волн любой природы.

Мы рассматриваем гармонические волны в твердом теле описываемые уравнением движения (1.1) без учета пьезоэффекта и меняющихся по времени как  $\exp(-i\omega t)$ , производная по горизонтальной оси  $x$ , направленная вдоль пластины, эквивалентна умножению на  $ik$  (в случае, когда волновая функция не является комплексно сопряженной). Вертикальная ось, перпендикулярная поверхности пластины, обозначена как  $z$ . Гармонические волны в невязкой жидкости описываются уравнением Гельмгольца  $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ , где  $\Delta$  оператор Лапласа,  $\varphi$  потенциал скорости частиц,  $v_i = \partial_i\varphi$ ,  $k$  волновое число. Далее рассматривается двумерная задача о распространении волн, зависящих только от этих двух координат. Граничные условия на границе раздела между пластиной и жидкостью заключаются в  $T_{xz} = 0$  и непрерывности нормальной составляющей смещения и давления в жидкости  $T_{zz} = -p$  [76], где  $p$  акустическое давление,  $p = -\rho_{\text{лж}} \partial\varphi/\partial t$ ,  $\rho_{\text{лж}}$  плотность жидкости.

Волны Лэмба, распространяющиеся в погруженной в жидкость пластине быстрее, чем объемные волны в жидкости, излучают свою энергию во внешнее пространство и по этой причине они становятся волнами утечки и поэтому затухают вдоль пластины [81]. Константу затухания  $\alpha$  можно найти методом теории возмущений [76], при условии, что эффект нагрузки жидкости считаем малой величиной

$$\alpha = [Z_0(d) - Z_0(-d)]\omega^2 |u_z(d)|^2 / (4\langle \bar{P}_x^R \rangle), \quad (1.9)$$

где  $\langle \bar{P}_x^R \rangle$  усредненная по времени плотность потока энергии, интегрированная по пластине,  $\langle \bar{P}_x^R \rangle = \int_{-d}^d \bar{P}_x^R dz$ ,  $\bar{P}_i^R = \text{Re}(\bar{P}_i)$ ,  $\bar{P}_i = -T_{ij}v_j^*/2$ ,  $d$  это половина толщины пластины,  $u_z(d)$  амплитуда нормального смещения на поверхности,  $Z_0(\pm d) = \pm \rho_{\text{лж}} V_c V_L / \sqrt{V_L^2 - V_c^2}$  поверхностный механический импеданс жидкости,  $V_c$  фазовая скорость волны жидкости,  $V_L$  это фазовая скорость волны Лэмба. Как видно из уравнения (1.9), величины  $\alpha$  и  $\langle \bar{P}_x^R \rangle$

должны быть одного знака. Так как,  $\langle \bar{P}_x^R \rangle$  отрицателен по отношению к волновому вектору для обратных волн, коэффициент  $\alpha$  также отрицателен для этих волн.

Изменение знака обратной волны утечки оказывает критическое влияние на структуру излучения в жидкости. Пространственная зависимость этого излучения имеет вид  $\exp(ik_x x + ik_z z)$ , где  $k_x = k_L + i\alpha$ ,  $k_L = \omega/V_L$ . Проекция  $k_z$  комплексного волнового вектора,  $k_z = \text{Re}(k_z) + i\beta$ , находится из уравнения Гельмгольца

$$\text{Re}(k_z) = \pm \sqrt{k^2 - k_L^2 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad \beta = -\alpha k_L / \text{Re}(k_z). \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) показывают, что постоянная  $\beta$  имеет тот же знак, что и  $\text{Re}(k_z)$ , то есть волновое излучение в жидкости идет вдоль внешней нормали к поверхности пластины.

Таким образом, в отличие от прямых волн утечки, обратные волны затухают вдоль пластины в направлении, противоположном волновому вектору, и их излучение в жидкости уменьшается, а не увеличивается с расстоянием от пластины. Эти выводы согласуются с результатами, полученными аналитически в работе [45], хотя здесь они основаны на других аргументах. Отрицательный знак  $\alpha$  также согласуется с численными расчетами в работе [40]. Следует отметить, что существуют частично аналогичные теоретические и экспериментальные исследования [82-84], относящиеся к обратным квазисимметричным волнам в пустых оболочках (обозначается как  $S_{2b}$ ) погруженных в воду. Эти исследования приходят к тому же выводу, что и выше, что  $\alpha < 0$ .

Зависимости фазовых скоростей моды  $S_1$  от произведения частоты  $f$  и толщины  $h$ , рассчитаны нами для алюминиевой пластины, которая считается свободной (кривые 1 и 2) или погруженной в воду (кривые 3 и 4), и показаны на рис. 1.8.

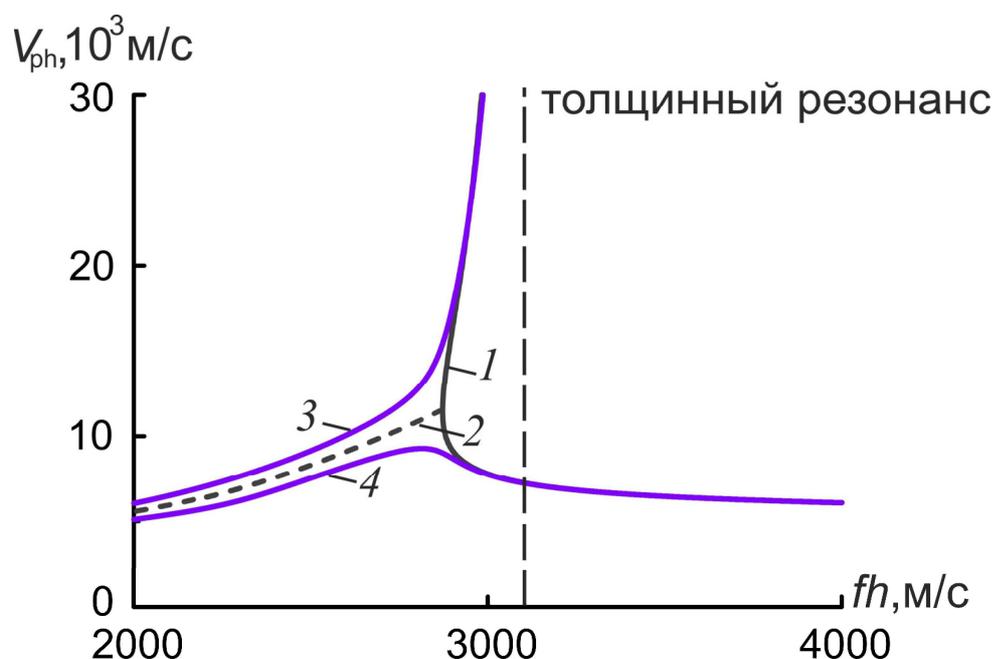


Рис. 1.8. Фазовые скорости  $V_{ph}$  моды  $S_1$  на частоте  $f$  для свободной (1, 2) и нагруженной водой (3, 4) алюминиевых пластинах толщиной  $h$ .

Расчеты проводятся по методу, аналогичному описанному в работе [85]. Кривая 1 задается действительным корнем секулярного уравнения и соответствует распространяющимся волнам, то есть волне с ненулевым усредненным по времени потоком энергии. Кривая 2 дается комплексным корнем секулярного уравнения, и это соответствует распространяющимся волнам, т.е. исчезающим волнам с нулевым усредненным по времени переносом энергии. Диапазон существования обратных волн в свободной пластине определяется верхней частью кривой 1 расположенной между толщиной резонансной частоты и точки поворота кривой (общая точка кривых 1 и 2). Нагрузка жидкостью приводит к гибридизации реальной ветви 1 и комплексной ветви 2 и расщеплению ранее непрерывной кривой 1 в две отдельные комплексные ветви 3 и 4. Ветвь 3 принадлежит обратной волне, ветка 4 прямой волне. Эти гибридные ветви имеют противоположные знаки постоянных затухания  $\alpha$  (рис. 1.9).

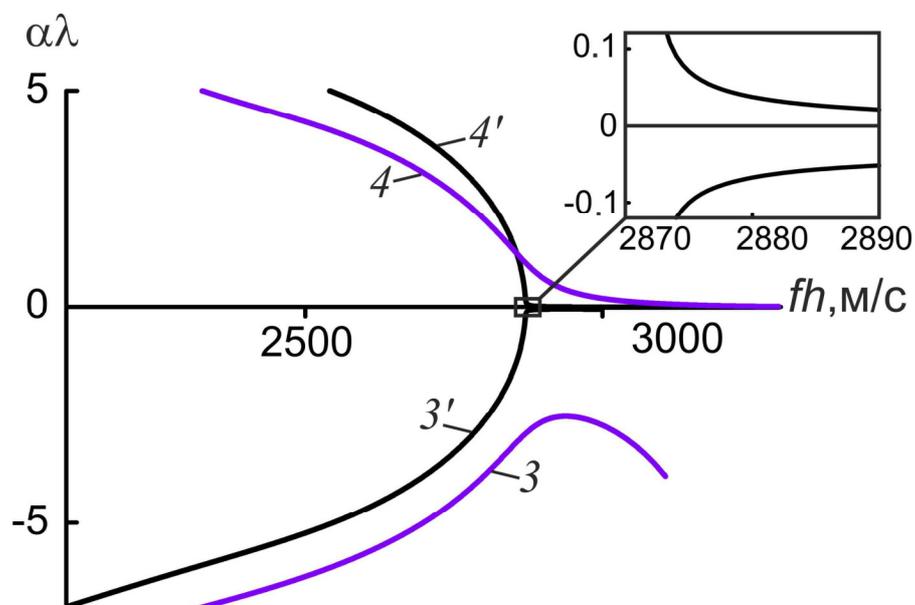


Рис. 1.9. Нормализованная величина утечки (произведение постоянной затухания  $\alpha$  и длины волны  $\lambda$ ) для обратной и прямой мод алюминиевой пластины в воде (3, 4) и жидком гелии (3', 4').

Кроме того, затухание обратных вытекающих волн Лэмба значительно больше (примерно в десять раз для комбинации алюминий/вода), чем для прямых. Можно избежать высокого затухания, выбрав среды с более высоким контрастом акустических импедансов, например алюминий в жидком гелии (Рис. 9).

Для дальнейшего изучения энергетических свойств, уравнение движения (1.1) без учета пьезоэффекта преобразуется в квадратичную форму [76] путем умножения его на комплексно-сопряженный вектор  $v_i^*$  и комплексно-сопряженную формулу (1.1) на  $v_i$ . Затем необходимо сложить эти уравнения, используя закон Гука. В результате получим

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{P}}^R = 0. \quad (1.11)$$

Это особая усредненная по времени форма хорошо известного закона сохранения энергии. Такое же соотношение справедливо для жидкостей, если соответствующая величина определяется как  $\bar{P}_i = \rho v_i^* / 2$ . Поразительный результат получается в двумерном случае путем интегрирования уравнения (1.11) над поверхностью  $S$ . Эта поверхность может быть выбрана

произвольно, также в виде прямоугольника в освещенной зоне, показанной на рис. 1.10.

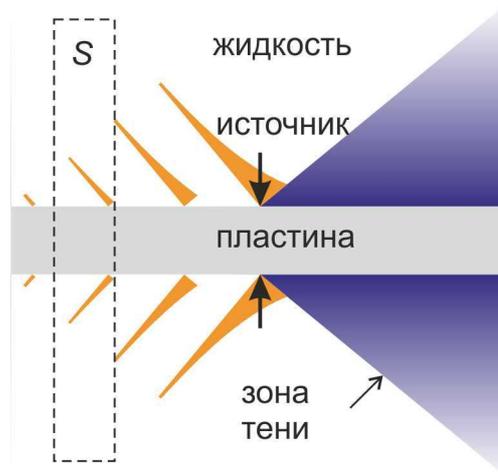


Рис. 1.10. Зоны освещенная/тени, поверхность интегрирования  $S$ , и распределения амплитуд вдоль волновых фронтов для рассеянных обратных волн Лэмба, распространяющихся влево от локализованного источника.

Применяя теорему Гаусса, интеграл преобразуется в линейный интеграл вокруг границы  $L$  поверхности  $S$  в следующем виде  $\int_S \text{div} \bar{\mathbf{P}}^R ds = \oint_L \bar{P}_i^R n_i dl = 0$ , где  $n_i$  является внешней нормалью к интегральному контуру. Этот линейный интеграл разбит на три части, одна из которых связана с пластиной, а две другие - с жидкостью. На выбор пределов интегрирования влияет различие между зонами освещения/тени для обратных и прямых вытекающих волн Лэмба, возбуждаемых локализованным источником. Граница между этими зонами проходит на границе раздела через источник и направлена вдоль волнового вектора излучения в жидкости. Наклон волнового вектора дополнительно определяется углом, отсчитываемым от поверхности пластины. Угол определяется из условия согласования фаз или, альтернативно, из уравнений (1.10)-(1.11) как  $\tan \theta = \text{Re}(k_z)/k_L = \bar{P}_z^R / \bar{P}_x^R$ . Теневая зона лежит выше predetermined граничной линии для мод с прямой утечкой, а ниже этой линии для обратных мод (рис. 1.10). Последний факт позволяет учитывать бесконечные вертикальные границы поверхности  $S$ . Тогда интегралы по верхним и нижним горизонтальным частям  $L$  становятся

нулевыми. Остальные интегралы преобразуются с учетом непрерывности  $\bar{P}_z^R$  на границе. В результате они сводятся к разности двух интегралов по вертикальной линии от минус бесконечности до плюс бесконечности. Выражения под знаками интегралов одинаковы с одним исключением дополнительного фактора  $\exp(-2\alpha w)$  в одном из них, где  $w$  ширина поверхности  $S$ . Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}_x^R dz = 0. \quad (1.12)$$

Таким образом, усредненный по времени суммарный поток энергии, то есть плотность потока энергии, интегрированный во всем диапазоне глубин проникновения волнового поля, тождественно равен нулю для вытекающих обратных волн Лэмба. Особенно примечательно, что найденное свойство не зависит от того, насколько плотной или разреженной является внешняя жидкость. Этот, удивительный, на первый взгляд, результат порождает вопрос о том, как правильно определить скорость потока энергии при условии, что общий поток энергии формально отсутствует. Совершенно ясно, что локальные потоки энергии в соседних твердых и жидких средах отличны от нуля, тогда как общий поток энергии равен нулю. Это специфическое свойство обратных мод утечки объясняется противоположными направлениями горизонтальных составляющих потоков энергии в соседних средах и их полной взаимной компенсацией (рис. 1.11). Масштабы графиков выбраны разными для пластины и жидкости, чтобы дать лучшее визуальное представление рисунка. Следует отметить, что вертикальные компоненты потоков энергии также присутствуют в пластине и в жидкости, что приводит к наклону локальных потоков энергии в обеих средах, за исключением одной средней плоскости пластины, где поток энергии является чисто горизонтальным.

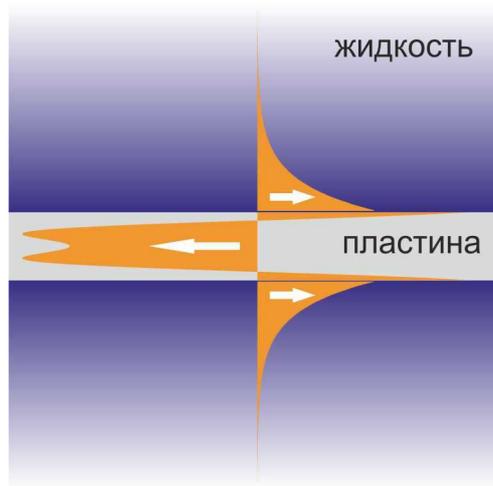


Рис. 1.11. Распределение горизонтальных потоков энергии вытекающих обратных волн Лэмба в системе пластина/жидкость, приводящих к нулевому потоку полной энергии.

С другой стороны, интегрирование уравнения (1.11) только по толщине пластины дает другую формулу для постоянной затухания  $\alpha$  которая действительна как для прямой, так и для обратной утечки

$$\alpha = \bar{P}_z^R \Big|_{z=d} / \langle \bar{P}_x^R \rangle. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) является аналогом приближенного уравнения (1.9), но в отличие от уравнения (1.9) это строгое соотношение.

Универсальное соотношение между усредненной по времени кинетической и потенциальной волновой энергией было ранее установлено для недиссипативных волноводных систем. Это соотношение, известное как принцип Рэля для волноводов [86], соответствует полной энергии (поперек поперечного сечения волновода) и предсказывает равенство этих энергий. Рассмотрим вопрос о применимости этого принципа к обратным вытекающим волнам Лэмба. С этой целью мы преобразуем уравнение движения, как описано выше, чтобы вывести формулу (1.11), но используя теперь вычитание вместо сложения в этой процедуре. Это дает [76, 86]

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{P}}^I = 2\omega(\bar{E}_k - \bar{E}_p), \quad (1.14)$$

где  $\bar{P}_i^I = \operatorname{Im}(\bar{P}_i)$ ,  $\bar{E}_k$  и  $\bar{E}_p$  усредненные по времени плотности кинетической и потенциальной энергий,  $\bar{E}_k = \rho v_i v_i^* / 4$ ,  $\bar{E}_p = T_{ij} S_{ij}^* / 4$ . Интегрируя уравнение

(1.14) по толщине пластины и принимая во внимание, что  $\bar{P}_z^1(d) = -\bar{P}_z^1(-d)$  в результате получим

$$\bar{P}_z^1 \Big|_{z=d} - \alpha \langle \bar{P}_x^1 \rangle = \omega \int_{-d}^d (\bar{E}_k - \bar{E}_p) dz. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) показывает, что принцип Рэля может быть нарушен для пластины, погруженной в жидкость, несмотря на то, что считается, что обе среды не имеют затухания. Это так, если левая часть уравнения (1.15) отлична от нуля. Наш численный расчет в частном случае для алюминиевой пластины в воде показывает, что это действительно так. С другой стороны, первый член в левой части уравнения (1.15) становится равным нулю, если пределы интегрирования расширены до  $\pm\infty$ . Эти пределы включают также жидкость, где  $\bar{E}_k = \rho_{1q} v_i v_i^* / 4$ ,  $\bar{E}_p = pp^* / (4\rho_{1q} V_c^2)$ . Тем не менее, второе слагаемое, как снова показывает численный расчет для системы алюминий/вода, не равно нулю. Таким образом, фундаментальный принцип Рэля о равномерном распределении усредненных по времени кинетической и потенциальной энергий для гармонических по времени акустических полей не выполняется для обратных вытекающих волн Лэмба в обоих случаях интегрирования только по толщине пластины и интегрирования в пластине и жидкости. Причиной этого, очевидно, является затухание, вызванное утечкой, которая играет роль эффективного поглощения волн в рассматриваемой недиссипативной системе. Тем не менее, как кинетическая, так и потенциальная энергии, согласно их определению, являются действительными и положительными величинами; поэтому полная энергия, то есть их сумма, всегда положительна для любых волн. Следовательно, существует принципиальная разница между полной интегрированной по глубине средней энергией и потоком энергии для исследуемых волн: одна величина отлична от нуля, а другая равна нулю. Это свойство уникально для обратных вытекающих волн и не имеет аналогов в случае изотропных сред.

Скорость переноса энергии для волноводных мод обычно определяется как отношение потока энергии вдоль оси волновода к энергии на единицу длины волновода. Обе эти величины представляют собой соответствующие плотности, усредненные по времени и интегрированные по сечению волновода и внешнего пространства, то есть по всей области, занятой волновыми полями. Однако использование интегрирования по бесконечным пределам для расчета скорости энергии обратных и вытекающих волн Лэмба, а также прямых волн, не дает разумных результатов. Это так, потому что интеграл в формуле (1.12) для обратных волн равен нулю, а для прямых волн он расходится. Следовательно, может быть разумным переопределить скорость энергии обратных волн утечки, используя неполное интегрирование только по толщине пластины. Такое интегрирование является единственно допустимой процедурой для свободной пластины, и она использовалась без обоснования для прямых вытекающих мод Лэмба в работе [47]. В качестве физической основы такого неполного интегрирования в случае утечки обратных волн Лэмба мы рассматриваем тот факт, что источники волн, распределенные в вертикальной плоскости, могут возбуждать только те волны, потоки энергии которых направлены от плоскости источника. Таким образом, мы будем использовать определение  $V_E = \langle \bar{P}_x^R \rangle / \langle \bar{E} \rangle$ , где  $\bar{E} = \bar{E}_k + \bar{E}_p$  и  $\langle \bar{E} \rangle$  рассчитывается путем интегрирования по пластине, как это сделано для  $\langle \bar{P}_x^R \rangle$ . Полученное выше соотношение (1.12) позволяет упростить вычисления для  $V_E$ . Это следует из уравнения (1.12) что  $\langle \bar{P}_x^R \rangle = -2 \int_d^{\infty} \bar{P}_x^R dz$ , т.е., поток энергии в пластине может быть получен с помощью более простого расчета потока энергии в жидкости. С другой стороны, общее упрощение замены полной средней энергии (определяемой как сумма кинетической и потенциальной энергий) на двойное значение одной из этих величин здесь не используется, поскольку, как показано в формуле (1.15), такая замена не

является точной для вытекающих волн. Дисперсионные кривые, полученные для алюминиевой пластины в воде и в вакууме, приведены на рис. 1.12.

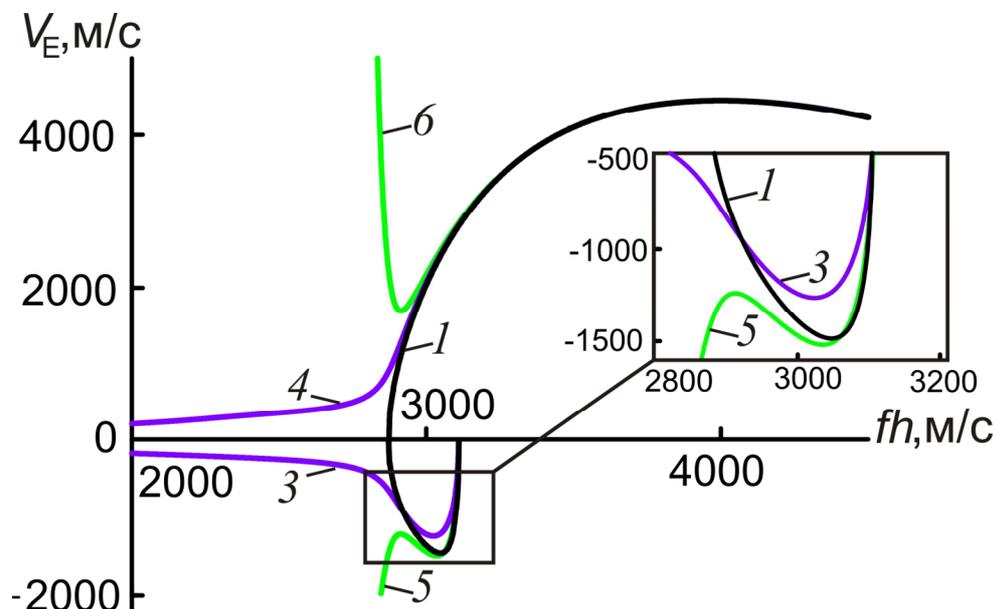


Рис. 1.12. Скорость переноса энергии  $V_E$  для гибридных мод 3, 4 и мод свободной пластины 1 показаны на рис. 1 и их сравнение с производными  $\partial\omega/\partial k$  (5, 6).

Видно, что область существования обратных волн (нижняя гибридная ветвь 3) становится формально, т. е. без учета затухания, гораздо больше в случае пластины, погруженной в воду, чем в вакууме (ветвь 1 в отрицательном диапазоне). А именно, нижний предел области существования, соответствующий нулевой скорости энергии и конечной фазовой скорости для свободной пластины, исчезает при смещении в нулевую точку произведения  $fh$ , где обе скорости стремятся к нулю одновременно. Однако дополнительный диапазон расширенной области существования для обратных волн характеризуется очень высоким затуханием. Это предотвращает использование основной части этого диапазона для передачи энергии волны Лэмба вдоль пластины на большие расстояния по сравнению с длиной волны. Однако такие сильно ослабленные волны все еще могут

оказывать значительное влияние на искажение и смещение отраженных лучей в задачах рассеяния на упругих оболочках, погруженных в жидкость.

Интересно сравнить скорость потока энергии  $V_E$  с величиной  $V_g = \partial\omega/\partial k$  которую обычно называют групповой скоростью в недиссипативных и слабо диссипативных средах. Для вытекающих волн Лэмба действительная часть волнового вектора, т.е.  $k_L$ , можно использовать как  $k$  в формуле для  $V_g$ . Отметим, что проблема определения групповой скорости для затухающих волн не полностью решена и до сих пор обсуждается в литературе [87, 88]. Сравнение  $V_E$  и  $V_g$  для вытекающих волн Лэмба в исследуемой системе дано на Рис. 1.12. Видно, что групповая скорость не совпадает со скоростью переноса энергии повсюду в исследуемом диапазоне. Приблизительное совпадение скоростей в погруженной пластине происходит только в ограниченном частотном диапазоне, где ветвь волны близка к таковой для распространяющейся моды Лэмба в свободной пластине.

Чтобы понять численные результаты, представленные на рис. 1.12, мы исследуем аналитическую связь между  $V_g$  и  $V_E$ . Для достижения этой цели можно использовать процедуру, описанную для свободных пластин в [76] и модифицированную ниже, чтобы учесть влияние нагрузки жидкости на спектр пластин. Процедура включает в себя аналогичные преобразования уравнения движения, как описано выше, чтобы вывести формулу (1.11). Среди них умножение уравнения на скорость частицы, но теперь считается, что умноженные поля принадлежат разным частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ .

Соответствующий результат

$$-i\Delta\omega(\rho v_i' v_i^* + c_{ijkl} S_{kl}' S_{ij}^*) = \partial_j (v_i' T_{ij}^* + v_i^* T_{ij}'), \quad (1.16)$$

где комплексно сопряженные величины принадлежат к  $\omega_1$  и величине со штрихом  $\omega_2$ . После интегрирования уравнения (1.16) по толщине пластины ее правая сторона представляется в виде

$$(v'_i T_{iz}^* + v_i^* T'_{iz}) \Big|_{-d}^d + (ik_2 - ik_1 - \alpha_2 - \alpha_1) \int_{-d}^d (v'_i T_{ix}^* + v_i^* T'_{ix}) dz, \quad (1.17)$$

где  $\alpha_1$ ,  $k_1$  и  $\alpha_2$ ,  $k_2$  принадлежат частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , соответственно. В пределе  $\Delta\omega \rightarrow 0$ ,  $\Delta k = k_2 - k_1 \rightarrow 0$ , интеграл уравнения (1.16) по толщине пластины сводится к следующей форме, которая применяется далее, чтобы найти связь между дифференциалами  $d\omega$  и  $dk$

$$-i4\langle \bar{E} \rangle d\omega + i4\langle \bar{P}_x^R \rangle dk = (v'_i T_{iz}^* + v_i^* T'_{iz}) \Big|_{-d}^d - (\alpha_2 + \alpha_1) \int_{-d}^d (v'_i T_{ix}^* + v_i^* T'_{ix}) dz. \quad (1.18)$$

Величины нулевого порядка  $d\omega$  и  $dk$  в правой части уравнения (1.18) равны нулю из-за (1.13). Разложение первого порядка уравнения (1.18) и его разделение на действительные и мнимые части дают два соотношения. Один эквивалентен формуле (1.13) дифференцированной по  $\omega$ . Другой из-за граничного условия  $T_{xz} = 0$ ,

$$4\langle \bar{E} \rangle (V_E/V_g - 1) = \text{Im}[T_{zz}^* \partial_\omega v_z + v_z^* \partial_\omega T_{zz}] \Big|_{-d}^d - 2\alpha \int_{-d}^d \text{Im}[T_{ix}^* \partial_\omega v_i + v_i^* \partial_\omega T_{ix}] dz \quad (1.19)$$

или  $(\partial\omega/\partial k)(1 + \delta) = V_E$ , где выражение для  $\delta$  следует из уравнения (1.19),  $\partial_\omega = \partial/\partial\omega$ . В предельном случае свободной пластины производная  $\partial\omega/\partial k$  имеет смысл групповой скорости для волн Лэмба, и она точно равна скорости энергии  $V_E$  [47, 76]. Как видно из уравнения (1.19) последнее упомянутое равенство нарушается для вытекающих мод Лэмба. Степень нарушения напрямую связана с постоянной затухания  $\alpha$  для волн утечки. По мере того как  $\alpha$  увеличивается, отклонение  $V_E$  от  $\partial\omega/\partial k$  становится все больше и больше. Это особенно актуально в диапазоне частот ниже  $fh \approx 2800$  m/s на рис. 1.12, где распространяющаяся ветвь моды Лэмба превращается в комплексную ветвь, которая соответствует нераспространяющейся моде в свободной пластине и которая характеризуется значительно увеличенными значениями  $\alpha$ .

С другой стороны, если пределы интегрирования в формуле (1.19) распространяются на  $\pm\infty$ , это дает следующее альтернативное выражение для суммы полных энергий в пластине и жидкости

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{E} dz = (\alpha/2) \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im}[T_{ix}^* \partial_{\omega} v_i + v_i^* \partial_{\omega} T_{ix}] dz. \quad (1.20)$$

Другая методика расчета групповой скорости вытекающих волн Лэмба в терминах производных от фазы коэффициента отражения для объемных волн, отраженных от пластины в жидкости, была разработана в статье [41]. Его результаты качественно согласуются с кривыми на рис. 1.12. Однако эта процедура не является прямым расчетом потока энергии в отличие от нашего исследования, которое впервые дает надежную и однозначную идентификацию волновых мод как обратных. Хотя результаты, представленные выше, относятся к случаю симметричной нагрузки жидкости на пластину, можно ожидать, что большая часть общих выводов настоящего исследования применима к антисимметричному случаю, когда две поверхности пластины находятся в контакте с разными жидкостями.

Углубленное обсуждение возможных механизмов существования обратных мод в изотропных и анизотропных пластинах выходит за рамки данной главы. Тем не менее, стоит отметить, что наличие локальных вогнутостей на поверхности медленности объемной волны в анизотропных пластинах является дополнительным и очень важным фактором, который может способствовать появлению таких волн, значительно расширяя границы их области существования [9, 10], [89, 90]. С другой стороны, три основных аналитических соотношения, это уравнения (1.12), (1.15) и (1.19) доказаны здесь без предположения об изотропии пластины. Следовательно, они должны быть действительны и в общем анизотропном случае.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

Используя процедуру сведения уравнения движения и связанного электростатического уравнения к задаче на собственные значения был рассчитан спектр акустических волн в пластине  $YX$  ниобата лития. Было обнаружено, что в диапазоне частот  $hf = 3 - 4$  км/с существует обратная мода Лэмба. Зная данные дисперсионные зависимости, были оценены длины волн, которые захватывают как прямую, так и обратную части спектра этой моды Лэмба. Рассчитанные длины волн позволяют оценить величину периода штырей резонатора для возбуждения обратных мод в эксперименте. С помощью набора таких резонаторов на ВШП экспериментально наблюдались обратные волны Лэмба в пластине  $YX$  ниобата лития. По изменению положения максимальных значений импеданса системы для разных периодов ВШП определялось мода, возбуждаемая в резонаторе. Также с помощью измеренных значений можно определить фазовую скорость моды. Для полной верификации эксперимента проводилось математическое моделирование, основанное на методе конечных элементов реализованного в коммерческом пакете COMSOL. В конечном счете, оба теоретических метода дают хорошее согласие с экспериментальными измерениями.

Также в данной главе проанализированы энергетические характеристики обратных вытекающих мод Лэмба. Данные свойства необходимо знать, так как для хорошего акустического контакта зачастую пластины погружается в жидкость. Обратные волны по определению имеют большие значения фазовой скорости, так как зарождаются вблизи точек отсечки, что приводит к возникновению для них волн утечки. Теоретически предсказаны необычные характеристики обратных вытекающих волн Лэмба. Поля обратных вытекающих волн в жидкости убывают в глубину, а не нарастают. Основываясь на данном выводе, а также на законе сохранения энергии показано, что при интегрировании усредненного потока энергии

поперек волновода получается, что данный интеграл равен нулю. Предложен способ определения скорости потока энергии для обратных волн Лэмба, на основе ограничения области интегрирования только толщиной пластины. В данной главе аналитически получены общие выражения для коэффициентов затухания и скорости переноса энергии обратных вытекающих волн Лэмба.

## ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ

### § 1. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЧИСТО СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ НИОБАТА КАЛИЯ Y- И X- СРЕЗОВ

В ромбических пьезоэлектрических кристаллах класса  $2mm$ , к которым относится ниобат калия, пьезоактивные чисто сдвиговые волны могут распространяться только в плоскости  $XOY$  при условии, что их поляризация ортогональна этой плоскости. Уравнение движения и уравнение Пуассона для этих волн в квазиэлектростатическом приближении в декартовой системе координат имеют вид

$$c_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + e_{24} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \rho \ddot{u}, \quad (2.1)$$

$$-\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varepsilon_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + e_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.2)$$

где  $u = u_3$  - вектор смещения частиц среды под действием сдвиговых волн,  $\varphi$  - потенциал электрического поля, сопровождающего акустические волны,  $\rho$  - плотность среды,  $c_{44}, c_{55}$  - сдвиговые упругие модули,  $e_{15}, e_{24}$  - пьезоконстанты,  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  - диэлектрические проницаемости. Поиск решения дифференциальных уравнений (2.1), (2.2) в виде плоских гармонических волн с циклической частотой  $\omega$  и волновым вектором  $k$ , бегущих вдоль оси  $X$  и экспоненциально изменяющихся с показателем  $\xi$  по оси  $Y$ ,  $u = u_0 \exp(ikx + \xi y - i\omega t)$ ,  $\varphi = \varphi_0 \exp(ikx + \xi y - i\omega t)$ , приводит к линейным алгебраическим уравнениям относительно амплитудных коэффициентов  $u_0, \varphi_0$

$$\begin{vmatrix} -c_{55}k^2 + c_{44}\xi^2 + \rho\omega^2 & -e_{15}k^2 + e_{24}\xi^2 \\ -e_{15}k^2 + e_{24}\xi^2 & \varepsilon_{11}k^2 - \varepsilon_{22}\xi^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ \varphi_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3)$$

Система (2.3) имеет ненулевое решение в случае, когда определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю. Отсюда следует

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = 0, \quad \xi_{1,3}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.4)$$

где  $a = c_{44}\varepsilon_{22} + e_{24}^2$ ,  $b = \rho\omega^2\varepsilon_{22} - 2e_{24}e_{15}k^2 - c_{44}\varepsilon_{11}k^2 - c_{55}\varepsilon_{22}k^2$ ,  $c = (c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)k^4 - \rho\omega^2\varepsilon_{11}k^2$ , решению  $\xi_1^2$  в (2.4) соответствует знак «+» перед квадратным корнем, а решению  $\xi_3^2$  - знак «-». Полное решение уравнений (2.4) включает четыре корня  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ , связанные между собой соотношениями  $\xi_2 = -\xi_1, \xi_4 = -\xi_3$ . В общем случае поля в пластине представляются в виде суммы четырех парциальных волн, соответствующих этим четырем корням

$$u = \sum_{j=1}^4 A_j \exp(\xi_j y) \exp(ikx - i\omega t), \quad (2.5)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^4 A_j G_j \exp(\xi_j y) \exp(ikx - i\omega t), \quad (2.6)$$

где  $G_j = \varphi_0/u_0 = (e_{24}\xi_j^2 - e_{15}k^2)/(\varepsilon_{22}\xi_j^2 - \varepsilon_{11}k^2)$ ,  $A_j$  - амплитуды смещений парциальных волн. Далее будем считать, что на средней плоскости пластины  $y = 0$ .

На верхней и нижней свободных поверхностях пластины используем стандартные граничные условия отсутствия нормальных напряжений  $T_{23} = 0$  и непрерывности электрического импеданса  $Z = E_1/D_2$ , где  $E_1$  - тангенциальная компонента напряженности электрического поля,  $D_2$  - нормальная компонента вектора электрической индукции. Эти величины в квазиэлектростатическом приближении ( $E_j = -\partial\varphi/\partial x_j$ ) выражаются через поля в пьезоэлектрике следующим образом

$$T_{23} = c_{44} \frac{\partial u}{\partial y} + e_{24} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{-ik\varphi}{-\varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_{24} \frac{\partial u}{\partial y}}. \quad (2.7)$$

Внешнюю среду считаем вакуумом. Ее импеданс на верхней границе  $Z = -i/\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная) при условии, что ось  $Y$

направлена вверх, а на нижней поверхности импеданс по модулю такой же, но имеет противоположный знак.

Подставляя решение в виде суммы четырех парциальных волн (2.5), (2.6) в указанные граничные условия, получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^4 (c_{44} + G_j e_{24}) \xi_j \exp(\xi_j d) A_j = 0, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^4 (c_{44} + G_j e_{24}) \xi_j \exp(-\xi_j d) A_j = 0, \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^4 (-\varepsilon_{22} \xi_j G_j + e_{24} \xi_j - \varepsilon_0 k G_j) \exp(\xi_j d) A_j = 0, \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^4 (-\varepsilon_{22} \xi_j G_j + e_{24} \xi_j + \varepsilon_0 k G_j) \exp(-\xi_j d) A_j = 0, \quad (2.11)$$

где  $d$  – полутолщина пластины. Складывая и вычитая между собой уравнения (2.8), (2.9) и аналогично (2.10), (2.11), с учетом взаимосвязей между корнями  $\xi_j$  получаем

$$\begin{vmatrix} (c_{44} + G_1 e_{24}) \xi_1 \operatorname{ch}(\xi_1 d) & (c_{44} + G_3 e_{24}) \xi_3 \operatorname{ch}(\xi_3 d) \\ (e_{24} - \varepsilon_{22} G_1) \xi_1 \operatorname{ch}(\xi_1 d) - \varepsilon_0 k G_1 \operatorname{sh}(\xi_1 d) & (e_{24} - \varepsilon_{22} G_3) \xi_3 \operatorname{ch}(\xi_3 d) - \varepsilon_0 k G_3 \operatorname{sh}(\xi_3 d) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 - A_2 \\ A_3 - A_4 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.12)$$

$$\begin{vmatrix} (c_{44} + G_1 e_{24}) \xi_1 \operatorname{sh}(\xi_1 d) & (c_{44} + G_3 e_{24}) \xi_3 \operatorname{sh}(\xi_3 d) \\ (e_{24} - \varepsilon_{22} G_1) \xi_1 \operatorname{sh}(\xi_1 d) - \varepsilon_0 k G_1 \operatorname{ch}(\xi_1 d) & (e_{24} - \varepsilon_{22} G_3) \xi_3 \operatorname{sh}(\xi_3 d) - \varepsilon_0 k G_3 \operatorname{ch}(\xi_3 d) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 + A_2 \\ A_3 + A_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

Эти две системы уравнений имеют ненулевые решения в двух случаях. В первом случае обращается в ноль определитель системы (2.12), а входящие в (2.13) комбинации коэффициентов  $A_1 + A_2$  и  $A_3 + A_4$  равняются нулю. Этот случай описывает антисимметричные моды пластины. Во втором случае симметричных мод обращается в ноль определитель системы (2.13), а равняются нулю комбинации коэффициентов  $A_1 - A_2$  и  $A_3 - A_4$ , входящие в (2.12). Условия равенства детерминантов нулю дают дисперсионные уравнения задачи, которые можно записать в виде одной общей формулы

$$\frac{(c_{44} + e_{24} G_1) \xi_1 \{ (e_{24} - \varepsilon_{22} G_3) \xi_3 - \varepsilon_0 k G_3 [\operatorname{th}(\xi_3 d)]^\pm \}}{(c_{44} + e_{24} G_3) \xi_3 \{ (e_{24} - \varepsilon_{22} G_1) \xi_1 - \varepsilon_0 k G_1 [\operatorname{th}(\xi_1 d)]^\pm \}} = 1. \quad (2.14)$$

Знак плюс в степени тангенса соответствует антисимметричным модам, а знак минус – симметричным. Решения для полей антисимметричных мод  $u_a, \varphi_a$  и симметричных мод  $u_s, \varphi_s$  имеют вид

$$\begin{aligned} u_a &= 2[A_1 \text{sh}(\xi_1 y) + A_3 \text{sh}(\xi_3 y)] \exp(ikx - i\omega t), \\ \varphi_a &= 2[A_1 G_1 \text{sh}(\xi_1 y) + A_3 G_3 \text{sh}(\xi_3 y)] \exp(ikx - i\omega t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} u_s &= 2[A_1 \text{ch}(\xi_1 y) + A_3 \text{ch}(\xi_3 y)] \exp(ikx - i\omega t), \\ \varphi_s &= 2[A_1 G_1 \text{ch}(\xi_1 y) + A_3 G_3 \text{ch}(\xi_3 y)] \exp(ikx - i\omega t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

При переходе от пластин  $Y$ -среза к пластинам  $X$ -среза приведенные формулы сохраняют свой структурный вид при условии, что координаты  $x$  и  $y$ , а также материальные константы  $c_{55}, e_{15}, \varepsilon_{11}$  и  $c_{44}, e_{24}, \varepsilon_{22}$  взаимно меняются местами.

Дисперсионные уравнения (2.14) упрощаются в ряде частных случаев, которые рассмотрим далее. Известно, что при стремлении произведения  $hf$  к бесконечности происходит вырождение низших волноводных мод в пару бездисперсионных поверхностных волн, распространяющихся по противоположным поверхностям пластины [2]. Это позволяет в данном предельном случае из полученных результатов найти асимптотическое решение и сравнить его с известным решением для поверхностных волн. Для этого учтем, что в обсуждаемом предельном случае аргументы обоих тангенсов, входящих в дисперсионные уравнения (2.14), являются в общем случае комплексными величинами и стремятся по модулю к бесконечности. Тогда тангенсы можно заменить единицами, что в результате дает дисперсионное уравнение для поверхностных сдвиговых волн (волн Гуляева-Блюстейна) в пьезоэлектрическом ромбическом кристалле  $Y$ -среза. Ранее выражение для скорости этих волн в данном частном случае было представлено без вывода в работе [91]. Однако его корректность вызывает сомнение по следующей причине. Выражение из [91] должна давать как частный предельный случай значение для скорости волн Гуляева-Блюстейна на металлизированной поверхности в гексагональных кристаллах. Согласно формуле (2.11) из [92] это соотношение имеет вид

$\rho v^2 = c_{44}(1+K^2)(1-K^4)$ , где  $K^2 = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ . Но из выражения работы [91] в этом предельном случае следует иной результат  $\rho v^2 = c_{44}(1+2K^2)/(1+K^2)$ , что показывает ошибочность этого выражения. Поскольку других явных формул для скорости волн Гуляева-Блюстейна на базовых срезах ромбических пьезокристаллов в литературе не приводится, т.е. отсутствует возможность сравнения (2.14) с известными результатами, то далее асимптотика полученного решения в виде поверхностных волн не рассматривается.

Другой предельный случай, который позволяет сравнить дисперсионные уравнения (2.14) с известными результатами, это - переход от ромбических кристаллов к гексагональным класса *btt*,  $b\infty$ . Для этого в (2.14) следует положить  $c_{44} = c_{55}$ ,  $e_{15} = e_{24}$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$  и определить предельные значения коэффициентов  $G_1, G_3$ . Особенностью обсуждаемого перехода является то, что в этом случае корень  $\xi_1^2$  оказывается равным  $k^2$ . Тогда формальная подстановка данного корня в выражение для  $G_1$  приводит к неопределенности типа  $0/0$ . Раскрытие неопределенности показывает, что  $G_1$  стремится к  $\infty$ . Дисперсионные уравнения, полученные путем такого предельного перехода с учетом отмеченных особенностей, полностью совпадают с уравнениями (35), (37) работы [93], что свидетельствует о правильности формул (2.14).

Еще один предельный случай сильного упрощения дисперсионных соотношений (2.14) относится к точкам рождения высших мод, соответствующих толщинным резонансам пластины. В этих точках фазовая скорость мод пластины обращается в бесконечность, а волновое число в ноль, что дает  $\xi_1 = 0$ . Но при подстановке в  $G_1$  значений  $k = 0$ ,  $\xi_1 = 0$  возникает особенность типа  $0/0$ . Поэтому для нахождения корректного предельного значения  $G_1$  необходимо исследовать асимптотическое поведение данного множителя при  $k \rightarrow 0$ . В этом пределе  $\xi_1^2 \approx \varepsilon_{11}k^2/\varepsilon_{22}$ ,

т.е.  $\xi_1 \rightarrow 0$ , а  $\xi_3^2 \approx -\rho\omega^2/[c_{44}(1+K_2^2)]$ , т.е. конечно. Здесь  $K_2^2 = e_{24}^2/c_{44}\varepsilon_{22}$  - это квадрат коэффициента электромеханической связи для объемных сдвиговых волн, распространяющихся в направлении оси  $Y$ . Использование представленного асимптотического выражения для  $\xi_1$  показывает, что  $G_1 \rightarrow \infty$ . Предельное же значение  $G_3$  не имеет особенностей и равно  $e_{24}/\varepsilon_{22}$ . Тем не менее, это предельное значение обращает в ноль множитель  $(e_{24} - \varepsilon_{22}G_3)$ , входящий в (2.14), а стремится к нулю этот множитель как  $k^2$ . Подставляя все эти выражения в (2.14) и учитывая величины, не выше первого порядка малости по  $k$ , приходим к заключению, что в точках толщинных резонансов  $[\text{th}(\xi_3 d)]^\pm \rightarrow \infty$ . Отсюда следуют искомые условия резонансов:

$$\text{для симметричных мод } fh = n\sqrt{\frac{c_{44}(1+K_2^2)}{\rho}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

$$\text{и для антисимметричных мод } fh = \left(m - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{c_{44}(1+K_2^2)}{\rho}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.18)$$

где  $n, m$  - номера мод,  $h = 2d$  - толщина пластины. Эти условия соответствуют случаю, когда по толщине пластины для симметричных мод укладывается четное число полуволн, а для антисимметричных - нечетное. Подчеркнем, что точки толщинных резонансов располагаются в спектре рассматриваемых нормальных волн пластины со свободной поверхностью эквидистантно в отличие от случая антисимметричных мод пьезоэлектрической пластины с закороченными поверхностями [93, 76].

Здесь уместно обратить внимание на два разных подхода, используемых в литературе для нумерации мод пластин. Согласно одному из них [94] симметричные и антисимметричные моды нумеруются независимо друг от друга, как это сделано в формулах (2.17), (2.18). В этом случае сдвиговая мода без отсечки обычно считается нулевой, а моды с отсечкой нумеруются, начиная с номера 1. Другой известный альтернативный подход - это сплошная нумерация мод, начиная с нулевой,

без их разделения по симметрии волнового поля [76]. Первый вариант традиционен и вполне оправдан, когда изучаются симметричные пластины с одинаковыми граничными условиями на верхней и нижней поверхностях. Именно этот вариант используется в настоящей работе. Второй вариант предпочтителен в тех задачах, где допускается введение асимметрии относительно средней плоскости пластины, приводящей к связи мод и невозможности разделения решения по типу симметрии. В зависимости от выбранного варианта следует изменять множитель в формуле для частот рождения высших мод. В формуле (2.18) множитель  $(m - 1/2)$  соответствует первому подходу. При использовании второго подхода для правильной нумерации мод этот множитель следует заменить на  $(n + 1/2)$ . Подчеркнем еще раз, что такая вариативность и неоднозначность нумерации мод возникает только для симметричных пластин, и она является следствием разделения задачи для таких пластин на две независимые части для семейств симметричных и антисимметричных мод.

Полученные дисперсионные уравнения (2.14) решались в случае границы пластины с вакуумом численно. Расчеты проводились с использованием значений материальных постоянных ниобата калия, измеренных в работе [95]. На рис. 2.1. приведены зависимости фазовых скоростей антисимметричных ( $A_1, A_2$ ) и симметричных ( $S_1, S_2$ ) нормальных мод от параметра  $hf$  для пластин  $Y$ - и  $X$ -срезов. Кривая для нулевой моды  $S_0$ , существующей при любых частотах, не приведена, поскольку обратные волны на этой ветви не существуют. Отметим, что данная мода изучалась ранее численно для базовых срезов ниобата калия в работе [96].

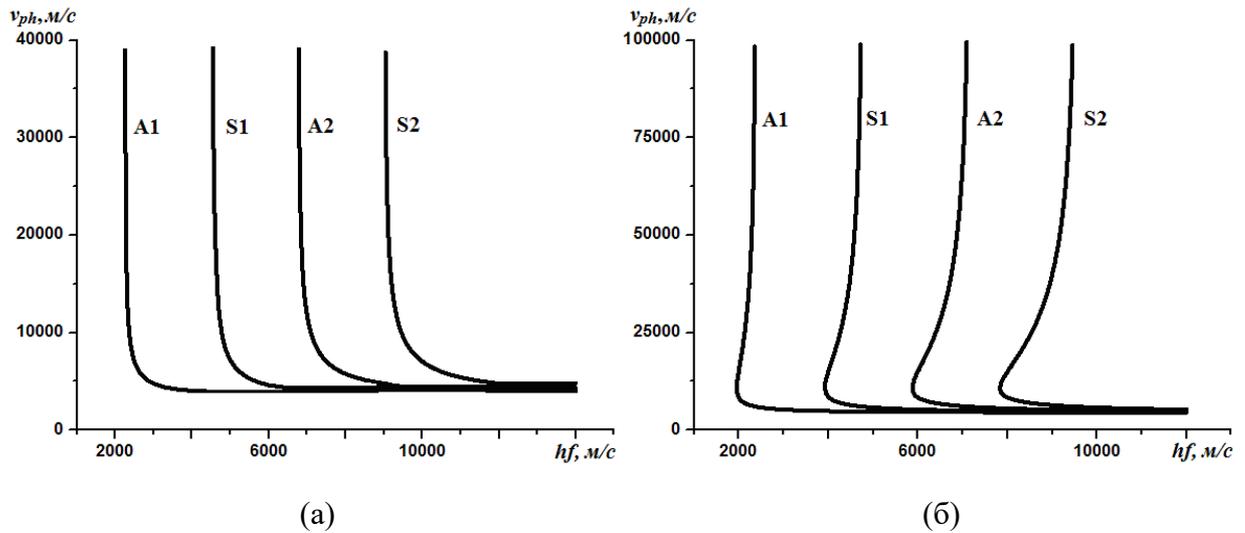


Рис. 2.1. Дисперсионные кривые для фазовых скоростей  $v_{ph}$  антисимметричных (A1, A2) и симметричных (S1, S2) мод в пластинах ниобата калия  $Y$ -среза (а) и  $X$ -среза (б);  $h$  – толщина пластины,  $f$  – частота.

Из (рис. 2.1а) видно, что качественное поведение дисперсионных кривых для пластины  $Y$ -среза подобно изотропному случаю, т.е. высшие моды рождаются на частотах толщинных резонансов, для которых скорость движения волнового фронта вдоль поверхности пластины равна бесконечности, а затем фазовая скорость мод монотонно убывает с ростом частоты. Иная картина наблюдается в спектре нормальных волн в пластине  $X$ -среза (рис. 2.1б). В этом случае дисперсионные кривые для высших мод после их рождения на частотах толщинных резонансов поворачиваются не вправо от точек рождения, а влево. В результате возникают частотные диапазоны с аномальной дисперсией, в которых фазовая скорость не падает, а растет с увеличением частоты. Отметим, что точки появления высших мод, представленных на рис. 2.1, совпали со значениями, рассчитанными по формулам толщинных резонансов (2.17), (2.18). Расчеты групповой скорости  $v_{gr} = d\omega/dk$  в диапазонах аномальной дисперсии дают отрицательные значения  $v_{gr}$  (рис. 2.2б) в отличие от мод пластины  $Y$ -среза, для которых  $v_{gr}$  всегда положительна (рис. 2.2а).

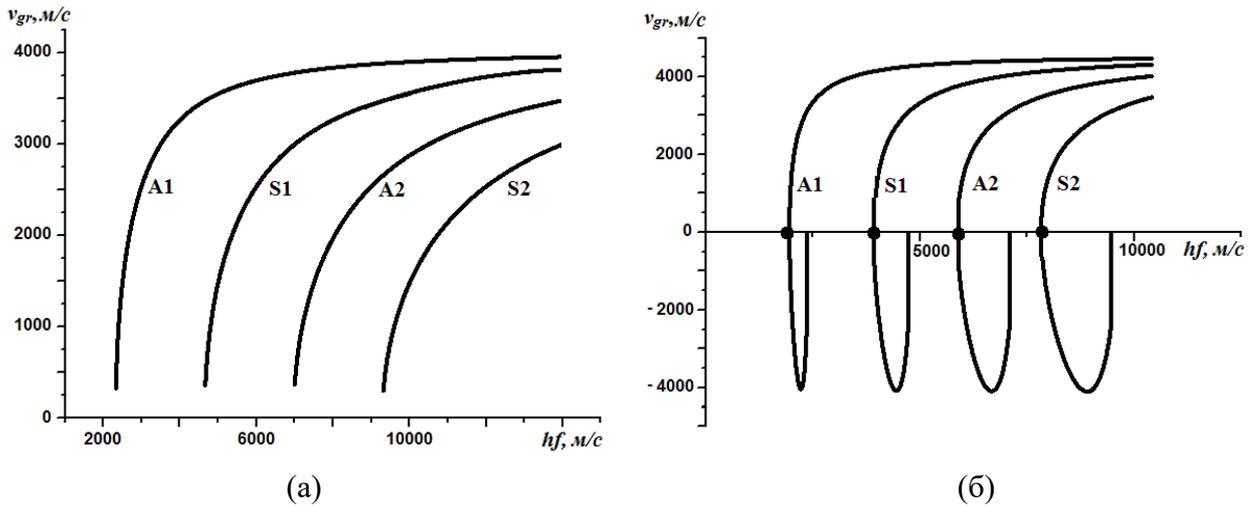


Рис. 2.2. Дисперсионные кривые для групповых скоростей  $v_{gr}$  антисимметричных (A1, A2) и симметричных (S1, S2) мод в пластинах ниобата калия Y-среза (а) и X-среза (б);  $h$  – толщина пластины,  $f$  – частота.

Диапазоны существования обратных волн ограничены точками, где групповая скорость обращается в ноль. Правые границы этих диапазонов соответствуют толщинным резонансам и бесконечным значениям фазовой скорости. На левых границах, выделенных жирными точками на рис. 2.2б, групповая скорость также обращается в ноль, но фазовая скорость конечна. Это свойство открывает интересные новые возможности для создания акустоэлектронных резонаторов на чисто сдвиговых волнах с нулевой групповой скоростью (см. ниже раздел). И левые, и правые границы диапазонов существования обратных волн располагаются для разных мод эквидистантно по горизонтальной оси. Но периоды повторения для левых и правых границ разные, что приводит к уширению обсуждаемых диапазонов с ростом номера волноводных мод. Максимальные по модулю значения отрицательной групповой скорости достигаются вблизи середины данных диапазонов, эти значения практически не зависят от номера моды и располагаются квазиэквидистантно по горизонтальной оси.

Представляет интерес рассмотреть распространение импульсов обратных волн в пластине. Для описания дисперсионных искажений волновых импульсов обычно достаточно использовать второе приближение теории дисперсии, в рамках которого форма импульсов описывается параболическим уравнением типа уравнения диффузии [97, 98]. Ранее, насколько известно автору настоящей работы, данный подход к волноводным модам упругих пластин не применялся. В качестве аналога коэффициента диффузии  $D$  в указанное параболическое уравнение входит производная  $D = -i d^2 k / d\omega^2 = -i d(v_{gr}^{-1}) / d\omega$ . Это параболическое уравнение описывает, в частности, как известно [98], распространение гауссова импульса с квадратичной модуляцией фазы. Длина дисперсионного расплывания такого импульса обратно пропорциональна коэффициенту  $D$ . График зависимостей  $hd^2k/d\omega^2$  от параметра  $hf$ , который определяет коэффициент  $D$  для изучаемых сдвиговых мод пластины X-среза, приведен на рис. 2.3. Из графиков, представленных на рис. 2.2б, 2.3 видно, что вблизи середины диапазонов существования обратных волн их групповая скорость достигает экстремума, а коэффициент  $D$  обращается в ноль, причем эти точки на горизонтальной оси располагаются квазиэквидистантно. Импульсы в этих условиях согласно теории дисперсии второго порядка распространяются без искажения своей формы.

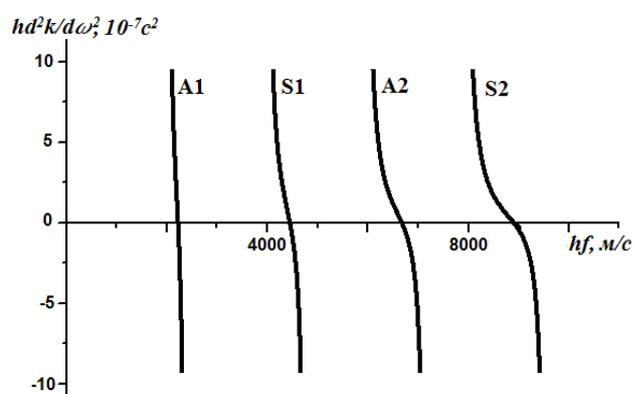


Рис. 2.3. Множитель  $d^2k/d\omega^2$ , входящий в коэффициент «диффузии» параболического уравнения для импульсов обратных антисимметричных (A1, A2) и симметричных (S1, S2) мод пластины ниобата калия X-среза.

Конечно, это не означает полного устранения дисперсионных искажений, поскольку является следствием приближенной теории. Тем не менее, это свойство предполагает возможность существенного уменьшения таких искажений. Наличие обсуждаемых экстремумов и обращение коэффициента  $D$  в ноль является качественно новым свойством чисто сдвиговых волн с отрицательной групповой скоростью, для прямых волн такое свойство отсутствует.

Проведенное исследование представляет не только научный интерес, но и практический для разработки акустоэлектронных устройств, основанных на новых принципах. В традиционных акустоэлектронных устройствах используются резонаторы на объемных акустических волнах и резонаторы на поверхностных акустических волнах (ПАВ), каждые из которых имеют свои достоинства и недостатки.

Для создания резонаторов на ПАВ требуются пьезокристаллы больших по площади размеров, чем для тонкопленочных резонаторов на объемных волнах. Это связано с тем, что помимо встречно-штыревого преобразователя (ВШП) для возбуждения и приема поверхностных волн в резонаторах на ПАВ используются отражающие решетки, занимающие дополнительную площадь поверхности пьезокристалла и отсутствующие в резонаторах на объемных волнах. В этом состоит одно из преимуществ резонаторов на объемных волнах.

С другой стороны, для возбуждения объемных волн с помощью собственного пьезоэффекта резонатора требуется расположить электроды на обеих поверхностях пластины. В некоторых случаях это нежелательно, например, когда резонаторы используются в качестве датчиков для измерения физических свойств проводящих жидкостей, поскольку такие жидкости могут закорачивать электроды. Резонаторы с ВШП на ПАВ свободны от этого недостатка. Указанный недостаток резонаторов объемных волн исчезает, если использовать дополнительные пластиночные пьезопреобразователи, располагаемые только на одной поверхности

резонаторной пластины. Но стоимость таких пьезопреобразователей может быть значительно выше, чем стоимость ВШП [99].

В работе [17] была предложена и реализована идея создания резонаторов на модах Лэмба с нулевой групповой скоростью. Такие резонаторы представляют собой устройства промежуточного класса, которые могут сочетать в себе достоинства описанных выше резонаторов известных типов. Волны Лэмба с нулевой групповой скоростью можно возбуждать, используя обычные встречно-штыревые преобразователи (ВШП), причем размеры пьезокристалла для резонатора могут быть минимизированы и ограничены только той поверхностью, что занимает ВШП. К возможным достоинствам рассматриваемых устройств относятся меньший размер пьезопластин, малая стоимость изготовления ВШП, возможность повысить рабочую частоту устройства без изменения периода ВШП за счет большей фазовой скорости обсуждаемых мод пластин по сравнению с поверхностными волнами, одностороннее расположение электродов. По-видимому, рассматриваемые устройства могут быть созданы не только на волнах Лэмба, но и на чисто сдвиговых волнах, изучаемых в настоящей работе. Актуальной задачей в связи с разработкой этих устройств является создание регулярных процедур, позволяющих упростить поиск кристаллов, срезов и направлений распространения, допускающих существование акустических мод с нулевой скоростью переноса энергии. Представленные выше результаты вносят вклад в решение данной задачи и демонстрируют, что для поиска обсуждаемых мод пластин и интерпретации получаемых результатов весьма полезной является информация о форме сечения поверхности медленности объемных акустических волн в кристаллах.

## **§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ**

Численные расчеты дисперсионных характеристик в предыдущем параграфе для чисто сдвиговых волн в пластинах ниобата калия  $X$ - и  $Y$ -срезов были ограничены первыми четырьмя низшими модами (двумя симметричными и двумя антисимметричными). Из приведенного выше графика и аналитических оценок следует, что левые границы диапазонов существования обратных волн на ветвях мод разного порядка располагаются по горизонтальной оси квазиэквидистантно, а правые – строго эквидистантно, но они имеют разный период повторения:  $\delta_l \approx 1952$  м/с для левых границ,  $\delta_r \approx 2421$  м/с для правых. Различие этих периодов и является очевидной причиной уширения диапазонов существования  $\Delta_p$  обратных волн на ветвях мод с фиксированным номером  $p$  при увеличении  $p$ :  $\Delta_p \approx (\delta_r - \delta_l)p$ . Уширение диапазонов приводит к тому, что начиная с пятой моды (моды А3) границы соседних диапазонов перекрываются друг с другом, приводя к формированию сплошного спектра обратных волн рис. 2.4. Это свойство должно существенно облегчить экспериментальное обнаружение и наблюдение таких волн.

Правые границы диапазонов существования обратных волн на ветвях мод с фиксированным номером соответствуют выполнению условий толщинных резонансов и появлению высших мод, имеющих на этих границах бесконечную фазовую и нулевую групповую скорости. Поведение решений дисперсионных уравнений при малом нарушении условий толщинных резонансов, а именно, направления смещений этих решений от точек рождения высших мод в сторону меньших или больших значений по оси  $fh$  и определяет появление или отсутствие обратных волн на ветвях высших мод. Для изучения такого поведения решений трансцендентных

дисперсионных соотношений [89, 90], были получены их асимптотические представления в виде двух первых членов разложения циклической частоты  $\omega$  по волновому числу  $k$  вблизи частот толщинных резонансов  $\omega_0$  как  $\omega \approx \omega_0 + \Delta\omega$ . Для членов (2.4), входящих в исходное точное дисперсионное соотношение (2.14) с точностью до величин второго порядка можно расписать

$$\xi_1 \approx \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}} k, \quad \xi_3 \approx \pm i \sqrt{\frac{\rho \varepsilon_{22} \omega_0^2}{a}} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{2\omega_0^2} - \frac{(2e_{24}e_{15} + c_{44}\varepsilon_{11} + c_{55}\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}k^2}{2\rho\varepsilon_{22}^2\omega_0^2} + \frac{(e_{24}^2 + c_{44}\varepsilon_{22})\varepsilon_{11}k^2}{2\rho\varepsilon_{22}^2\omega_0^2} \right). \quad (2.19)$$

Введем замену в (2.19) для разложения  $\xi_3 = \xi_{30} + \xi_3'$ , где постоянная  $\xi_{30}$  есть нулевой член разложения, под  $\xi_3'$  подразумеваются члены второго порядка малости. Используя эти представления можно получить разложения для гиперболических тангенсов, также входящих в изначальную точную формулу секулярного уравнения

$$\text{th}(\xi_1 d) \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}} kd, \quad \text{th}(\xi_3 d)^\pm \approx \frac{\pm i}{\xi_3' d} \quad (2.20)$$

Подставляя все полученные приближенные выражения, в точные дисперсионные уравнения (2.14), и затем, оценивая их порядком малости, выразим асимптотические представления, которые описывают дисперсионные кривые вблизи точек зарождения мод

$$\left( e_{24}^2 \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} - e_{24}e_{15} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}} k e_{24} \xi_{30} \frac{(\mp i)}{\xi_3' d} = \left( (e_{24}^2 + c_{44}\varepsilon_{22}) \xi_{30}^2 \right) \xi_{30} \left( \frac{e_{24}\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} - e_{15}k^2 \right) \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}} kd \right]^\pm. \quad (2.21)$$

Перепишем данные результаты в виде разложений частот по волновым числам до квадратичных членов включительно

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_0 e_{15}^2 k / d \rho \varepsilon_{11}^2 - [\varepsilon_{22} e_{15}^2 - (2e_{15}e_{24} + c_{44}\varepsilon_{11})\varepsilon_{11}] k^2 / \rho \varepsilon_{11}^2, \quad (2.22)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_{22} e_{15}^2 k^2 / \rho \varepsilon_{11}^2 - [\varepsilon_{22} e_{15}^2 - (2e_{15}e_{24} + c_{44}\varepsilon_{11})\varepsilon_{11}] k^2 / \rho \varepsilon_{11}^2, \quad (2.23)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_0 e_{24}^2 k / d \rho \varepsilon_{22}^2 - [\varepsilon_{11} e_{24}^2 - (2e_{24}e_{15} + c_{55}\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}] k^2 / \rho \varepsilon_{22}^2, \quad (2.24)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_{11} e_{24}^2 k^2 / \rho \varepsilon_{22}^2 - [\varepsilon_{11} e_{24}^2 - (2e_{24}e_{15} + c_{55}\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}] k^2 / \rho \varepsilon_{22}^2. \quad (2.25)$$

Здесь  $\rho$  - плотность среды;  $c_{44}, c_{55}$  - сдвиговые упругие модули;  $e_{15}, e_{24}$  - пьезоконстанты;  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  - диэлектрические проницаемости;  $d$  - полутолщина пластины;  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная. Формулы (2.22) и (2.23) относятся к  $X$ -срезу, а (2.24) и (2.25) - к  $Y$ -срезу. Симметричные моды описываются формулами (2.22) и (2.24), а антисимметричные - (2.23) и (2.25). Для  $X$ -среза  $\omega_0 = (\pi p / h) \sqrt{(c_{55} + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}) / \rho}$ , а для  $Y$ -среза  $\omega_0 = (\pi p / h) \sqrt{(c_{44} + e_{24}^2 / \varepsilon_{22}) / \rho}$  - значения толщинных резонансов.

Выражения (2.22)-(2.25) относятся к ромбическим кристаллам и включают в себя как частный предельный случай известные результаты для гексагональных пластин [29].

Уравнения (2.14) справедливы также в случае, когда нижняя и верхняя внешние полупространства характеризуются одинаковой эффективной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{eff} = D_n / k\phi$ . В частности, если внешняя среда представляет собой совершенную невязкую полупроводниковую жидкость, то  $\varepsilon_{eff} = 0$ . Для закороченных электрических граничных условий эффективная диэлектрическая проницаемость равна бесконечности  $\varepsilon_{eff} = \infty$ . В случае нулевого потенциала на границах пластины дисперсионные уравнения будут иметь вид

$$\frac{(c_{44} + e_{24}G_1)\xi_1 G_3 [\text{th}(\xi_3 d)]^\pm}{(c_{44} + e_{24}G_3)\xi_3 G_1 [\text{th}(\xi_1 d)]^\pm} = 1 \quad (2.26)$$

Асимптотические выражения для антисимметричной и симметричной мод в металлизированной пластине равны соответственно

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2e_{24}^2 / d^2 \rho - [\varepsilon_{11} e_{24}^2 - (2e_{24}e_{15} + c_{55}\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}] k_x^2 / \rho \varepsilon_{22}^2 \quad (2.27)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon_{11} e_{24}^2 k_x^2 / \rho \varepsilon_{22}^2 - [\varepsilon_{11} e_{24}^2 - (2e_{24}e_{15} + c_{55}\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}] k_x^2 / \rho \varepsilon_{22}^2 \quad (2.28)$$

В этом случае, как будет показано ниже, член, пропорциональный  $k_x^2$ , включает в себя коэффициент, равный кривизне поверхности медленности для объемных волн в вертикальном направлении.

Результаты численных расчетов точного дисперсионного уравнения фазовых и групповых скоростей для первых девяти высших мод в кристалле X-среза ниобата калия приведены на рис. 2.4. и 2.5. Также для сравнения на этих графиках изображены зависимости асимптотических разложений. Видно, что они имеют хорошее совпадение для фазовой и групповой скоростей вблизи толщинного резонанса, что демонстрирует обоснованность данных разложений. Видно, что начиная с 5 моды полосы частот существования обратных волн взаимно перекрываются, образуя непрерывный спектр обратных мод. Эта особенность должна значительно упростить будущую экспериментальную регистрацию изучаемых волн.

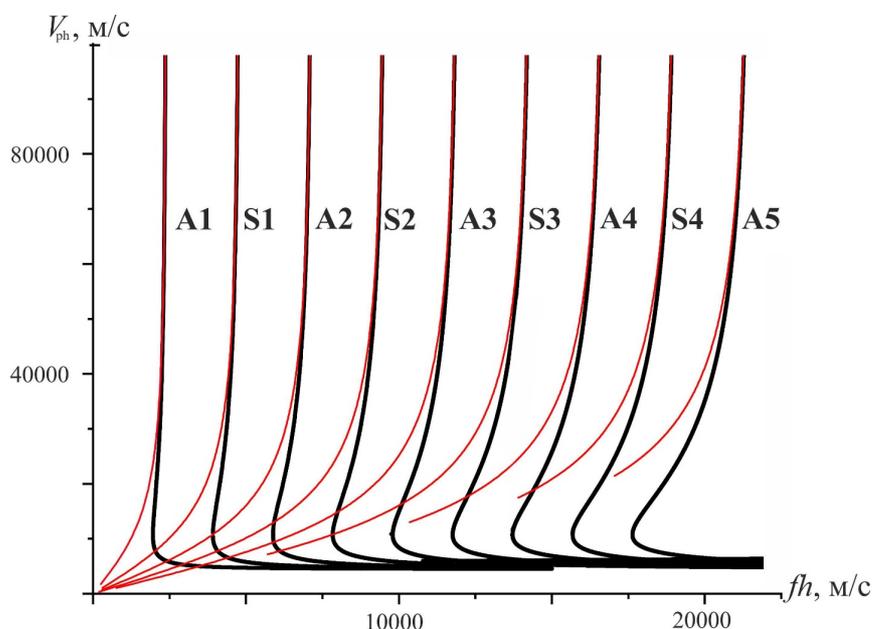


Рис. 2.4. Дисперсионные зависимости фазовых скоростей для первых девяти мод с отсечкой в пластине кристалла ниобата калия X-среза посчитанные с помощью численного счета (черные линии) и с помощью асимптотического разложения уравнений (красные линии).

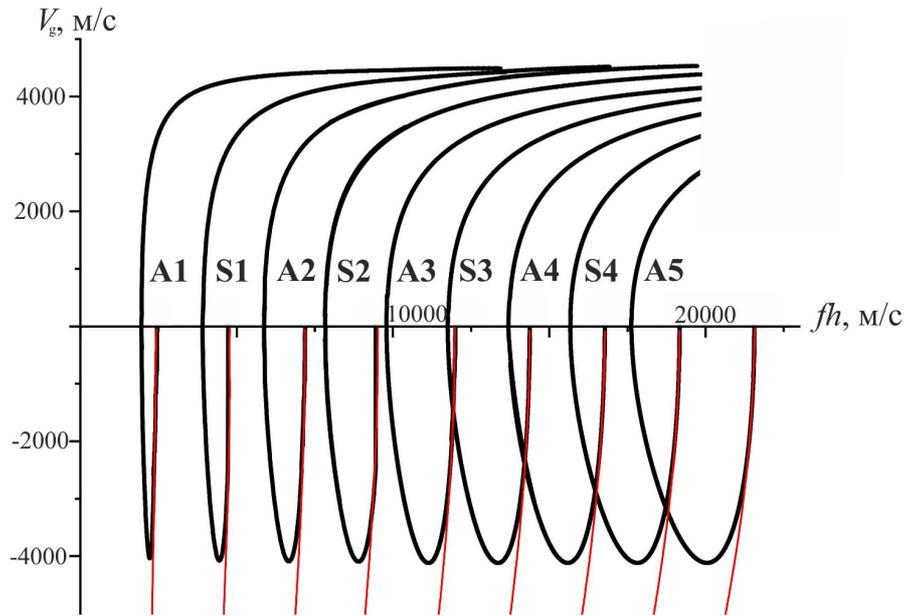


Рис. 2.5. Дисперсионные зависимости групповых скоростей для первых девяти мод с отсечкой в пластине кристалла ниобата калия X-среза посчитанные с помощью численного счета (черные линии) и с помощью асимптотического разложения уравнений (красные линии).

Более глубокое понимание особенностей проблемы обеспечивается применением метода теории возмущений, основанного на дивергентном соотношении. Это соотношение является строгим следствием исходных уравнений для возмущенной задачи (переменные, помеченные штрихом) и невозмущенной задачи (переменные рассматриваются как комплексно сопряженные). Если возмущенные и невозмущенные решения соответствуют одной и той же частоте, то дивергентное соотношение имеет вид [76]

$$\partial_x \{...\}_x + \partial_y \{...\}_y + \partial_z \{...\}_z = 0, \quad (2.29)$$

где  $\{..\}_i = \{-v_j^* T'_{ij} - v_j T_{ij}^* + \varphi^* \dot{D}'_i + \varphi \dot{D}_i^*\}$ ,  $v_j$  колебательная скорость частиц,  $T_{ij}$  являются упругими напряжениями,  $\varphi$  электрический потенциал,  $D_i$  электрическое смещение содержит только два члена в двумерном случае. Ненулевые компоненты упругих напряжений и электрического смещения связаны с ненулевыми компонентами упругих напряжений  $S_{ij}$  и электрического поля  $E_i = -\partial\varphi / \partial x_i$  по следующим уравнениям состояния

$$\begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 & -e_{24} \\ 0 & c_{55} & -e_{15} & 0 \\ 0 & e_{15} & \varepsilon_{11} & 0 \\ e_{24} & 0 & 0 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_4 \\ S_5 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Здесь  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  являются упругими постоянными, пьезоэлектрическими постоянными и диэлектрическими проницаемостями, сокращенные индексы используются для  $T_{ij}$ ,  $S_{ij}$ ,  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ijk}$ . Для чисто поперечных волн  $S_4 = \partial u / \partial y$ ,  $S_5 = \partial u / \partial x$ ,  $u$  сдвиг вдоль оси  $Z$ . Рассмотрим решения для толщинных резонансов в пластине как невозмущенное, а небольшие отклонения толщины - как возмущение. Уравнение движения и уравнение Пуассона в случае толщинных резонансов становятся одномерными

$$\rho \ddot{u} = c_{55} \partial^2 u / \partial x^2 + e_{15} \partial^2 \varphi / \partial x^2, \quad (2.31)$$

$$-\varepsilon_{11} \partial^2 \varphi / \partial x^2 + e_{15} \partial^2 u / \partial x^2 = 0. \quad (2.32)$$

Как можно заметить, в уравнениях (2.31), (2.32) отсутствуют члены, зависящие от координаты вдоль волновода. Поэтому эти уравнения имеют общее решение для распределений полей смещения и потенциала

$$u_z = u_0 \begin{Bmatrix} \sin k_0 x \\ \cos k_0 x \end{Bmatrix}, \quad \varphi = (e_{15} / \varepsilon_{11}) u + C_1 x + C_2, \quad (2.33)$$

где  $k_0 d = \pi n / 2$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\rho} / \sqrt{c_{55} + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}}$  волновое число поперечных волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ ,  $n$  нечетное целое число для антисимметричных мод или четное целое число для симметричных мод,  $C_1$  и  $C_2$  являются константами интегрирования. Для антисимметричных мод  $C_2 = 0$  из-за симметрии и  $C_1 = 0$  (допущение, отличное от нуля, приводит к бесконечной электрической энергии во внешнем объеме, что противоречит законам сохранения энергии). Для симметричных мод  $C_1 = 0$  из-за симметрии, но  $C_2 \neq 0$  (этот вопрос подробно обсуждается ниже).

Дивергентное соотношение может быть использовано для нахождения соотношения между возмущением толщины  $\Delta h$  и горизонтальной проекции

волнового вектора объемных волн, который на самом деле является волновым вектором  $k$  волноводных мод. Для этого соотношение (2.29) интегрируется по толщине пластины.

$$\partial_y \int_{-d}^d \{\dots\}_y dx + \{\dots\}_x \Big|_{-d}^d = 0, \quad (2.34)$$

где одна подынтегральная функция имеет вид

$$\{\dots\}_y = i\omega \partial_y \{-(c_{44}u' + e_{24}\varphi')u^* + \varphi^*(-\varepsilon_{22}\varphi' + e_{24}u')\}, \quad (2.35)$$

а второй член представлен как

$$\{\dots\}_x = -i\omega^3 \rho 2u'u^* \Delta d - i2\omega\varphi^* \varepsilon_0 |k| \varphi' \text{ при } x = d \quad (2.36)$$

Учитывая, что частота  $\omega$  и половина толщины участвуют в секулярном уравнении только как произведение, то существует следующая простая связь между их относительными возмущениями  $\Delta\omega / \omega = \Delta d / d$ . С другой стороны,  $\Delta\omega$  можно заменить на  $\Delta\omega \approx (\omega^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0^2$ . Таким образом, механический вклад в (2.35) соответствует двум частотным слагаемым в асимптотическом разложении. Электрический вклад в (2.36) дает нулевой вклад для симметричных мод, так как для них  $\varphi = 0$  при  $x = d$ . С другой стороны, его вклад для антисимметричных мод отличен от нуля и точно равен соответствующему члену линейного по  $k$  в асимптотическом разложении выше.

Если электрический потенциал связан со смещением частиц по соотношению  $\varphi = e_{15}u / \varepsilon_{11}$ , тогда интеграл в (2.34) будет одинаковым как для антисимметричной, так и для симметричной мод и равен

$$\int_{-d}^d \partial_y \{\dots\}_y dx = ik^2 \omega u_0^2 d (c_{44} + 2e_{15}e_{24} / \varepsilon_{11} - e_{15}^2 \varepsilon_{24} / \varepsilon_{11}^2). \quad (2.37)$$

Однако упомянутое соотношение включает дополнительный член для симметричных мод, пропорциональный константе интегрирования  $C_2$ :

$$\varphi = e_{15}u / \varepsilon_{11} + C_2. \quad (2.38)$$

Эту константу можно найти из следующих соображений. Вне пьезоэлектрической пластины существует только горизонтальный

электрический поток энергии. Его интегральное по вертикальной координате значение равно

$$\int_d^{\infty} \operatorname{Re}(i\omega\varphi^* D_y) dx + \int_{-d}^{-\infty} \operatorname{Re}(i\omega\varphi^* D_y) dx. \quad (2.39)$$

Вне кристалла потенциал электрического поля описывается уравнением Пуассона, которое имеет решение  $\varphi = \varphi(\pm d) \exp(iky \mp kx + kd)$ . Вычисление интеграла показывает, что горизонтальный поток энергии пропорционален произведению  $\varepsilon_0 \omega |\varphi(\pm d)|^2$ . При приближении к толщинному резонансу горизонтальный поток энергии исчезает, что возможно только если  $\varphi(\pm d) \rightarrow 0$ . Из условия  $\varphi(\pm d) = 0$  находим, что  $C_2 = -e_{15} u(\pm d) / \varepsilon_{11}$ . Это приводит к появлению дополнительного члена в (2.37), который точно соответствует соответствующему члену в квадрате для симметричных мод при асимптотическом разложении.

Таким образом, все используемые методы полностью согласуются между собой и, кроме того, они дают совпадающие аналитические формулы.

### **§ 3. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН**

Представляет интерес разобраться с причинами, по которым согласно проведенным численным расчетам для одного из рассматриваемых срезов, а именно  $X$  - среза ниобата калия, обратные сдвиговые волны существуют, а для  $Y$  - среза они отсутствуют, притом, что для обоих срезов электромеханическая связь для сдвиговых волн весьма сильна. Для объяснения этого результата имеет смысл более детально рассмотреть известные свойства двух парциальных объемных волн, которые составляют четырехпарциальное решение (2.5), (2.6) для мод пластин. Одним из таких свойств является отрицательное смещение пучка объемных сдвиговых волн при наклонном отражении от границы в гексагональных пьезоэлектриках

[100]. Исходя из анализа этого эффекта и результатов работ [31, 98], можно сделать вывод, что anomальное отрицательное смещение при отражении испытывают не только пучки, но и потоки энергии, и волновые лучи, относящиеся к плоским волнам, входящим в решение (2.5), (2.6). Схематически и упрощенно такое смещение демонстрируются на рис. 2.6 для трех возможных вариантов, соответствующих уменьшению угла отклонения волнового вектора объемных парциальных волн от нормали к поверхности кристалла.

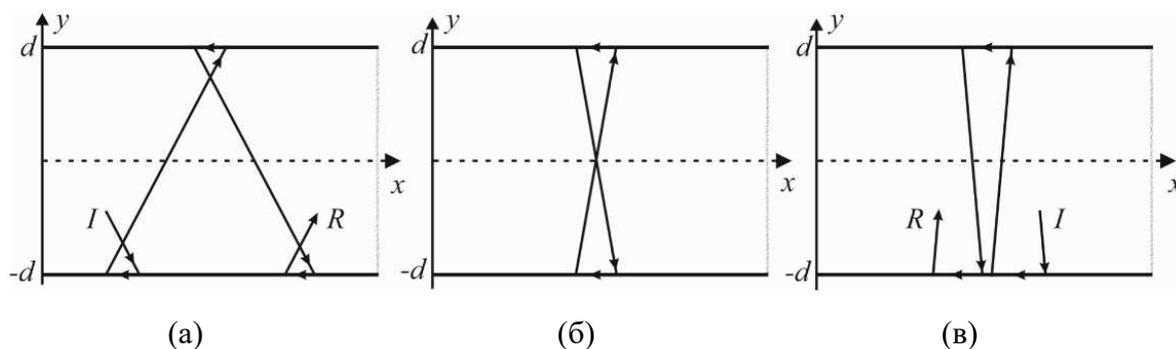


Рис. 2.6. Картины наклонного отражения лучей объемных сдвиговых волн с отрицательным смещением от верхней границы гексагональной пьезоэлектрической пластины толщиной  $h$ , соответствующие образованию прямой волноводной моды (а), моды с нулевой групповой скоростью (б), обратной моды (в).

Упрощение здесь связано с тем, что из-за существования неоднородных волн прямолинейность потоков энергии вблизи поверхности должна нарушаться, поэтому эти рисунки поясняют только интегральный эффект отражения. При реализации первого варианта (рис. 2.6а) волноводная мода в пластине будет являться прямой волной, во втором варианте (рис. 2.6б) – волной с нулевой групповой скоростью, в третьем (рис. 2.6в) – обратной волной. С увеличением относительной толщины пластины (толщины, выраженной в длинах волн) варианты (б) и (в) плавно трансформируются в вариант (а). Поэтому такой поверхностный механизм для толстой пластины по сравнению с длиной волны, или, что эквивалентно, для высших мод не обеспечивает формирования обратных волн. Для низших мод он наоборот может служить причиной появления обратных волн.

Вторая причина возникновения обратных мод связана с вогнутостью сечения поверхности медленности (рис. 2.7). Такая вогнутость существует для сдвиговых объемных волн вблизи оси  $X$  в кристаллах ниобата калия вследствие влияния anomalно сильного пьезоэффекта.

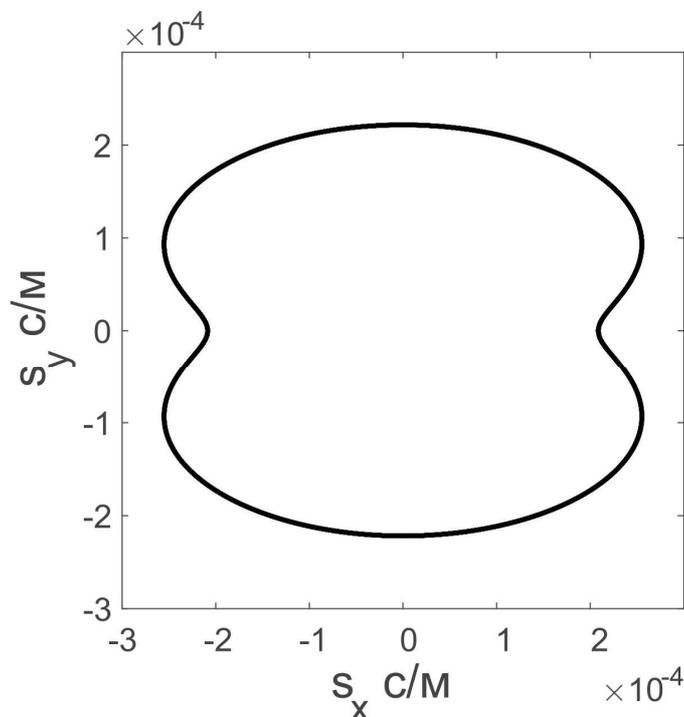


Рис. 2.7. Поверхность медленности объемных чисто сдвиговых волн для ниобата калия в плоскости  $YX$ .

Удобным свойством поверхности медленности является то, что нормаль к этой поверхности определяет направление групповой скорости и, соответственно, направление потоков энергии. В случае, когда эта вогнутость ориентирована по нормали к поверхности пластины, а это имеет место для  $X$ -среза (рис. 2.8б), возникает качественно новая ситуация по сравнению с анизотропным случаем, для которого вогнутость в направлении нормали к поверхности пластины отсутствует (рис. 2.8а). А именно, при отклонении волнового вектора от нормали к поверхности поток энергии поворачивается не в ту сторону, что волновой вектор, а в противоположную [10]. В результате для двухпарциальной части решения в виде объемных волн, входящей в полное четырехпарциальное решение, поток энергии вдоль поверхности направлен в отрицательном направлении

по отношению к направлению проекции волновых векторов на ось пластины.

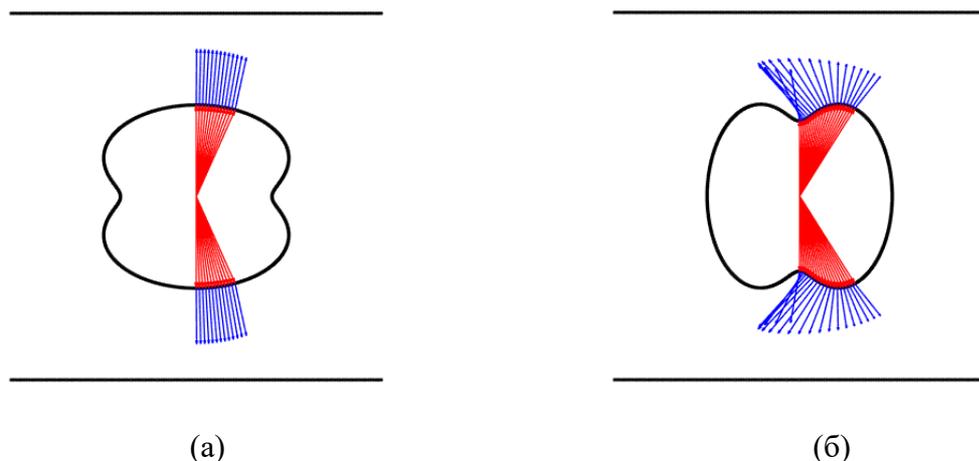


Рис. 2.8. Сечения поверхности медленности объемных сдвиговых волн сагиттальными плоскостями в пластинах кристалла ниобата калия  $Y$ - и  $X$ -срезов (а и б, соответственно). В области вогнутости возникает разнонаправленность векторов  $\vec{s} = 1/\vec{v}_{ph}$  и групповой скорости  $\vec{v}_{gr}$  относительно горизонтальной оси (а) и вертикальной оси (б).

А эта проекция и является как раз волновым вектором нормальных мод. Два других решения в виде неоднородных волн, входящие в (2.5), (2.6), имеют заметную амплитуду только вблизи поверхности пластины, а в объеме они экспоненциально малы, и поэтому их вкладом в общую энергетическую картину в этой области можно пренебречь. Следовательно, влияние данного механизма должно проявляться тем сильнее, чем толще по сравнению с длиной волн пластина, или, чем выше номер моды. Для пластин  $X$ -среза на существование обратных волн могут оказывать влияние оба указанных механизма. Из результатов численных расчетов для данного среза следует, что с увеличением номера моды диапазоны существования обратных волн не уменьшаются, а увеличиваются (рис. 2.4). Этим изучаемые волны кардинально отличается от известных обратных волн Лэмба в изотропных пластинах, которые существуют только на ветвях низших мод (в частности, на первой симметричной моде [3]). Следует отметить, что аналогичная закономерность уширения диапазонов существования обратных волн была выявлена ранее для волн Лэмба в пластине кристалла парателлурифта  $Y$ -среза [9], для которого имеет место сильно выраженная вогнутость поверхности

медленности в направлении нормали к пластине. Из рис. 2.4 можно также сделать вывод, что доминирующим для  $X$ -среза является второй из обсуждаемых механизмов.

Для существования обратных волн необходимо, чтобы частота  $\omega$  уменьшалась с ростом  $k$ , что напрямую определяется знаками слагаемых в формулах (2.22)-(2.25). Анализ показывает, что вторые слагаемые во всех приведенных формулах пропорциональны кривизне кривой медленности в вертикальном направлении, т.е. в направлении нормали к поверхности пластины. Так, например, кривизна в направлении  $Y$  в кристаллографических осях равна величине

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{11}e_{24}^2 - (2e_{24}e_{15} + c_{55}\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^2 \sqrt{\rho\omega^2(c_{44}\varepsilon_{22} + e_{24}^2)}} \quad (2.40)$$

Сделав замену констант, описанную в параграфе выше с выводом дисперсионных соотношений, можно легко получить выражение для кривизны в направлении  $X$ . Подставляя численные значения можно оценить величины кривизн. Получается, что для  $X$ -среза кривизна отрицательна, поскольку нормаль к поверхности пластины ориентирована по направлению локальной вогнутости на поверхности медленности. Для  $Y$ -среза поверхность медленности в направлении нормали выпуклая, и кривизна, соответственно, положительна. Отсюда следует, что локальная кривизна поверхности медленности может как способствовать (случай  $X$ -среза), так и препятствовать (случай  $Y$ -среза) возникновению обратных волн. Первые слагаемые в формулах (2.22) и (2.24) для симметричных мод с точностью до множителя, близкого к единице, пропорциональны отрицательному смещению лучей при отражении [97] и всегда отрицательны. При малых  $k$  доминируют первые линейные по  $k$  слагаемые, что обеспечивает возникновение обратных волн, но только в диапазоне очень больших фазовых скоростей, поскольку первые слагаемые имеют малую величину. С увеличением  $k$  доминирующими становятся вторые слагаемые, которые обеспечивают существование обширных секторов обратных волн с

относительно небольшими фазовыми скоростями в пластинах  $X$ -среза и отсутствие таких волн в том же диапазоне фазовых скоростей в пластинах  $Y$ -среза. Конкуренция этих двух механизмов количественно объясняет и описывает спектр и существование ( $X$ -срез), либо отсутствие ( $Y$ -срез) обратных сдвиговых волн в пластинах  $\text{KNbO}_3$ . Первые слагаемые в формулах (2.23), (2.25) квадратичны по  $k$ , и их идентификация в рамках используемого подхода не представляется возможной.

Интерпретация различных членов в асимптотическом разложении может быть улучшена с помощью лучевого анализа. Известно, что лучевой анализ позволяет вывести точные секулярные уравнения для волноводных мод в плоскопараллельных слоях. Согласно этому подходу волноводные моды находятся из условия поперечного резонанса

$$2k_{\perp}h + 2\Delta\phi = 2\pi n, \quad (2.41)$$

где  $\Delta\phi$  фазовый сдвиг объемных волн при наклонном отражении от одной из двух поверхностей. Это представление позволяет легко разделить объемный и поверхностный вклады в конечный эффект. Сначала мы рассмотрим упрощенный случай, когда поверхностный вклад игнорируется, т.е.  $\Delta\phi$  считается равным нулю. Установив равным нулю определитель коэффициентов этой системы уравнений, получим соотношение между проекциями  $k_x$  и  $k_y$ . Исключая  $k_x$  из уравнения (2.42) используя это соотношение и расширяя полученное уравнение в  $k_y$ , получим  $\omega^2 = \omega_0^2 - [\varepsilon_{11}e_{24}^2 - (2e_{24}e_{15} + c_{55}\varepsilon_{22})\varepsilon_{22}]k_x^2 / \rho\varepsilon_{22}^2$ . Это выражение полностью совпадает с формулами (2.22)-(2.25) с одним исключением отсутствия члена, пропорционального  $k_y$ . Таким образом, ясно, что этот пропущенный член обусловлен поверхностным эффектом (поверхностным фазовым сдвигом), в то время как член, пропорциональный  $k_y^2$ , возникает вследствие объемного эффекта, то есть накопления фазового сдвига в волне, распространяющейся в объеме кристалла.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда оба вклада (поверхностный и объемный) учтены. Для упрощения формулы для поверхностного фазового

сдвига рассмотрим случай пьезоэлектрической пластины класса 6mm. Уравнение движения и уравнение Пуассона в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{bmatrix} -c_{55}(k_x^2 + k_y^2) + \rho\omega^2 & -e_{15}(k_x^2 + k_y^2) \\ -e_{15}(k_x^2 + k_y^2) & \varepsilon_{11}(k_x^2 + k_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.42)$$

Асимптотика сдвига фазы для волны, падающей в направлении  $Y$  и считая, что граница вакуум-твердое тело  $x = 0$  в случае квазинормального падения имеет вид

$$\Delta\phi \approx \frac{2\varepsilon_0 K^2 k_x}{\varepsilon k_0}. \quad (2.44)$$

И окончательное выражение разложения частоты вблизи толщинного резонанса для гексагональной пластины принимает форму

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_0 e_{15}^2 k / d \rho \varepsilon_{11}^2 + (c_{55} + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}) k^2 / \rho. \quad (2.45)$$

Член, пропорциональный  $k_y$ , полностью совпадает с соответствующим членом в уравнении (2.22), (2.24). Квадратичный член в  $k_y$  отличается, так как поверхность медленности для гексагональных кристаллов является простым эллипсом.

#### **§ 4. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБРАТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ**

Теоретически исследованы профили акустического поля и электрического потенциала, прямых и обратных горизонтально сдвиговых (SH) акустических волн высших порядков, распространяющихся в пластине ниобата калия XY среза. Показано, что изменяя электрические граничные условия на поверхности пьезоэлектрических пластин, можно изменять распределения акустического поля и электрического потенциала акустических мод. Построены зависимости распределения механического смещения и электрического потенциала по толщине пластины для

электрически открытых и электрически закороченных пластин. Также исследовано влияние слоя с произвольной проводимостью, расположенного на одной или обеих поверхностях пластины, на исследуемые профили, фазовые и групповые скорости прямой и обратной акустических волн в ХУ ниобате калия. Полученные результаты могут быть полезны для разработки метода управления механического движения частиц или электрического потенциала внутри пьезоэлектрических пластин, а также датчика для определения проводимости тонких пленок.

В случае наличия тонкого слоя с произвольной проводимостью на границе с вакуумом ( $x_3=h$ ) система уравнений (1.1) дополняется новыми граничными условиями. Поскольку проводящий слой является бесконечно тонким, то будем учитывать его присутствие через скачок нормальной компоненты электрической индукции за счет поверхностного заряда. Соответствующие электрические граничные имеют следующий вид [49]:

$$\Phi^{v_2} = \Phi; D_3^{v_2} - D_3 = \delta. \quad (2.46)$$

Здесь,  $\delta$  плотность поверхностного заряда, которая связана с плотностью поверхностного тока. Уравнение сохранения заряда, связывающее две эти величины можно записать в следующем виде [76]

$$\frac{\partial J_1^{lr}}{\partial x_1} = \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (2.47)$$

Здесь,  $J_1^{lr}$  является компонентой поверхностной плотности тока ( $x_3=h$ ). В отношении выражения поверхностного тока в слое можно записать уравнение вида [76]:

$$J_1^{lr} = \sigma_s \frac{\partial \Phi^{v_2}}{\partial x_1}, \quad (2.48)$$

и принимая во внимание, что все переменные имеют гармонический закон изменения  $\exp(i\omega(t - x_1 / V))$ , то из (2.47) и (2.48) можно получить

$$\delta = j\sigma_s \Phi^{v_2} \frac{\omega}{V^2}. \quad (2.49)$$

где,  $\sigma_3$  поверхностная проводимость слоя,  $V$  комплексная скорость акустической волны.

В случае же наличия тонких слоев с произвольной проводимостью по обеим сторонам пластины с вакуумом ( $x_3=0$  and  $x_3=h$ ) электрические граничные условия изменяются и могут быть написаны как:

$$\Phi^{v_1} = \Phi, D_3^{v_1} - D_3 = -\delta, \Phi^{v_2} = \Phi, D_3^{v_2} - D_3 = \delta. \quad (2.50)$$

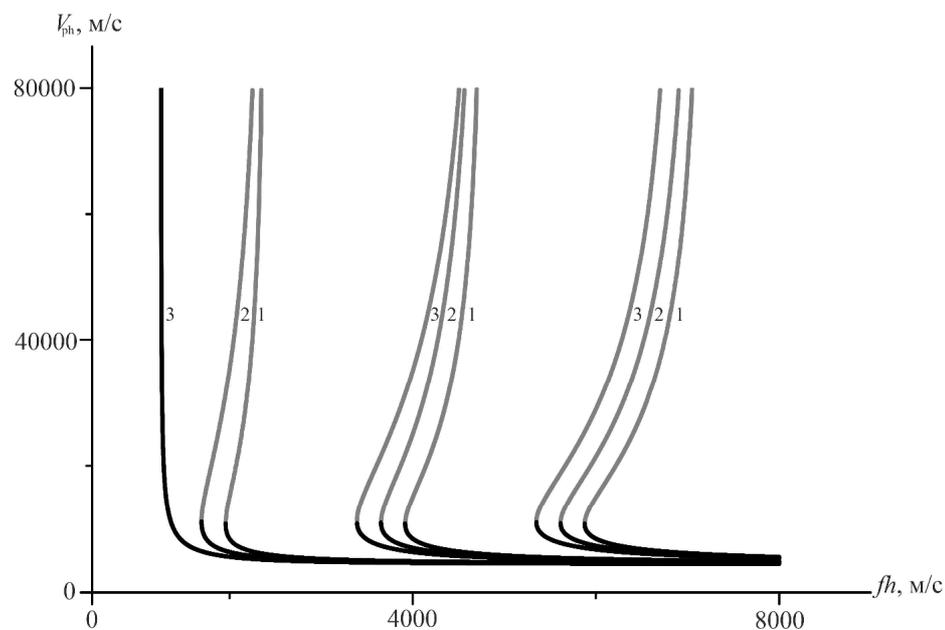
Вышеупомянутые граничные задачи были решены численно с использованием итерационной процедуры, описанной в первом параграфе. В результате были получены зависимости фазовой и групповой скоростей, затухания от частоты и амплитуды для всех электрических и механических переменных как функции координаты толщины  $x_3$ .

Наличие проводящего слоя на поверхности пластины приводит к возникновению тока и соответственно к затуханию акустических волн [49-51]. В этом случае значение мнимой части скорости становится намного больше нуля, и мы использовали следующее выражение для расчета фазовой скорости [101]:

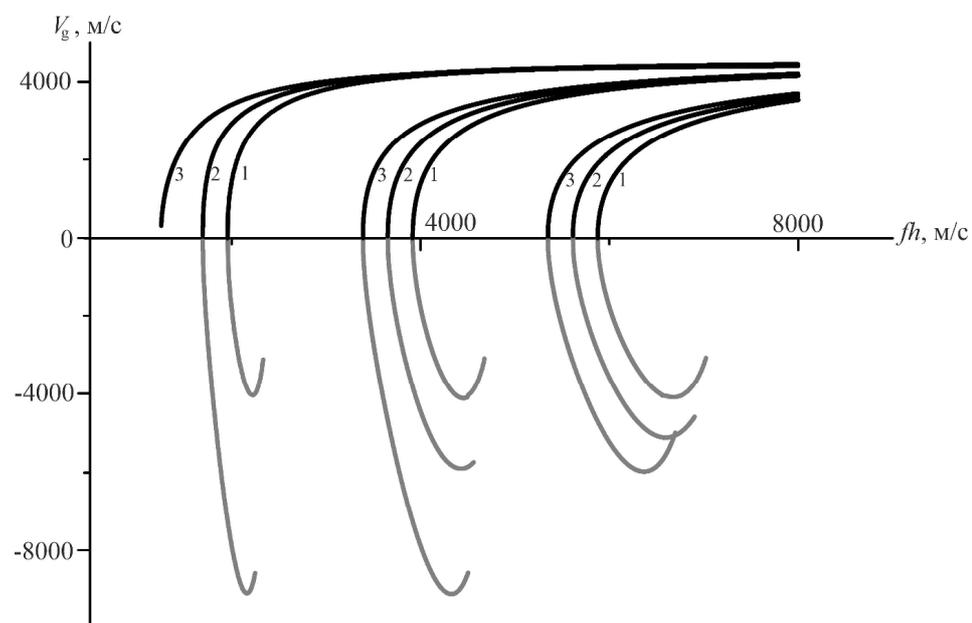
$$V_{ph} = (V_R^2 + V_I^2) / V_R, \quad (2.51)$$

где  $V_R$  и  $V_I$  реальная и мнимая части величины комплексной скорости в определении гармонического изменения поля.

В результате решения краевой задачи получены зависимости фазовых скоростей для  $SH_n$  прямых и обратных акустических волн ( $n=1, 2,$  и  $3$  порядков), распространяющихся в ХУ пластине ниобата калия от параметра  $hf$  (рис. 2.9а). Здесь  $h$  и  $f$  толщина пластины и частота волны, соответственно.



(а)



(б)

Рис 2.9. Зависимости фазовой (а) и групповой (б) скоростей прямой (черные линии) и обратной (серые линии) чисто сдвиговых мод в пластинах XY  $\text{KNbO}_3$  от величины  $fh$ : 1 – электрически свободная пластина, 2 – закороченная с одной стороны пластина, и 3 – закороченная с двух сторон пластина.

Материальные константы для ниобата калия взяты из работы [95]. На первом этапе были выполнены расчеты для предельных случаев, а именно электрически открытой пластины (1), пластины с одной

закороченной поверхностью (2) и пластины с обеих сторон электрически закороченными поверхностями (3).

Групповые скорости исследуемых волн рассчитывались по дисперсионным характеристикам фазовых скоростей, представленным на рис. 2.9а [89, 102] с помощью замены производной

$$V_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.52)$$

на конечно-разностную схему, где  $k$  является действительной частью волнового числа. Полученные дисперсионные кривые представлены на рис. 2.9б.

Анализ показал, что точка возникновения обратной волны смещается в область более низких частот, а область ее существования увеличивается при металлизации пластины, что подтверждается данными, приведенными в [30]. Обратная SH<sub>1</sub> мода исчезает при металлизации двух сторон пластины. Исходя из лучевых соображений, описанных в предыдущем параграфе у данной моды объемные парциальные волны проходят самый короткий путь (в длинах волн) по толщине пластины и объемный механизм за счет кривизны вносит наименьший вклад, поэтому частотный диапазон самый короткий. В свою очередь это означает что, электрически закороченные поверхности отключают поверхностный механизм.

Также были построены зависимости величины электрического потенциала (верхний ряд) и максимальной компоненты механического смещения. Зависимости  $U_2$  (нижний ряд) по толщине пластины нормируются к значению  $U_{surf} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$  (при  $x_3=0$ ) на поверхности данной пластины для обратных (рис. 2.10) и прямых (рис. 2.11) акустических волн при  $hf_{SH1}=2$  км/с,  $hf_{SH2}=4$  км/с,  $hf_{SH3}=6$  км/с. В данном случае, кривые соответствуют электрически свободной пластине (жирный черные линии), пластине электрически закороченной с одной (тонкие черные линии) и двух (жирный серые линии) сторон соответственно.

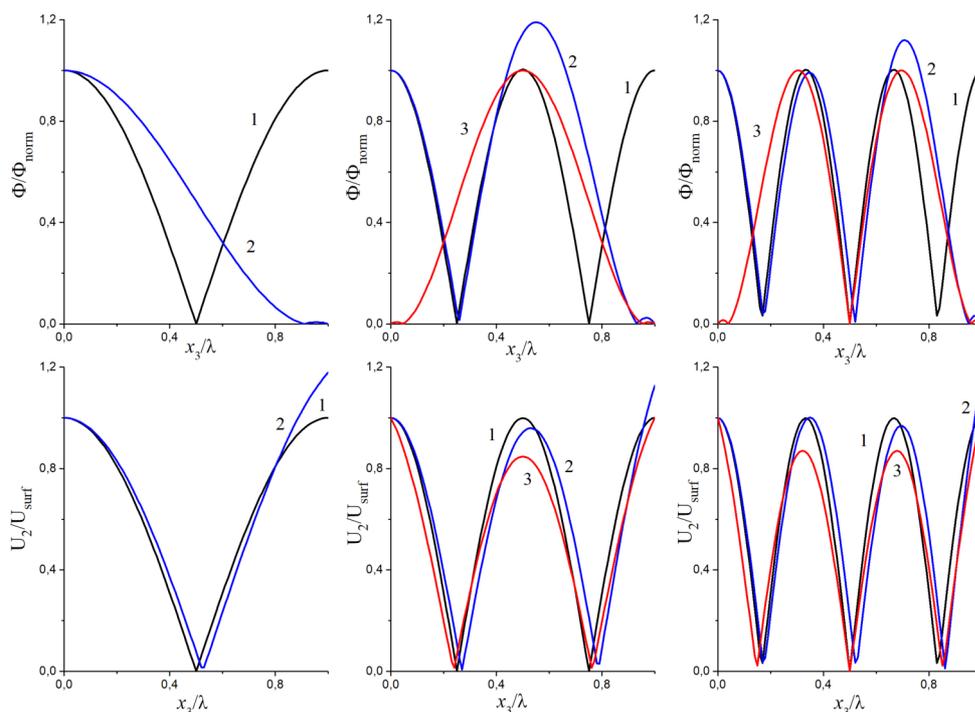


Рис. 2.10. Распределение по толщине пластины XY  $\text{KNbO}_3$  электрического потенциала (верхний ряд) и максимальной составляющей смещения  $U_2$  (нижний ряд), нормированных к значениям на поверхности пластины ( $x_3=0$ ) для обратных  $\text{SH}_1$ ,  $\text{SH}_2$ ,  $\text{SH}_3$  мод при  $hf_{\text{SH1}}=2$  км/с,  $hf_{\text{SH2}}=4$  км/с,  $hf_{\text{SH3}}=6$  км/с: жирные черные линии – электрически открытая пластина, тонкие черные линии – пластина закорочена с одной стороны, а серые линии – пластина закорочена с двух сторон.

Видно, что существует возможность управлять как величиной электрического потенциала, связанной с акустической волной, так и амплитудой смещения частиц по толщине пластины. Для экспериментальной проверки теоретических результатов можно использовать мезоструктуру на основе пьезоэлектрической пластины со сквозными нанотверстиями. Прямое измерение распределения и динамического изменения внутреннего электрического поля волны в такой пластине может быть выполнено с помощью электронного зонда, например, электронного микроскопа.

Изменяя электрические граничные условия на поверхности пластины, можно модулировать этот электронный поток посредством изменения встроенного электрического потенциала по глубине пластины.

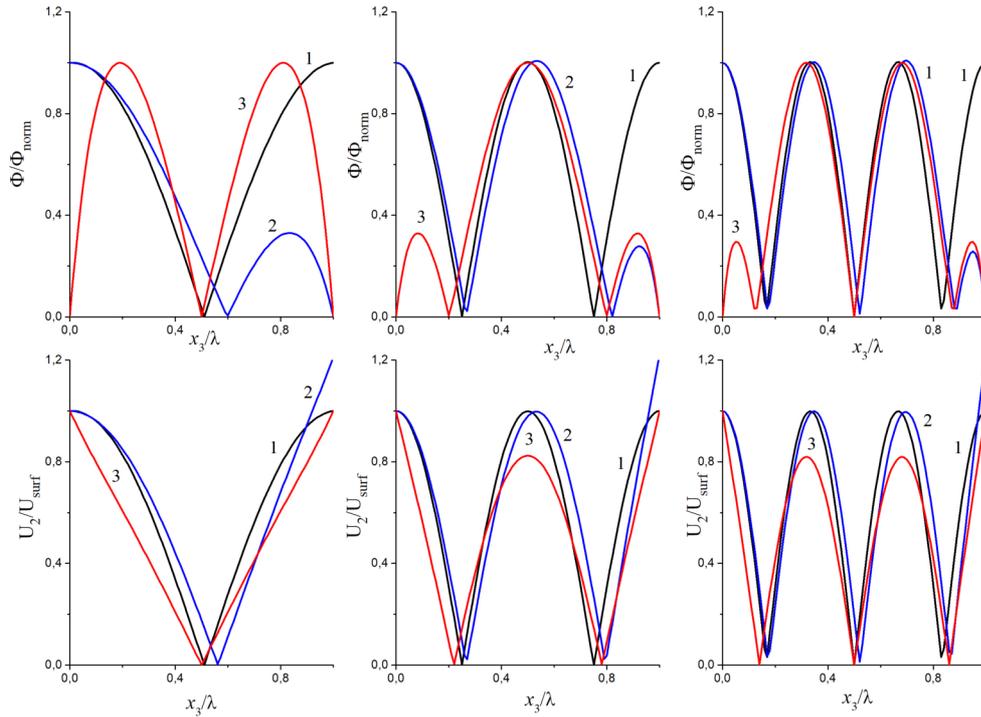


Рис. 2.11. Распределение по толщине в пластине XY  $\text{KNbO}_3$  электрического потенциала (верхний ряд) и максимальной составляющей механического смещения  $U_2$  (нижний ряд) нормированных к значениям на поверхности пластины ( $x_3=0$ ) для прямых  $\text{SH}_1$ ,  $\text{SH}_2$ ,  $\text{SH}_3$  волн при  $hf_{\text{SH}1}=2$  км/с,  $hf_{\text{SH}2}=4$  км/с,  $hf_{\text{SH}3}=6$  км/с: жирные черные линии – электрически открытая пластина, тонкие черные линии – пластина закорочена с одной стороны, а серые линии – пластина закорочена с двух сторон.

По такому принципу может быть разработан наноэлектронный ускоритель (модулятор) электронов. Для измерения движений обратных волн в пластинах также можно использовать динамический фотоупругий метод [103].

Для плавного изменения граничных электрических условий можно нанести проводящий слой на поверхностях пластины, проводимость которого можно изменить путем внешнего воздействия. Это может быть полупроводниковая гетероструктура, управляемая приложенным электрическим полем [104], или материал, проводимость которого изменяется под воздействием освещения (хромофоры, фотополупроводниковые структуры) [105, 106].

Интересно оценить влияние слоя с произвольной проводимостью на поверхности пластины на характеристики прямой и обратной SH акустических волн высших порядков в XY пластине ниобата калия. В этом пункте мы рассмотрим две ситуации: i) слой с произвольной проводимостью расположен на плоскости  $x_3=h$  и ii) вышеупомянутый слой размещен в плоскостях  $x_3=0$  and  $x_3=h$ . Предполагается, что слой очень тонкий по сравнению с длиной акустической волны, поэтому эффектом механической нагрузки можно пренебречь. В результате решения краевой задачи, описанной выше, получены зависимости фазовых (верхний ряд) и групповых (средний ряд) скоростей, а также затухания (нижний ряд) для прямой (рис. 2.12) и обратной (рис. 2.13)  $SH_1$ ,  $SH_2$ ,  $SH_3$  акустических волн при  $hf_{SH1}=2$  км/с,  $hf_{SH2}=4$  км/с,  $hf_{SH3}=6$  км/с распространяющихся в пластине XY ниобата калия от величины поверхностной проводимости  $\sigma_s$ . На рис. 2.12 и 2.13 кривые 1 и 2 соответствуют ситуациям i) и ii) соответственно.

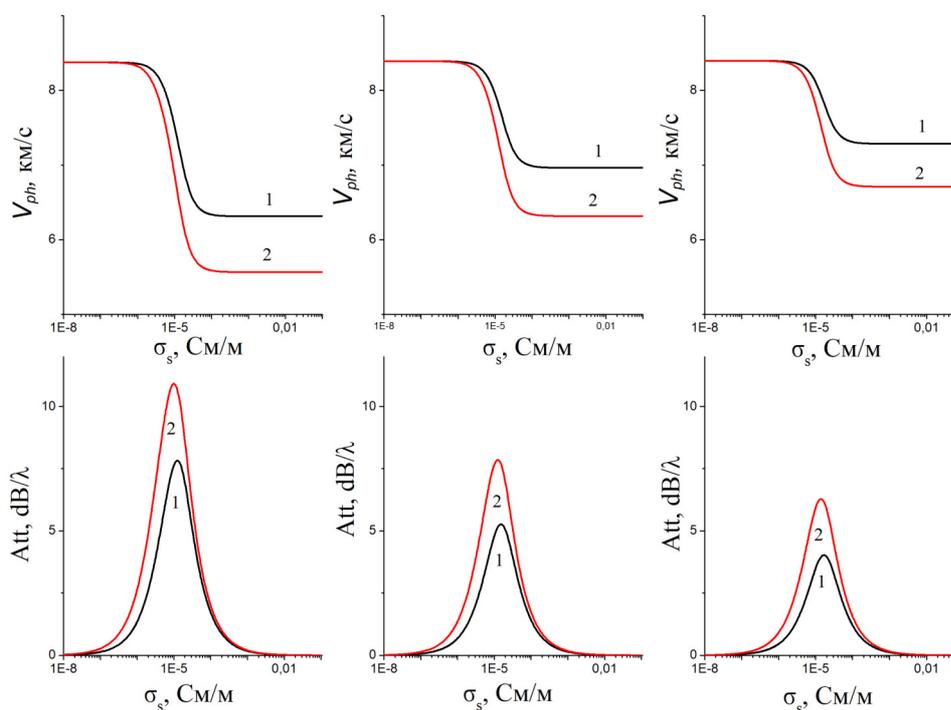


Рис. 2.12. Зависимости фазовых скоростей (верхний кривые) и затухания (нижние кривые) для прямых  $SH_1$ ,  $SH_2$  и  $SH_3$  акустических волн при  $hf_{SH1} = 2$  км/с,  $hf_{SH2} = 4$  км/с,  $hf_{SH3} = 6$  км/с, распространяющихся в пластине XY ниобата калия от поверхностной проводимости  $\sigma_s$ : слой с  $\sigma_s$  находится 1 - в плоскости  $x_3 = h$ , 2 - в плоскостях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ .

Значения затухания  $\Gamma$  в  $\text{dB}/\lambda$  были рассчитаны с помощью следующего выражения:

$$\Gamma = 4\pi \text{Im}(V_{ph}) / (0.23 \text{Re}(V_{ph})) \quad (2.53)$$

Как видно на рис. 2.12 для прямых волн, затухание вначале увеличивается, достигает максимума, затем падает с увеличением поверхностной проводимости слоя. Это ожидаемое поведение, потому что при очень низких значениях  $\sigma_s$  слой приближается к идеальному диэлектрику, а при очень высоких значениях  $\sigma_s$  он приближается к идеальному проводнику. В обоих этих случаях ослабление акустической волны отсутствует [50].

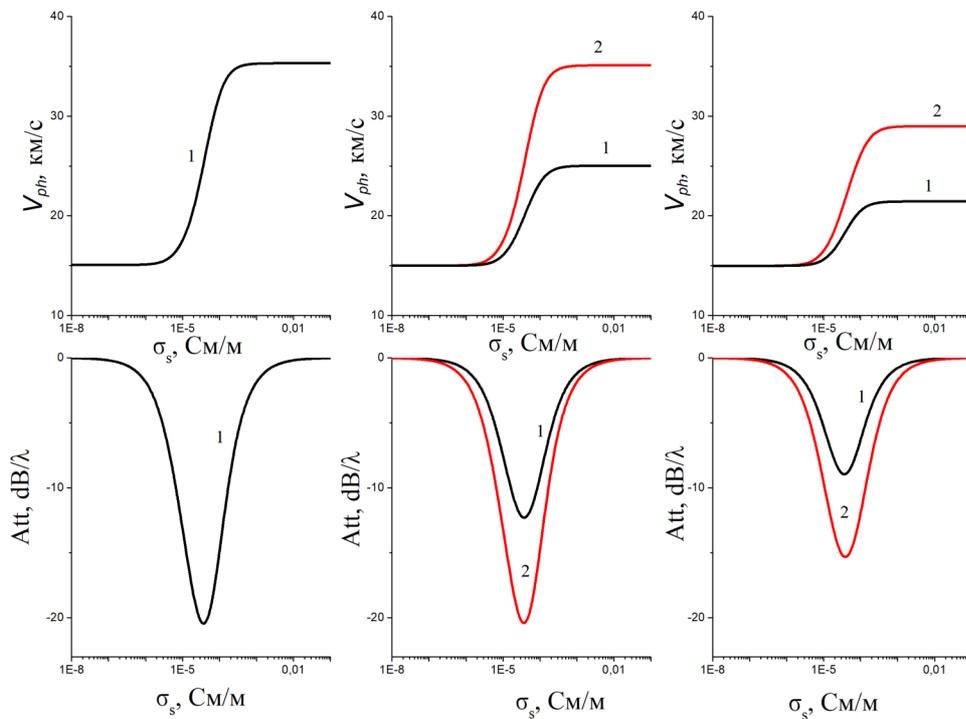


Рис. 2.13. Зависимости фазовых (верхний ряд) скоростей и затухания (нижний ряд) для обратных  $\text{SH}_1$ ,  $\text{SH}_2$  и  $\text{SH}_3$  акустических волн при  $hf_{\text{SH}1} = 2 \text{ км/с}$ ,  $hf_{\text{SH}2} = 4 \text{ км/с}$ ,  $hf_{\text{SH}3} = 6 \text{ км/с}$ , распространяющихся в пластине XY ниобата калия от поверхностной проводимости  $\sigma_s$ : слой с  $\sigma_s$  находится в 1- в плоскости  $x_3 = h$ , 2 - в плоскостях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ .

Что касается фазовой скорости прямой волны, то она уменьшается с увеличением  $\sigma_s$  из-за закорачивания тангенциальных компонент электрического поля, связанных с акустической волной [76]. Полученные

результаты зависимостей показали возможность разработки сенсора для определения тонкопленочной проводимости. Для обратной волны можно увидеть противоположную ситуацию на рис. 2.13. Фазовая скорость этой волны растет с увеличением  $\sigma_s$ , а затухание имеет отрицательные значения. Эти отрицательные значения затухания связаны с тем, что обратные волны затухают вдоль пластины в направлении групповой скорости, совпадающего с направлением потока энергии. Такое поведение имеет сходство с распространением утечки обратных акустических волн Лэмба [81].

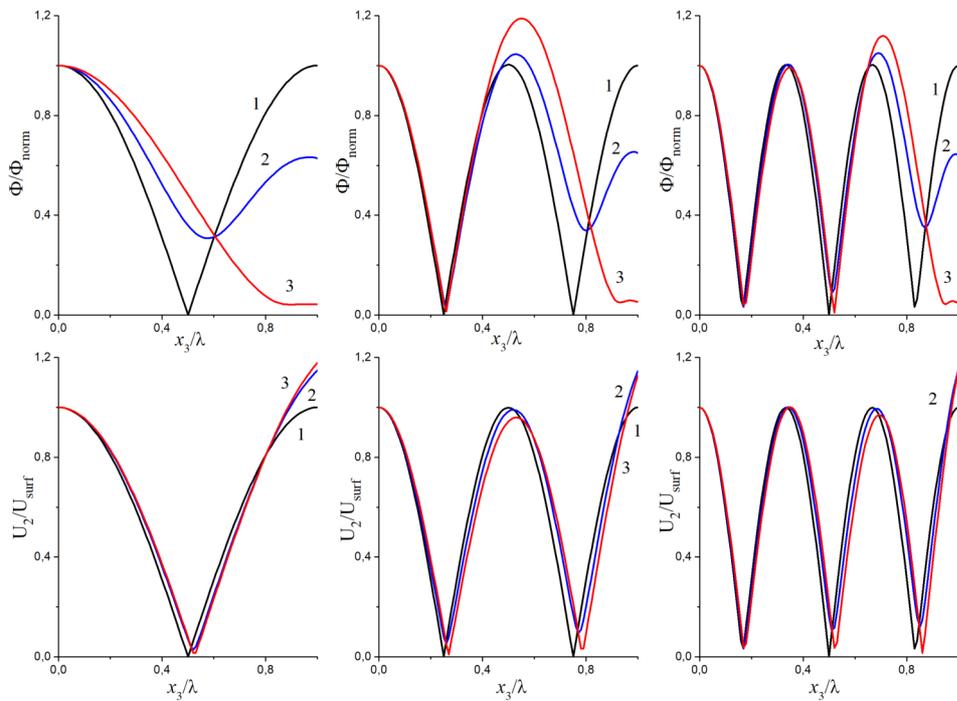


Рис. 2.14. Зависимости величины электрического потенциала (верхний ряд) и компонента максимального механического смещения  $U_2$  (нижний ряд), нормированные на соответствующие значения на поверхности пластины ( $x_3 = 0$ ) для обратного SH<sub>1</sub>, SH<sub>2</sub>, SH<sub>3</sub> волны на толщине пластины XY KNbO<sub>3</sub> при  $hf_{\text{SH1}} = 2$  км/с,  $hf_{\text{SH2}} = 4$  км/с,  $hf_{\text{SH3}} = 6$  км/с. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\sigma_s = 10^{-8}$  См / м,  $5 \times 10^{-5}$  См/м и  $10^{-3}$  См/м слоя, расположенного в плоскости  $x_3 = h$  соответственно.

Зависимости по толщине пластины величин электрического потенциала и максимальной составляющей механического смещения  $U_2$  нормированных на эти же величины на поверхности пластины ( $x_3 = 0$ ) для

обратной и прямой акустических волн SH1, SH2, SH3 при  $hf_{SH1} = 2$  км/с,  $hf_{SH2} = 4$  км/с,  $hf_{SH3} = 6$  км/с изображены на рис. 2.14 и рис. 2.15 соответственно. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\sigma_s = 10^{-8}$  См/м,  $5 \times 10^{-5}$  См/м и  $10^{-3}$  См/м слоя, расположенного в плоскости  $x_3 = h$  соответственно.

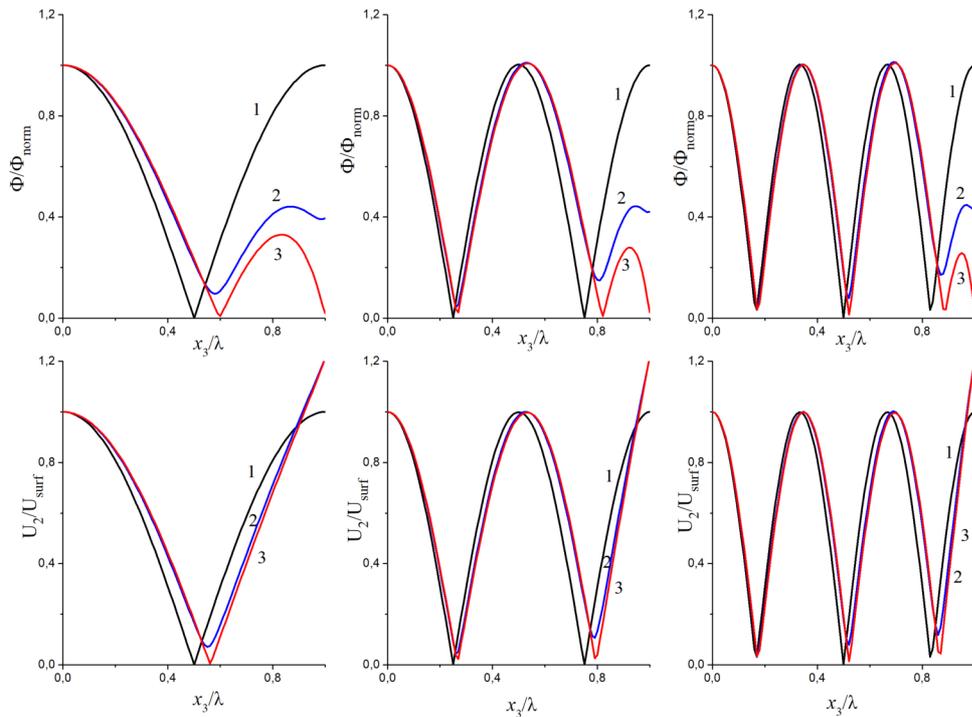


Рис. 2.15. Зависимости величины электрического потенциала (верхний ряд) и компонента максимального механического смещения  $U_2$  (нижний ряд), нормированные к соответствующим значениям на поверхности пластины ( $x_3 = 0$ ) для прямой SH1, SH2, SH3 волны на толщине пластины XY KNbO<sub>3</sub> при  $hf_{SH1} = 2$  км/с,  $hf_{SH2} = 4$  км/с,  $hf_{SH3} = 6$  км/с. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\sigma_s = 10^{-8}$  См/м,  $5 \times 10^{-5}$  См/м и  $10^{-3}$  См/м слоя, расположенного в плоскости  $x_3 = h$  соответственно.

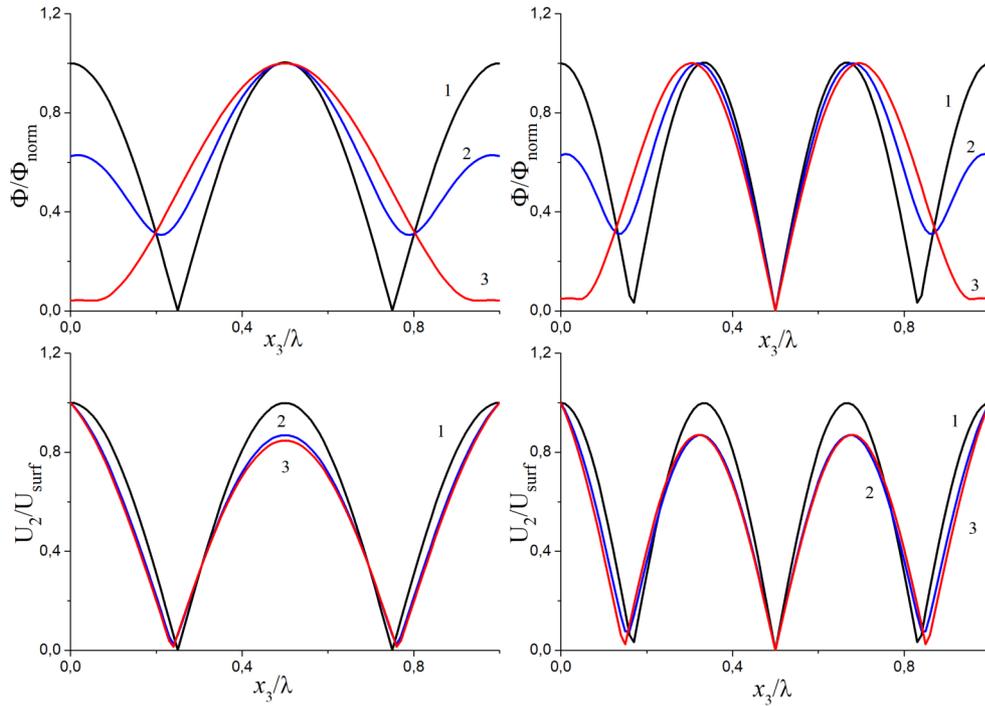


Рис. 2.16. Зависимости величины электрического потенциала (верхний ряд) и компонента максимального механического смещения  $U_2$  (нижний ряд), нормированные на соответствующие максимальные значения для обратных волн SH<sub>2</sub>, SH<sub>3</sub> от толщины XY KNbO<sub>3</sub> пластина при  $hf_{SH1} = 2$  км/с,  $hf_{SH2} = 4$  км/с,  $hf_{SH3} = 6$  км/с. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\sigma_s = 10^{-8}$  См/м,  $5 \times 10^{-5}$  См/м и слоев  $10^{-3}$  См/м, расположенных в плоскостях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ , соответственно.

Зависимости величины электрического потенциала (верхний ряд) и максимальной компоненты механического смещения  $U_2$  нормированы на соответствующее максимальное значение для обратных и прямых акустических волн SH<sub>1</sub>, SH<sub>2</sub>, SH<sub>3</sub> от толщины пластины при  $hf_{SH1} = 2$  км/с,  $hf_{SH2} = 4$  км/с,  $hf_{SH3} = 6$  км/с представлены на рис. 2.16 и 2.17 соответственно. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\sigma_s = 10^{-8}$  См/м,  $5 \times 10^{-5}$  См/м и слоев  $10^{-3}$  См/м, расположенных в плоскостях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ , соответственно

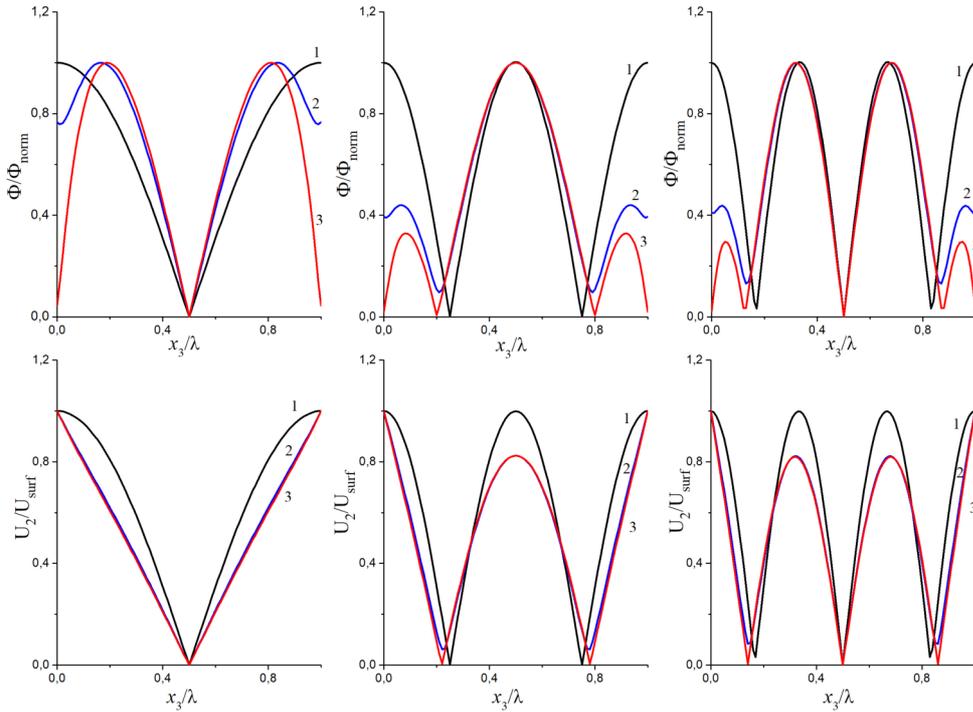


Рис. 2.17. Зависимости величины электрического потенциала (верхний ряд) и компонента максимального механического смещения  $U_2$  (нижний ряд), нормированные на соответствующие максимальные значения для прямого SH<sub>1</sub>, SH<sub>2</sub>, SH<sub>3</sub> волны на толщине пластины XY KNbO<sub>3</sub> при  $hf_{SH1} = 2$  км/с,  $hf_{SH2} = 4$  км/с,  $hf_{SH3} = 6$  км/с. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\sigma_s = 10^{-8}$  См/м,  $5 \times 10^{-5}$  См/м и слоев  $10^{-3}$  См/м, расположенных в плоскостях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ , соответственно.

В результате исследования построены зависимости фазовых и групповых скоростей для прямой и обратной акустических SH волн, распространяющихся в XY пластине ниобата калия. Исследовано влияние металлизации одной или двух сторон пластины на характеристики этих волн. Было обнаружено, что металлизация пластин смещает точку с нулевой групповой скоростью в область более низких частот и существенно увеличивает диапазон их существования. Обратная волна SH<sub>1</sub> исчезает при металлизации двух сторон пластины. Также было отмечено, что изменением граничных электрических условий можно управлять как величиной потенциала электрического поля, связанной с акустической волной, так и амплитудой смещения частиц по толщине пластины. Полученные результаты показали возможность разработки сенсора для определения

тонкопленочной проводимости. Для экспериментальной проверки теоретических результатов можно использовать мезоструктуру на основе пьезоэлектрической пластины со сквозными наноотверстиями. Непосредственное измерение распределения и динамического изменения внутреннего электрического поля волны в пластине может осуществляться с помощью электронного зонда, например, электронного микроскопа. Путем изменения электрических граничных условий на поверхности пластины можно модулировать электронный поток через пьезоэлектрическую пластину с помощью наноотверстий путем изменения встроенного электрического потенциала по глубине пластины. По такому принципу может быть разработан наноэлектронный ускоритель (модулятор) электронов.

## **РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2**

В данной главе исследовались чисто сдвиговые акустические волны в пьезоэлектрических пластинах с точки зрения наличия в их спектре обратных волн. Аналитически получены дисперсионные соотношения описывающие распространение чисто сдвиговых волн в пластине ниобата калия. Данные секулярные уравнения решались численно с помощью итерационного метода. Показано что в спектре ХУ ниобата калия присутствуют волны с отрицательной групповой скоростью. Данные дисперсионные соотношения для более полного анализа дополнительно исследовались с помощью приближенных методов. Сначала с помощью прямого разложения трансцендентных секулярных соотношений в ряды относительно точек зарождения сдвиговых волн. С другой стороны, данные моды исследовались с помощью теории возмущений основанной на дивергентном соотношении. Два этих подхода дали одинаковый взаимодополняющий результат, который показал, что основными вкладками в существование обратных волн являются наличие отрицательных вогнутостей на поверхности медленности, а также отрицательный сдвиг

фазы парциальной волны при ее отражении от границы пьезоэлектрик-вакуум.

Для более полного анализа поведения обратных волн в пьезоэлектрических пластинах численно исследовалось влияние граничных условий на спектр и на распределения полей этих волн. Показано, что изменяя проводимость в тонком поверхностном слое можно значительно изменять спектр сдвиговых акустических волн. Также продемонстрировано, что проводящие слои позволяют управлять распределением механического смещения и электрического потенциала в пьезоэлектрической пластине.

**§ 1. ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМОГО ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Как полностью волноводные, так и вытекающие волны, проанализированные в этой главе, имеют большое значение, в различных приложениях начиная от неразрушающего контроля композитных структур и вплоть до необходимости их учета, например, при геофизической разведке.

С помощью численных расчетов исследуются волноводные акустические моды, локализованные в двух пространственных измерениях. Их свойства изучаются в трех различных геометриях: (i) полупространство, состоящее из двух упругих сред с плоской поверхностью раздела, наклоненной к их общей поверхности (ii) клин, состоящий из двух упругих сред с плоской поверхностью раздела, и (iii) свободный край упругого слоя между двумя клиновидными кусками материала с упругими свойствами и плотностью, отличающимися от промежуточного слоя. Схематически все вышеупомянутые геометрии, исследуемые в работе изображены на рис. 3.1.

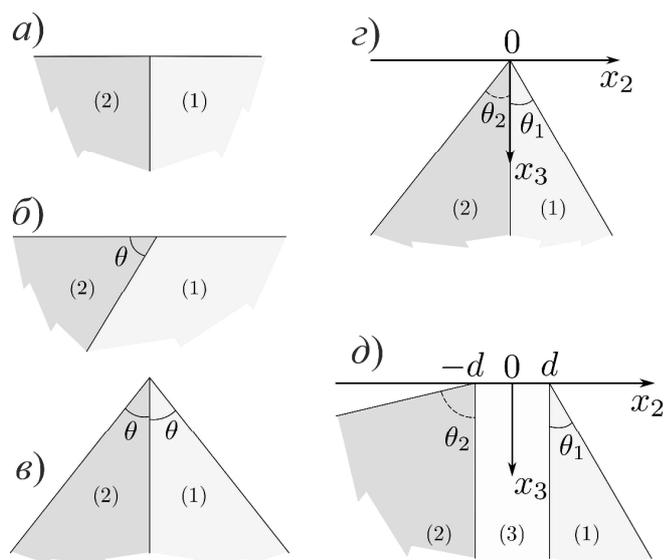


Рис. 3.1. Геометрии для волноводных мод, рассмотренных в данной работе. Распространение вдоль направления  $x_1$ .

В каждой упругой среде, встречающейся в системах, изображенных на рис. 3.1, без учета пьезоэлектрических эффектов поле смещения  $u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t)$  должно удовлетворять уравнению движения

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sigma_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

где  $\rho$  плотность и  $\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} u_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} u_\nu \right)$  компоненты тензора напряжения в соответствующей среде,  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$  упругие константы. Данное уравнение дополняется граничными условиями на поверхностях, границах раздела и на бесконечности. На интерфейсах мы требуем непрерывности поля смещения и величин  $N_\beta(x_2, x_3) \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3, t)$ , где  $\mathbf{N}(x_2, x_3)$  вектор, нормальный к интерфейсу в координате  $(x_1, x_2, x_3)$ . На свободной поверхности,  $N_\beta(x_2, x_3) \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3, t)$  должна исчезнуть, где  $\mathbf{N}(x_2, x_3)$  теперь вектор нормали к поверхности в координате  $(x_1, x_2, x_3)$ . В качестве альтернативы, мы устанавливаем  $N_\beta(x_2, x_3) [\sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3, t) - \sigma_{\alpha\beta}^{(\text{ext})}(x_1, x_2, x_3, t)] = 0$ , где  $\sigma_{\alpha\beta}^{(\text{ext})}$  является внешним зависящим от времени гармоническим источником, приложенным к определенной области на поверхности. На бесконечности поле смещения должно исчезать.

Из-за инвариантности вдоль направления  $x_1$  у наших систем, мы можем искать решения определенной выше краевой задачи в виде

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) = e^{i(kx_1 - \omega t)} U_\alpha(x_2, x_3 | k) \quad (3.2)$$

в отсутствие зависящего от времени внешнего источника. Тензор напряжений также может быть записан как

$$\sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3, t) = e^{i(kx_1 - \omega t)} T_{\alpha\beta}(x_2, x_3 | k). \quad (3.3)$$

Уравнения (3.1) -(3.3) тогда примут вид

$$\rho \omega^2 U_\alpha(x_2, x_3 | k) = -D_\beta(k) T_{\alpha\beta}(x_2, x_3 | k), \quad (3.4)$$

$$T_{\alpha\beta}(x_2, x_3 | k) = C_{\alpha\beta\mu\nu} D_\nu(k) U_\mu(x_2, x_3 | k), \quad (3.5)$$

с оператором  $D_\alpha(k) = \delta_{\alpha 1} ik + (1 - \delta_{\alpha 1}) \partial / \partial x_\alpha$  и  $\delta_{\alpha\beta}$  это символ Кронекера. Анзац (3.2) остается в силе при наличии внешнего напряжения вида

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(\text{ext})}(x_1, x_2, x_3, t) = e^{i(kx_1 - \omega t)} T_{\alpha\beta}^{(\text{ext})}(x_2, x_3 | k, \omega). \quad (3.6)$$

Для частного случая пуассоновских сред, образующих системы (i) и (ii) исследуются диапазоны существования этих одномерных волноводных мод в пространстве материальных параметров, и их зависимость от угла наклона между поверхностью и границей раздела в случае (i) и угла клина в случае (ii). В системе типа (ii), изготовленной из двух материалов с сильным акустическим контрастом импедансов, и в системах типа (iii) должны присутствовать вытекающие волны с высокой степенью пространственной локализации связанных смещений, хотя два материала, составляющих эти структуры, являются изотропными.

Также важно провести критическое сравнение вычислительных подходов, а именно полуаналитической схемы конечных элементов и метода функций Лаггера, основанного на разложении поля смещений в двойной ряд специальных функций.

Очевидно, что на рис. 3.1 изображены идеальные и абстрактные геометрии, не встречающиеся в природе. А именно, на данной картинке изображены полубесконечные геометрии, что в реальности представляет собой трудности при численном исследовании. В действительности же объектом исследования будут другие структуры, которые сохраняют в себе те геометрические свойства и позволяют точно описать суть физического эффекта. Поэтому необходимо провести дополнительные действия, заключающиеся в ограничении объема и разбиении его на элементы. Так как все интересующие нас процессы происходят в локализованной области на поверхности и на интерфейсе двух сред то логично ограничить данные объемы в глубину. Это накладывает новые дополнительные трудности на отражение волн от границ. Подобное ограничение размеров задачи отмечает возможность находить вытекающие волны с помощью решения задачи на собственные значения. Эта трудность будет обходиться размещением

гармонических источников на поверхности и искусственных согласованных слоев по краям, которые более подробно будут описаны ниже. Итак, итоговое ограничение объема и разбиение его на элементы изображено на рисунке 3.2.

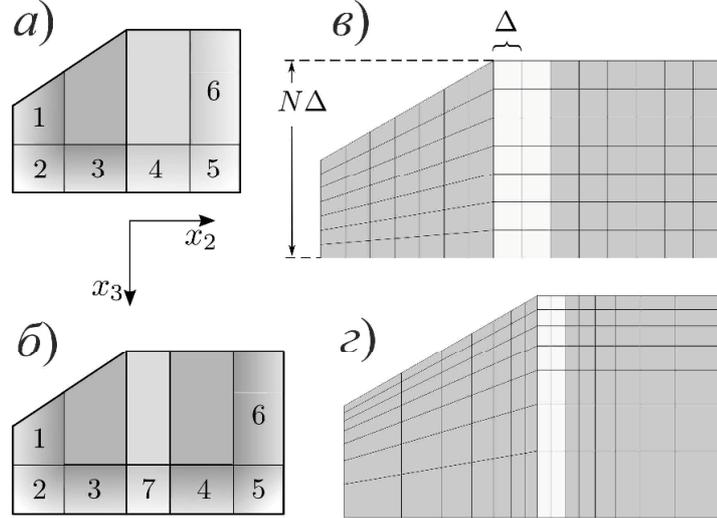


Рис. 3.2. Примеры систем, состоящих из двух упругих сред и PMLs 1,..., 6 (а) и состоящих из трех упругих сред и областей PML 1,..., 7 (б). Три упругих носителя с линейной сеткой (в) и логарифмической сеткой (г).

Для геометрий, изображенных на рис. 3.2 можно записать объемную функцию Лагранжа описывающую данную механическую систему, которая имеет известный вид. Интеграл данной функции по всему объему имеет вид

$$L = \int_V \left[ \frac{\rho \omega^2 u_\alpha^* u_\alpha}{2} - \frac{[D_\beta u_\alpha]^* C_{\alpha\beta\mu\nu} [D_\nu u_\mu]}{2} \right] d^3 x. \quad (3.7)$$

Будем искать инвариантное локализованное вдоль ребра решение в виде

$$u_\alpha = e^{-ikx} U_\alpha(y, z, t) + e^{ikx} U_\alpha^*(y, z, t). \quad (3.8)$$

Указанная выше линейная краевая задача решается приблизительно с помощью двумерной изопараметрической схемы конечных элементов с использованием восьмиузловых элементов

$$U_\alpha(y, z, t) = \sum_n N_n(r, t) U_\alpha^{(n,l)}(t). \quad (3.9)$$

Здесь  $U_\alpha^{(n,l)}(t)$  механическое смещение частиц, в соответствующем узле зависящее от времени,  $N_n(r, t)$  функции формы в локальной системе координат элемента  $(r, t)$ .

Подставляя решения в виде (3.8), (3.9) в выражение (3.7), можно перейти от интеграла по всей области к сумме интегралов по каждому элементу в виде

$$L = \sum_l \sum_{n,n'} [\dot{U}_j^{(n,l)*}(t) \dot{U}_{j'}^{(n',l)}(t) \delta_{jj'} \rho_l \iint_{\Omega_l} N_n N_{n'} dx_2 dx_3 - U_j^{(n,l)*}(t) U_{j'}^{(n',l)}(t) C_{jmj'm'}^l \iint_{\Omega_l} [D_M(-k) N_n][D_{M'}(k) N_{n'}] dx_2 dx_3]. \quad (3.10)$$

В отсутствие внешнего источника собственные частоты и поля смещений одномерных мод были определены путем решения обобщенной задачи на собственные значения вида

$$\sum_{\ell=1}^N [\omega^2 M_{\alpha\ell\beta\ell}^{(\text{mass})} - M_{\alpha\ell\beta\ell}^{(\text{stiff})}(k)] \hat{U}_{\beta\ell} = 0 \quad (3.11)$$

с элементами  $M_{\alpha\ell\beta\ell}^{(\text{mass})}$  глобальной матрицы масс и  $M_{\alpha\ell\beta\ell}^{(\text{stiff})}(k)$  глобальной матрицы жесткости, зависящей от волнового вектора.  $\hat{U}_{\beta\ell}$  это смещение узла  $\ell$  в  $x_\beta$ -направлении и сумма в (3.11) работает над  $N$  узлами общей сетки.

$$M_{njn'j'}^{(l)} = \delta_{jj'} \rho_l \int_{-1}^1 dr \int_{-1}^1 dt N_n(r,t) N_{n'}(r,t) J_l(r,t), \quad (3.12)$$

$$K_{njn'j'}^{(l)}(k) = S_{jmj'm'}^l \int_{-1}^1 dr \int_{-1}^1 dt [\tilde{D}_m(-k) N_n(r,t)][\tilde{D}_{m'}(k) N_{n'}(r,t)] J_l(r,t), \quad (3.13)$$

где  $\tilde{D}_m(-k) N_n(r,t) = \left\{ \delta_{m1} i k + \frac{\partial r}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial t} \right\} N_n(r,t)$ ,  $J_l$  якобиан перехода от глобальной системы координат  $(x_2, x_3)$  к локальной системе координат  $(r, t)$ .

В случае внешнего источника вида (3.6) возникает ненулевая правая часть в (3.11), и результирующая неоднородная линейная система уравнений решается для заданной частоты  $\omega$  и волнового вектора  $k$ . При наличии источника на больших расстояниях от одномерного волновода были введены идеально согласованные слои (PML), чтобы избежать отражений объемных, поверхностных или интерфейсных волн от поверхностей, возникающих из-за усечения бесконечной системы. Эти поверхности становятся интерфейсами с областями PML и всегда

параллельны координатным плоскостям в наших системах (рис. 3.2), кроме острых углов (см. Ниже). PML реализуется в соответствии с [110]. В областях PML модули упругости  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$  материала в контакте с PML заменяются на  $C_{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{z} z_{\beta}^{-1} z_{\nu}^{-1}$  и его плотность  $\rho$  на  $\rho \tilde{z}$ , где  $z_{\alpha}(x_{\alpha}) = 1 - i\sigma_{\alpha}(x_{\alpha} - x_{\alpha}^{(\text{interface})})^2$  и  $x_{\alpha}^{(\text{interface})}$  определяет положение интерфейса. На рис. 3.2а показан пример системы, состоящей из двух упругих сред. Области 1,...,6 являются идеально согласованными областями. В областях 1 и 6, только  $\sigma_2$  ненулевой, только в регионах 3 и 4  $\sigma_3$  не равен нулю, а в регионах 2 и 5 оба  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  ненулевые. Параметры  $\sigma_{\alpha}$  оптимизированы для подавления отражений. В свою очередь  $\tilde{z} = z_1 z_2 z_3$ . На рис. 3.11 показаны распределения полей при оптимальном подборе параметров PML. Визуально видно отсутствие отраженных волн при наличии мод утечки.

В системах, состоящих из трех упругих сред, рассматривались только те случаи, когда среда в центре имела объемные скорости волн, меньше, чем в средах справа и слева. Эти случаи допускали упрощение, что если были исследованы только такие решения, которые являются дозвуковыми по отношению к средам (1) и (2), то здесь было достаточно разместить PML только под центральной областью (область 7 на рис. 3.2б).

Чтобы избежать ошибочных выводов из-за недостаточной точности, проблем сходимости или в случае вычислений МКЭ, неоптимального выбора сетки, размера системы или параметров PML, в некоторых случаях использовался метод функций Лаггера. Эти два метода применялись к одной и той же системе, и согласование было найдено. Сходимость двух методов продемонстрирована на примере системы, соответствующей рис. 3.1д.

Среды справа и слева (1 и 2 на рис. 3.1д) были из алюминия (постоянные материала см. в таблице 3.1), среда в центре состояла из материала, свойства которого частично аналогичны свойствам меди (таблица 3.1), два угла  $\theta_1=45^\circ$ ,  $\theta_2=40^\circ$ . Волновой вектор  $k$  был равен  $1/(2d)$ .

Для расчетов МКЭ использовались сетки вида рис. 3.2в. Кроме того, сетка была настроена со следующим свойством: координаты положений узлов по  $x_3$  логарифмически увеличиваются вдоль оси  $x_3$  от свободных поверхностей. Кроме того, абсолютные значения координаты узлов  $x_2$  в средах слева и справа увеличиваются логарифмически с увеличением расстояния от центральной среды (рис. 3.2г). В этих тестовых вычислениях смещения снизу, слева и справа по краям сетки были установлены равными нулю.

Данные на рис. 3.3 показывают, что оба метода сходятся к одному и тому же значению фазовой скорости волны, если размер элемента при расчете МКЭ на поверхности центральной области достаточно мал. Они также показывают, что сетки с логарифмическим увеличением размера элемента вдали от поверхности центральной области (рис. 3.2г) приводят к гораздо более быстрой сходимости, чем линейные сетки на рис. 3.2в. Получается так, что для случая из 70 элементов, вдоль  $x_3$  в центральной области, расстояние между поверхностью и дном центральной среды в пять раз больше для логарифмически растянутой сетки по сравнению с линейной сеткой. При правильном выборе этих факторов сходимость может быть значительно улучшена и получаются очень точные значения для фазовой скорости.

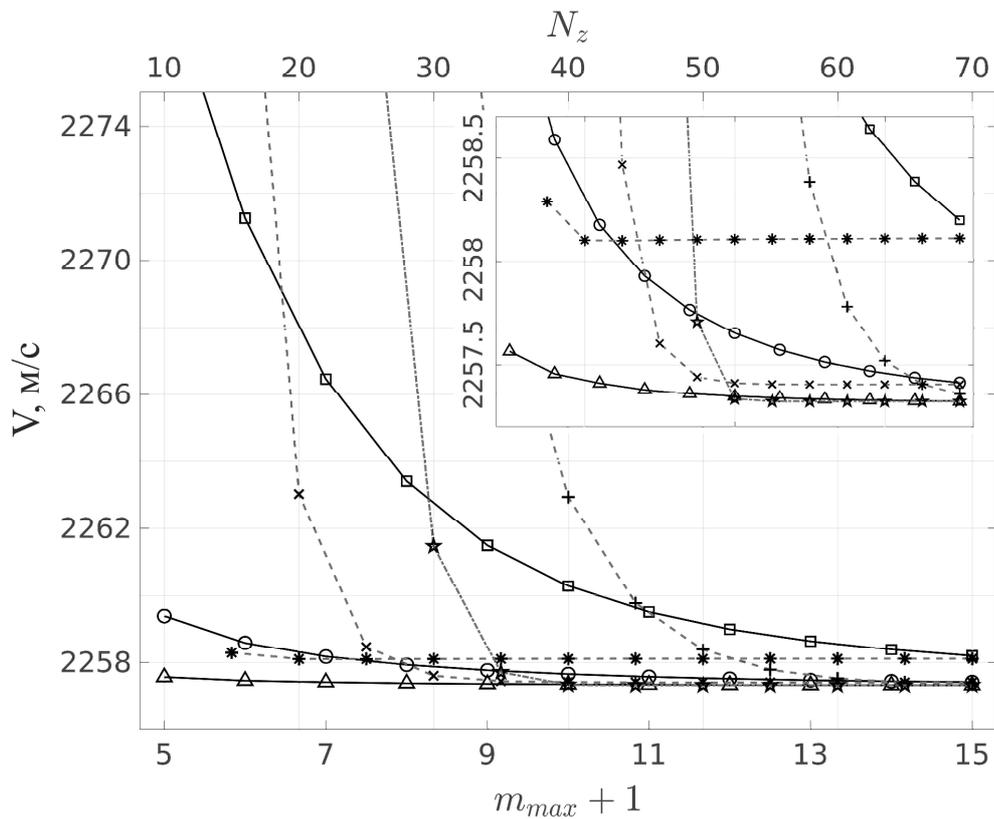


Рис. 3.3. Сходимость скорости самой медленной моды в системе показанной на рис. 3.1д, где  $\theta_1 = 45^\circ$  и  $\theta_2 = 40^\circ$ . Сплошные линии: метод функции Лагерра-Лежандра с тремя различными наборами факторов сходимости.  $a_c^{(1)} = 0.5$  (квадраты), 1.0 (круги), 2.0 (треугольники).  $b_c^{(1)} = a_c^{(1)}$ ,  $b_c^{(2)} = a_c^{(2)} = a_c^{(1)} \chi(\gamma_1) / \chi(\gamma_2) \approx 1.08 a_c^{(1)}$ ,  $m_{\max}$ : Наибольший индекс функций Лагерра и полиномов Лежандра, используемых при расчете. Пунктирные линии: расчеты МКЭ с сетками вида, показанного на рис. 3.1в.  $N$ : количество элементов вдоль оси  $x_3$  (см. рис. 3.2).  $k\Delta=0.5$  (\*), 0.25 (x), 0.125 (+), где  $\Delta$  длина ребра квадратного элемента на поверхности центральной среды. Пунктирная линия / звезды: логарифмическая сетка (рис. 3.2г) с  $k\Delta=0.125$ .

**Таблица 3.1.** Данные материалов, используемых в численных расчетах.

	$\rho$ [кг/м <sup>3</sup> ]	$\lambda$ [ГПа]	$\mu$ [ГПа]	$v_L$ [м/с]	$v_T$ [м/с]	$v_R$ [м/с]
<b>Алюминий</b>	2712	61.4	25.0	6409.1	3036.2	2841.2
<b>Медь</b>	8900	98.32	46.27	4630.8	2280.1	2128.5
<b>Тестовый материал</b>	8900	56.0	56.0	4344.7	2508.4	2306.2
<b>Оргстекло</b>	1190	3.0	1.5	2245.4	1122.7	1047.0

## **§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВО И КЛИН**

В [58] было показано, что одномерные волноводные моды существуют на пересечении границ раздела между двумя упругими четвертьпространствами и их общей поверхностью (рис. 3.1а). В частности, был рассмотрен случай, когда обе упругие среды в этой структуре являются пуассоновскими, т.е. изотропными материалами с двумя равными константами Ламе  $\lambda, \mu$ . Пространство параметров тогда является двумерным, и два параметра могут быть выбраны в виде  $\rho' / \rho$  и  $\mu' / \mu$ , где  $\rho', \rho$  плотности и  $\mu', \mu$  модули сдвига среды 1 и среды 2 соответственно. Для этого случая Шолте [59] определил область существования волн Стоунли, то есть акустических волн, локализованных на границе раздела двух упругих полупространств. В [58] была определена область существования в двумерном пространстве параметров, которая оказалась малым подмножеством области существования волн Стоунли.

Теперь рассмотрим границу между двумя средами, которая больше не является вертикальной по отношению к поверхности (рис. 3.1б). С уменьшением угла наклона  $\theta$ , расширяется область существования волноводных мод, а для  $\theta < 50^\circ$  она содержит область существования волн Стоунли в пространстве двумерных параметров (рис. 3.4).

С уменьшением угла  $\theta$ , открывается маленькая область в пространстве материальных параметров, где существует вторая мода. Как и область существования первой моды, она расширяется по мере того как  $\theta$  становится меньше (вставка рис. 3.4).

На рис. 3.5 показаны примеры смещений, определенные в расчетах МКЭ, для первой и второй мод при определенной комбинации параметров. Компоненты  $U_2$  и  $U_3$  показаны те, которые являются действительными значениями. Высокая степень локализации на пересечении поверхности и

границы раздела обусловлена малой скоростью этой моды  $v_1$ , по сравнению с самой низкой из скоростей Рэля  $v_{Rmin}$ , двух сред  $v_1/v_{Rmin} = 0.82$ , и скорости волны Стоунли  $v_S$ ,  $v_1/v_S = 0.79$ . Вторая мода гораздо менее локализована как вдоль поверхности, так и вдоль границы раздела, так как ее скорость  $v_2$ , намного ближе к самой низкой из двух скоростей Рэля,  $v_2/v_{Rmin} = 0.98$ . Ее смещение более сложно по сравнению с первой модой в направлениях вдоль поверхности и границы раздела.

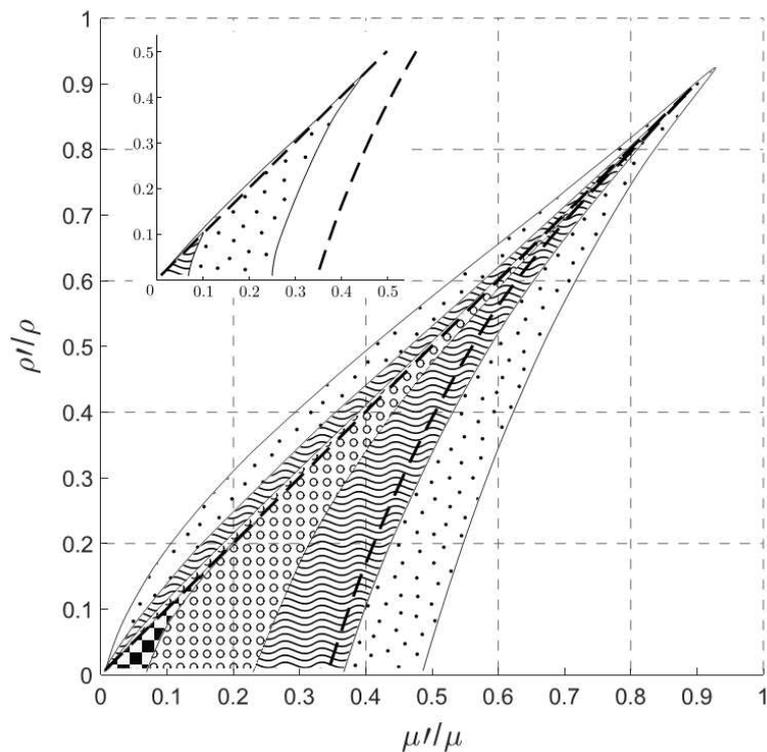


Рис. 3.4. Область существования волноводных мод в структурах, соответствующих рис. 3.1б из двух пуассоновских сред с плотностями  $\rho, \rho'$  и модулями сдвига  $\mu, \mu'$ . Углы  $\theta = 90^\circ$  (квадраты),  $70^\circ$  (открытые круги),  $50^\circ$  (волнистые линии),  $30^\circ$  (точки). Области существования для больших углов являются подмножествами областей для меньших углов. Пунктирные линии: граница области существования волн Стоунли. Врезка: область существования второй моды для углов  $\theta = 50^\circ$  (волнистые линии),  $30^\circ$  (точки).

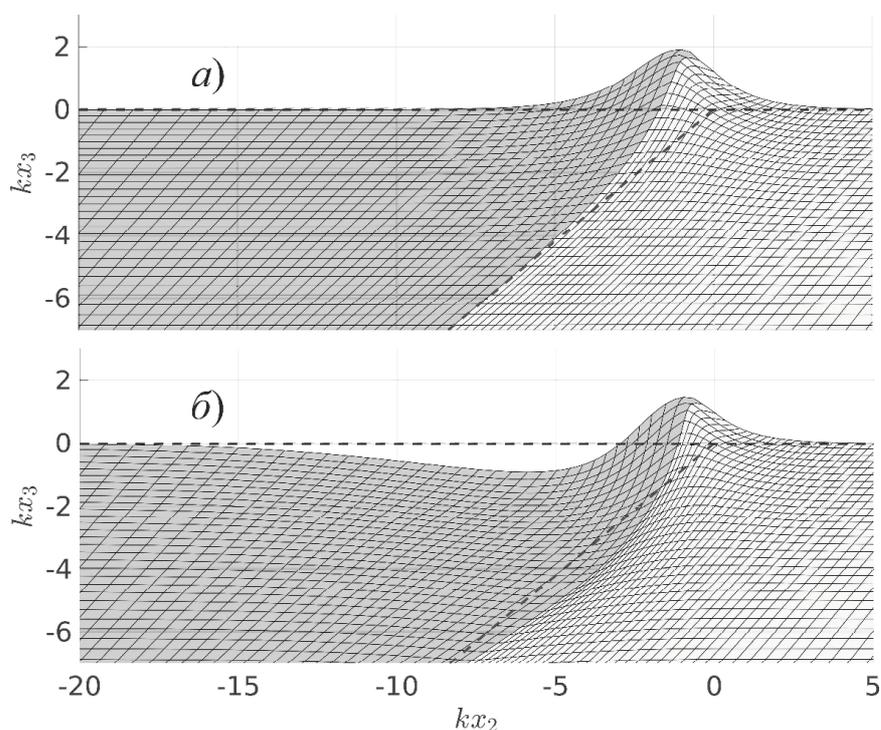


Рис. 3.5. Смещения для первой (верхний) и второй (нижний) мод. Угол  $\theta = 40^\circ$ ,  $\mu'/\mu = 0.08$ ,  $\rho'/\rho = 0.05$ . Пунктирные линии: поверхность и граница раздела в недеформированном состоянии. Компонента смещения вдоль направления  $x_1$  не указана.

Другой способ расширения диапазона существования одномерных бездисперсионных акустических мод, управляемых пересечением границы раздела и поверхностей двух упругих сред, показан на рис. 3.1в. Уменьшая угол  $\theta$  менее чем  $90^\circ$ , конструкция становится составным клином с уменьшающимся углом раскрытия. Для случая, когда оба материала являются пуассоновскими, диапазоны существования одномерных волноводных мод, локализованных на вершине композитного клина, показаны для различных углов  $\theta$  на рис. 3.6. Форма областей существования явно отличается от тех, что показаны на рис. 3.4, поскольку в системах, показанных на рис. 3.1в, волноводные моды существуют и в том случае, если оба материала одинаковые. Ниже определенного угла клина они представляют собой антисимметричные изгибные клиновые волны, локализованные на вершине однородных клиньев.

Для конкретной комбинации материалов (алюминий и медь) показаны фазовые скорости одномерных волноводных мод в композитных клиньях типа рис. 3.1в, а также скорости клиновых волн в однородных клиньях из алюминия и меди (рис. 3.7). Используемые параметры материалов приведены в таблице 3.1.

Поскольку коэффициенты Пуассона алюминия и меди практически равны, ветви клиновых волн для однородных сред возникают под одинаковыми углами клина. Для составных клиньев соответствующие ветви появляются ниже наименьшей из двух скоростей Рэлея при немного меньших углах клина по сравнению с однородными клиньями ( $\varphi=2\theta$ ).

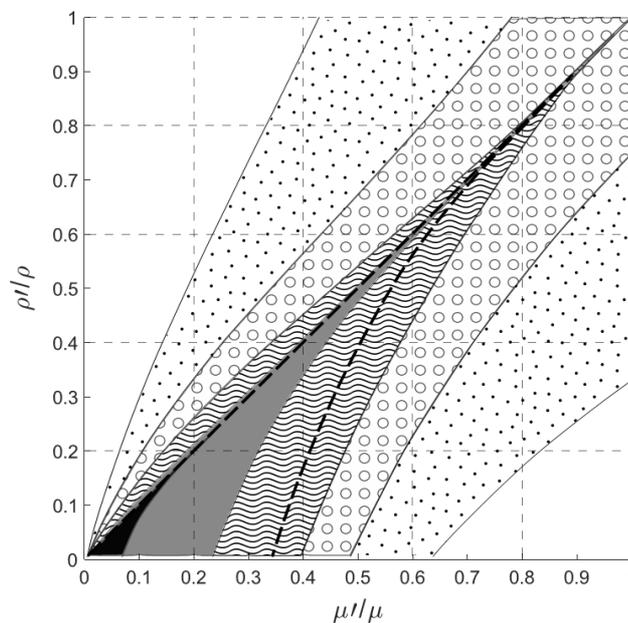


Рис. 3.6. Область существования волноводных мод в структурах, соответствующих рис. 3.1в из двух пуассоновских сред с плотностями  $\rho, \rho'$  и модулями сдвига  $\mu, \mu'$ . Углы  $\theta = 90^\circ$  (черный),  $70^\circ$  (серый),  $50^\circ$  (волнистые линии),  $40^\circ$  (открытые круги),  $30^\circ$  (точки). Области существования для больших углов являются подмножествами областей для меньших углов. Пунктирные линии: граница области существования волн Стоунли.

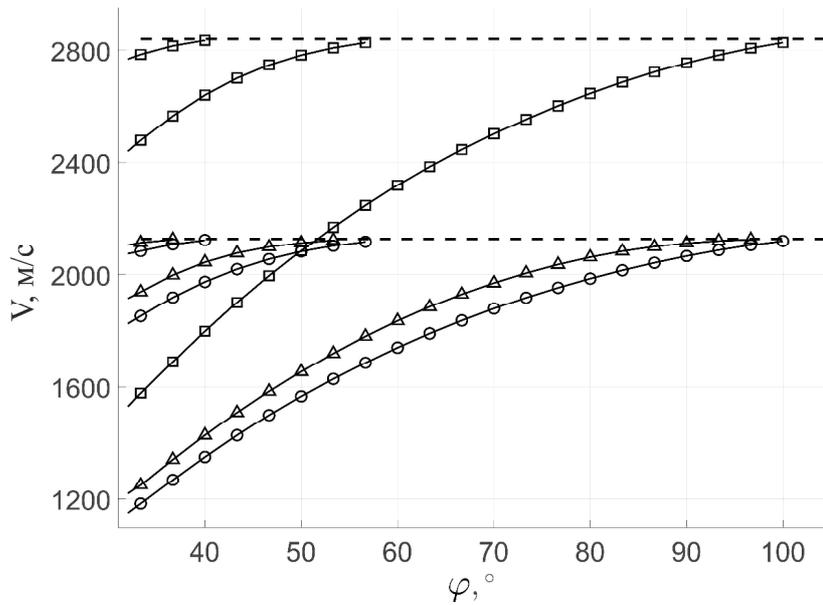


Рис. 3.7. Скорость клиновых волн из алюминия (квадраты), меди (круги) и композитных клиньев (рис. 3.1в) из алюминия и меди (треугольники) в зависимости от угла раскрытия  $\varphi$  клина.  $\varphi=2\theta$ . Верхняя/нижняя пунктирная линия: скорость волны Рэлея в алюминии/меди.

В дополнение к полностью локализованным волноводным модам с экспоненциальным затуханием для  $x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty$ , в составных клиньях вида рис. 3.1г из двух изотропных материалов существуют утечка. Вытекающие клиновые волны были впервые обнаружены в экспериментах лазерного ультразвука в клиньях из кремния, которые проявляют высокую степень анизотропии [57]. В численных расчетах было показано, что такие утечки существуют в композитных клиньях, даже если они сделаны из двух изотропных материалов. В качестве примера систем мы рассмотрим здесь композитные клинья, изготовленные из двух материалов с сильным акустическим контрастом, а именно алюминия и оргстекла. В вычислениях МКЭ, для простоты, к верхнему узлу двумерной сетки на конце клина была приложена сила гармоническая по времени. Эта сила имела декартовы составляющие одинакового размера по отношению к системе координат на рис. 3.1. На рис. 3.8, показан удвоенный логарифм величины вектора смещения,  $\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$  как функция скорости ( $\omega/k$ ) и одного из двух углов  $\theta_1, \theta_2$  (рис. 3.1г), в то время как другой угол фиксируется на значении  $30^\circ$ . Ветви резонансов со скоростями выше скорости волны Рэлея и объемной

поперечной волны в оргстекле хорошо видны. Они соответствуют утечкам волн, которые излучают энергию от вершины композитного клина в оргстелке. Для углов  $\theta_2 > 30^\circ$ , резонанс становится очень слабым и исчезает по мере того как  $\theta_2$  увеличивается. С уменьшением угла  $\theta_2$ , резонанс становится более резким, что указывает на то, что волна утечки должна быть сильнее локализована на острие клина. По мере того как  $\theta_2$  стремится к нулю, роль части оргстекла композитного клина алюминий/оргстекло сводится к небольшому возмущению на одной из поверхностей алюминиевого клина, а скорость волны утечки сходится к скорости полностью клиновидных волн для алюминиевого клина с углом раскрытием  $30^\circ$  (1436.5 m/s) как показано на Рис. 3.7.

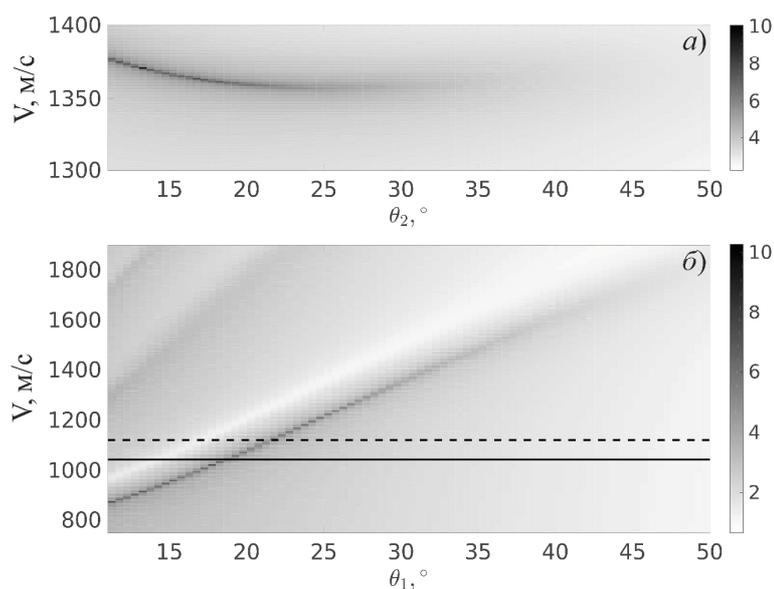


Рис. 3.8. Величина вектора смещения на конце композитного клина (рис. 3.1г), состоящего из алюминия (материал 1) и ПММА (материал 2) (шкала серого пропорциональна  $\log(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$ ).  $\theta_1=30^\circ$  (а),  $\theta_2=30^\circ$  (б). Сплошная линия: скорость волны Рэлея, пунктирная линия: объемная скорость сдвиговой волны в ПММА, соответственно (см. таблицу 3.1).

На рис. 3.8б обнаружена ветвь ярко выраженных резонансов, ослабленная для углов алюминиевой части клина  $\theta_1$  больше чем  $35^\circ$ . Для  $\theta_1$  менее чем  $22^\circ$ , скорости, соответствующие этой ветви, становятся меньше, чем объемная скорость поперечных волн в оргстекле. Это означает, что

вытекающие волны могут излучать энергию от вершины только через поверхностные волны, распространяющиеся на поверхности части клина из оргстекла. Притом, что на границе раздела оргстекло/алюминий волны Стоунли не существуют. Примерно при  $18^\circ$  ветвь сливается в нерадиационную область ниже скорости волны Рэлея в оргстекле и теперь представляет собой идеально клиновые волны с острием.

На рис. 3.8б видны еще две ветви волн утечки, хотя и менее выраженные, чем самая нижняя. По мере того как  $\theta_1$  стремится к нулю, скорости двух нижних ветвей, по-видимому, сходятся к скоростям полностью локализованных клиновых волн в клиньях из оргстекла с углом раскрытия  $30^\circ$ .

### ***§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В УСЕЧЕННОМ КЛИНЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ТРЕХ СРЕД***

Системы вида, показанного на рис. 3.1д, могут рассматриваться как два четверть пространства или два клиновидных упругих материала, которые не соединены напрямую (сварены), а связаны через третью среду в форме упругой пластины. Такие структуры, очевидно, находят реализации в различных приложениях, например, в двух компонентах технического устройства, которые связаны упругой связью, например клейким слоем или два куска камня с промежутком между ними, заполненным другим материалом.

Мы ограничимся здесь примером, в котором среды 1 и 2 на рис.3.1д идентичны. Для внешнего материала был выбран алюминий, а для центрального материала была выбрана медь. В то время как упругие постоянные обеих сред имеют сравнимый размер, центральный материал намного тяжелее, чем внешний. Это приводит к тому, что скорости объемной волны и волны Рэлея материала в центре будут меньше, чем скорости внешней среды (см. таблицу 3.1). Внешняя среда, имеет форму

двух клиньев с углами раскрытия  $\theta_1 = \theta_2 = 40^\circ$ . Дисперсионные кривые для одномерных волноводных мод, локализованных на поверхности центральной среды этой структуры, показаны на рис. 3.9 вместе с величинами смещения в плоскости  $x_2$ - $x_3$ . Скорость волны Рэлея в алюминии больше скорости объемной сдвиговой волны в  $v_T$  меди. В бесконечной медной пластине при сварном контакте с алюминиевыми полупространствами на ее верхней и нижней поверхностях существуют монохроматические акустические волны с полями смещений, экспоненциально убывающими в алюминиевые полупространства. Мы называем их обобщенными модами пластин, поскольку их можно рассматривать как аналоги волн Лэмба в отдельно стоящей бесконечной пластине. Их скорости всегда больше, чем  $v_T$  и, для некоторых ветвей их дисперсионные соотношения, стремятся к  $v_T$  с уменьшением длины волны. Это было проверено численно для самых низких ветвей с использованием материальных констант меди и алюминия, приведенных в таблице 3.1. Из этого факта можно сделать вывод, что все моды со скоростями, меньшими, чем  $v_T$  (верхняя горизонтальная линия в рис. 3.9) бегут на поверхности центральной среды ( $x_3=0$ ). Это означает, что их связанные смещения экспоненциально затухают вглубь центральной среды и во внешней среде от границ. Также отметим, что волны Стоунли не существуют на плоской границе раздела между медным и алюминиевым полупространством.

Акустические волны, распространяющиеся вдоль поверхности центральной среды со скоростью  $v$ , превышающей  $v_T$  ожидается, что будут вытекающими. Однако они могут быть полностью волноводными в особых случаях, поскольку существуют объемные волны или вышеупомянутые обобщенные моды пластин со скоростями, меньшими, чем  $v$  при достаточно малой длине волны. Это лишь необходимое, но не достаточное условие утечки.

Волноводные моды в этой системе могут характеризоваться их симметрией относительно отражения в плоскости  $x_1$ - $x_3$ . С увеличением

величины волнового вектора  $k$  вдоль направления  $x_1$ , новые дисперсионные ветви волноводных мод с чередующейся симметрией возникают в интервале скоростей между  $v_T$  и скоростью волны Рэлея  $v_R$  центрального материала. На вставке к рис. 3.9 показаны примеры смещений мод, относящихся к первым четырем ветвям. Они бегут на поверхности центральной среды, при распространении в направлении  $x_1$  и убывают до нуля в направлении  $x_3$  во внешних средах, и они имеют характер стоячей волны вдоль оси  $x_2$  (рис. 3.1.) с увеличением числа ее узлов с ростом номера моды. По мере того как углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  внешних алюминиевых клиньев приближаются к нулю, ожидается, что эти моды будут стремиться к хорошо известным краевым модам пластины ([65], [111 - 113] и недавнему обзору [114] с дальнейшими ссылками).

Схема смещения первой моды, показанная на вставке к рис. 3.9, содержит значительное количество деформации в алюминиевых клиньях. Фактически поле смещения первой моды, соответствующее фазовой скорости 2221,2 м/с, напоминает поле антисимметричной изгибной клиновой волны. Замечательной особенностью первой ветви дисперсионных кривых на рис. 3.9 является ее крутой минимум и очень быстрое увеличение фазовой скорости при уменьшении значения  $kd$ , т.е. с увеличением длины волны или уменьшением толщины промежуточного медного слоя между двумя алюминиями клиньями. При  $2kd \approx 0.4$  фазовая скорость этой моды достигает скорости объемных поперечных волн в центральной среде. Для меньших значений  $2kd$  ожидается, что волны станут вытекающими. На рис. 3.9, эта ветвь продолжается в радиационном режиме выше  $v_T$  расчетами МКЭ путем решения задачи на собственные значения (3.11) а для системы конечного размера в плоскости  $x_2$ - $x_3$  решается с источником и идеально согласованными слоями. Дисперсионные кривые, полученные этими двумя способами, очень хорошо согласуются, указывая на то, что утечка этой моды со скоростями  $> v_T$  очень мала. На рис. 3.9, дисперсионная ветвь усечена по причинам численной неточности и

смешивания с объемными резонансами. В пределе  $kd \rightarrow 0$  мы ожидаем, что фазовая скорость первой моды будет сходиться к значению скорости волны клина из чистого алюминия без промежуточного слоя меди и угла раскрытия  $\theta_1 + \theta_2 = 80^\circ$  (2646.2 м/с).

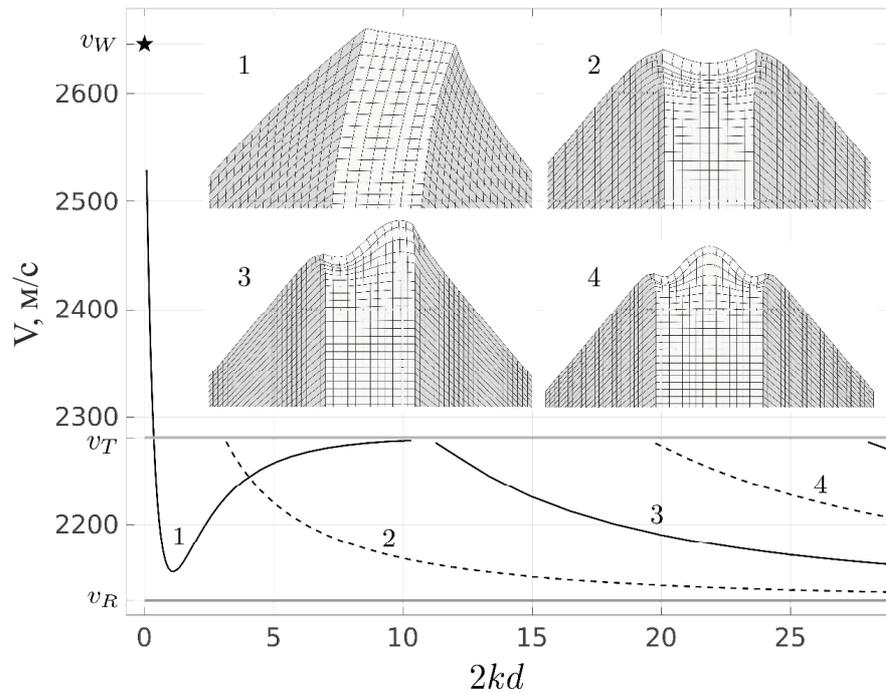


Рис. 3.9. Дисперсионные кривые (фазовая скорость как функция волнового вектора  $k$ ) волноводных мод для нечетных (сплошной) и четных (пунктирной) мод в системе вида рис. 3.1д с  $\theta_1 = \theta_2 = 40^\circ$ , среда 1 и 2: алюминий, среда 3: медь. Верхняя горизонтальная линия: Скорость объемных поперечных волн в меди. Нижняя горизонтальная линия: скорость волны Рэлея в меди. Вставки: модели смещения в плоскости  $x_2$ - $x_3$  мод ветви 1 при  $2kd=3$ , ветви 2 при  $2kd=8$ , ветви 3 при  $2kd=15$  и ветви 4 при  $2kd=25$ . Данные материала см. В таблице 3.1.  $v_W$ : Скорость распространения клиновой волны в алюминиевом клине с углом раскрытия  $80^\circ$ .

Резкое увеличение дисперсионной кривой первой моды на рис. 3.9 как в нерадиационном, так и в радиационном режимах может использоваться в качестве чувствительного инструмента для определения толщины промежуточных слоев или изменений этой величины. Отметим здесь, что другой случай наблюдался для двух четвертьпространств, связанных промежуточным слоем очень мягкого материала толщиной  $2d$  (рис. 3.1д с  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ). Здесь получается, что слабая связь между двумя одинаковыми

прямоугольными клиньями, которая обеспечивается материалом в центре, приводит к расщеплению скорости волны клина, что дает две близкие дисперсионные ветви для симметричной и антисимметричной мод.

Волны утечки в системе типа рис. 3.1д были более детально исследованы в расчетах методом конечных элементов с гармоническим по времени источником, на левой половине поверхности промежуточного слоя. В этой области поверхности данный вектор имел постоянную амплитуду, а величины трех его составляющих компонент были равны. Результаты этих расчетов показаны на рис. 3.10.

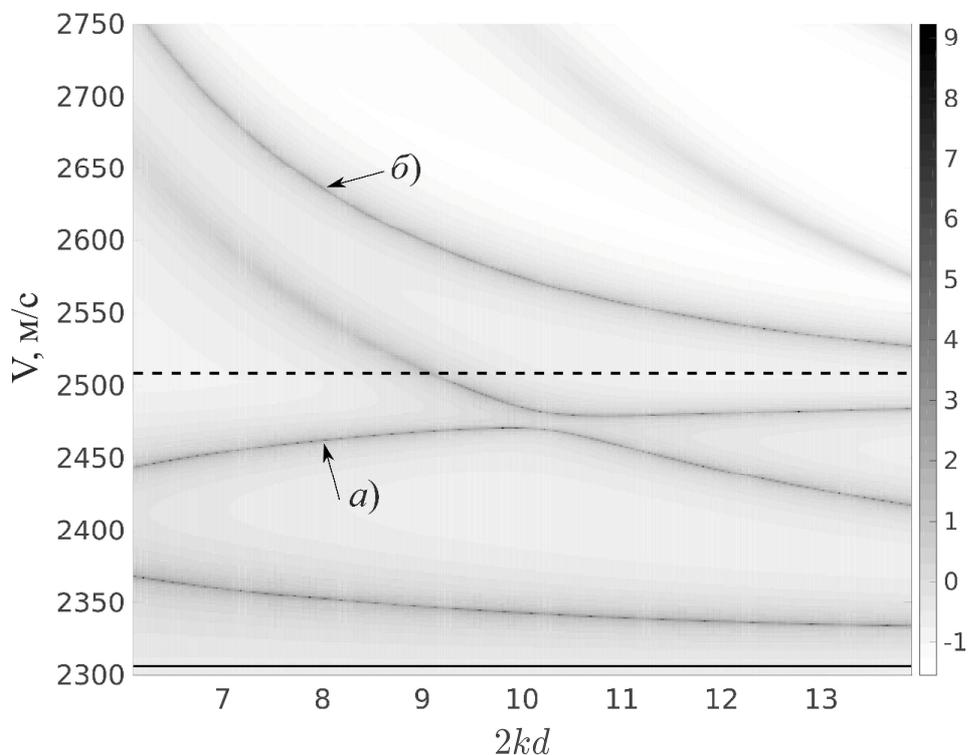


Рис. 3.10. Величина квадрата вектора смещения у поверхности среды 3 в структуре рис. 3.1д с  $\theta_1 = \theta_2 = 40^\circ$ , среды 1 и 2: алюминий, среда 3: тестовый материал. (Данные о материалах см. в таблице 3.1.) Оттенки серого пропорциональны  $\log[\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)]$ , где  $\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$  суммы по квадратам величин смещения всех узлов на поверхности среды 3 в МКЭ расчетах. Сплошная линия: скорость волны Рэлея, пунктирная линия: скорость объемной сдвиговой волны среды 3. Стрелки относятся к схемам смещения, показанным на рис. 3.11.

По сравнению с данными на рис. 3.9 для промежуточного слоя здесь были использованы другие материальные константы (материал для

испытаний в таблице 3.1). Дисперсионные кривые в нерadiационном режиме между сплошной и пунктирной горизонтальными линиями заметно отличаются от соответствующих кривых на рис. 3.9, что указывает на его чувствительность к упругим свойствам промежуточного слоя. Например, происходит предотвращенное пересечение двух дисперсионных ветвей, принадлежащих модам одинаковой симметрии, соответствующих ветвям 1 и 3 на рис.3.9.

Не менее интересными являются очень хорошо выраженные ветви волны утечки над пунктирной горизонтальной линией, что указывает на высокую степень локализации на поверхности среды 3. Для бесконечной пластины с материальными постоянными, соответствующими таблице 3.1, зажатой между двумя алюминиевыми полупространствами при сварном контакте существуют обобщенные моды пластин, имеющие скорости, сходящиеся снизу к скорости объемной сдвиговой волны испытываемого материала с уменьшением длины волны. Это подразумевает, что моды на рис. 3.10 со скоростями немного ниже пунктирной линии также могут быть вытекающими. На рис. 3.11б показан профиль смещения волны утечки со скоростью  $v = 2635.3$ , вдоль оси  $x_3$  нормали к поверхности в центре среды 3 (рис. 3.1д) показано и сопоставлено со смещениями полностью локализованной антисимметричной волноводной модой (рис. 3.11а). Вблизи поверхности амплитуды смещений намного больше, чем у радиационной части в глубине промежуточного слоя. Распад смещений для  $kx_3 > 80$  происходит в идеально согласованном слое.

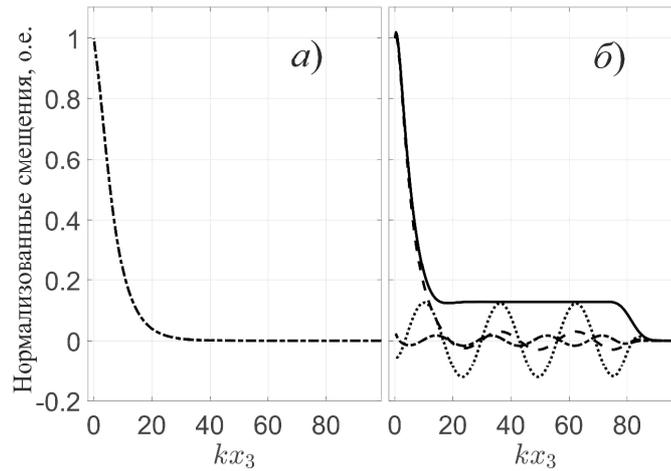


Рис. 3.11. Поле смещений волноводных мод со скоростью  $v = 2461.8$  м/с (а) и вытекающей волны со скоростью  $v = 2635.3$  м/с (б) на средней плоскости ( $x_1$ - $x_3$  плоскость) промежуточного слоя (среда 3 на рис. 3.1д),  $2kd=8$ . Две моды обозначены на дисперсионных кривых на рис. 3.10 стрелками. Реальные части  $U_1$  (пунктирная),  $U_2$  (штрихпунктирной),  $U_3$  (пунктирный),  $\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$  (твердый). Нормализация такая, что  $\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} = 1$  на поверхности ( $x_3 = 0$ ) и  $U_2(x_3 = 0)$  реальные.

Дело в том, что величина вектора ( $U_1, U_2, U_3$ ) не зависит от  $x_3$  в интервале  $20 < kx_3 < 70$  это указывает на то, что идеально согласованный слой эффективно подавил волновые компоненты, отраженные от нижней части структуры [110].

#### **§ 4. ОБРАТНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ НА КРАЮ ПЛАСТИНЫ И В СИСТЕМЕ ИЗ ТРЕХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ**

В первых двух главах основными объектами исследования были моды с отрицательной групповой скоростью для двух главных типов мод в пластинах. Третья глава посвящена исследованию локализованных волноводных явлений на границах сложных структур. Стоит отметить, что в данных волноводах также существуют моды, в спектре которых есть частотные диапазоны с отрицательной скоростью переноса энергии. Так варьируя материальные параметры контактирующих сред, а также геометрию волноводов были найдены в них ветви с обратными модами.

Данные необычные диапазоны также были найдены с помощью полуаналитического метода конечных элементов, описанного выше в данной главе.

Например, у волноводной моды, распространяющейся в структуре, состоящей из трех сред рис. 3.1д, с нормальными углами у боковых клиньев, могут существовать диапазоны с обратной групповой скоростью, которые локализованы на поверхности. В данной задаче контакта трех сред считается, что по краям расположено оргстекло, а в центре находится силикон. Отклик такой системы состоящей из трех сред на гармонический источник расположенный на границе двух сред изображен в виде дисперсионных кривых на рисунке 3.12. Для подавления отраженных волн на краях и на дне структуры также используются идеально согласованные слои.

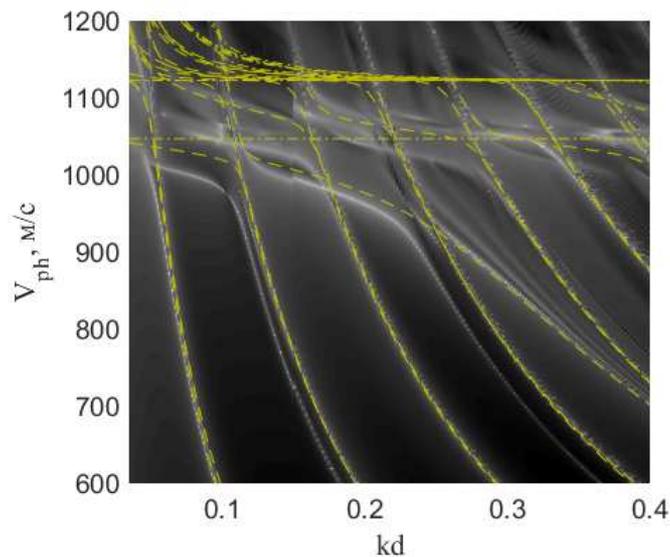


Рис. 3.12. Величина квадрата вектора смещения у поверхности среды 3 в структуре рис. 3.1д с  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ , среды 1 и 2: оргстекло, среда 3: силикон. (Данные о материалах см. в таблице 3.1.) Оттенки серого пропорциональны  $\log[\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)]$ , где  $\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$  суммы по квадратам величин смещения всех узлов на поверхности среды 3 в МКЭ расчетах.

Стоит отметить, что обратные волны будут присутствовать также и в обобщенной пластине из аналогичных материалов. Она образуется продолжением четвертьпространств на полупространства, в результате чего получаем бесконечную пластину, расположенную между двумя

полупространствами. Пунктирными желтыми линиями на данном графике отмечен спектр для обобщенной бесконечной системы состоящей из аналогичных сред.

Как видно при малых  $kd$  моды имеют положительную групповую скорость. С другой стороны, при больших значениях  $kd$  в спектре наблюдаются моды с отрицательной скоростью переноса энергии (рис. 3.13). Это можно понять по характерному поведению кривых, а именно, на данном графике видно, что с увеличением волнового числа моды падает ее частота. Стоит отметить, что частотный диапазон с обратными акустическими волнами достаточно широк в этой структуре (рис. 3.13), что является положительным моментом для экспериментального исследования данных мод.

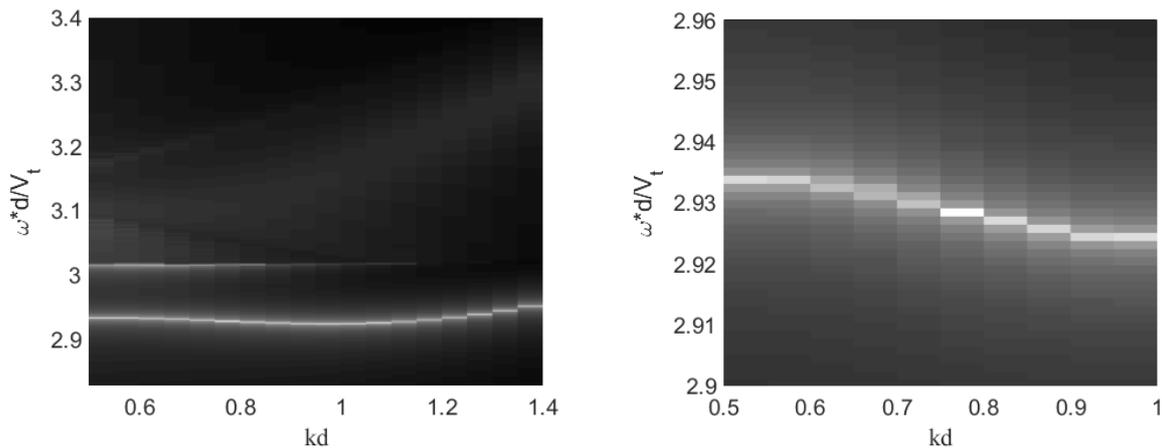


Рис. 3.13. Величина квадрата вектора смещения у поверхности среды 3 в структуре рис. 3.1д с  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ , среды 1 и 2: оргстекло, среда 3: силикон. (Данные о материалах см. В таблице 3.1.) Оттенки серого пропорциональны  $\log\left[\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)\right]$ , где  $\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$  суммы по квадратам величин смещения всех узлов на поверхности среды 3 в МКЭ расчетах.

Обратные волны также присутствуют в спектре мод в крае сделанном из силикона, где вместо оргстекла по бокам используются жесткие граничные условия (рис. 3.14). Видно, что в спектре существует локализованная волна с отрицательной скоростью переноса энергии. На рисунке 3.14 величина нормализованной частоты падает с 2.94 до 2.92 с увеличением параметра  $kd$  от 0 до 1.1. По сравнению с рассмотренным

выше примером контакта с четвертьпространствами из оргстекла, для случая жестких границ имеет место небольшое увеличение частотного диапазона существования обратной волны. По предварительным расчетам в обобщенной бесконечной пластине с жесткими границами также должны существовать обратные волны. Наличие обратных волн в спектре мод волноводов из изотропных материалов может быть связано с эффективным отрицательным сдвигом фазы из-за связи поляризаций на границе. Известно, что моду можно рассматривать как сумму парциальных объемных волн, каждая из которых связана на границе даже при жестких граничных условиях. Таким образом, при отражении от границы каждая поляризация отражается как сама в себя, так и трансформируется в другую поляризацию со сдвигом фазы.

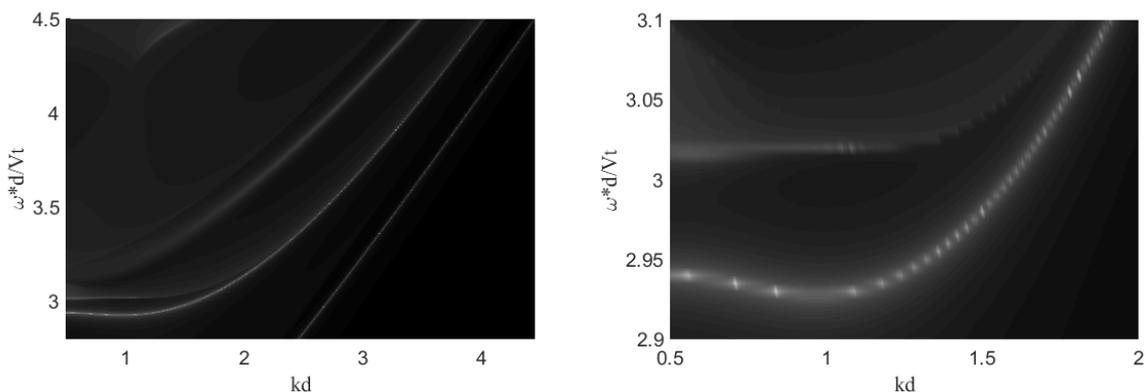


Рис. 3.14. Величина квадрата вектора смещения у поверхности среды 3 в структуре рис. 3.1д с  $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ , жесткие границы по бокам, среда 3: силикон. (Данные о материалах см. В таблице 3.1.) Оттенки серого пропорциональны  $\log\left[\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)\right]$ , где  $\sum(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$  суммы по квадратам величин смещения всех узлов на поверхности среды 3 в МКЭ расчетах.

Как уже упоминалось выше, для подавления вытекающих волн в расчетах использовались идеально согласованные слои по краям структур. Стоит отметить, что для обратных волн данные слои работают недостаточно хорошо. Это связано непосредственно с тем, что у обратных волн фазовая и групповая скорости имеют разное направление. Изменение материальных параметров в согласованных слоях имеет конкретное направление,

согласованное с волновым вектором плоской прямой волны проходящей через границу. Такое свойство приводит к тому, что данные слои могут давать для обратных волн не подавление амплитуды, а ее увеличение. Данный эффект подробно исследовался в литературе например в работе [115, 116].

Таким образом, и в сложных волноводах локализованные моды могут иметь в спектре отрицательные групповые скорости.

### ***РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3***

На пересечении плоских поверхностей и границ раздела упругих сред и в структурах, состоящих из двух клинообразных тел, связанных упругим слоем, были обнаружены одномерные волноводные акустические моды и описаны некоторые их свойства. Поля смещений одномерных волн экспоненциально затухают в двух пространственных измерениях. В дополнение к этим полностью волноводным модам были обнаружены различные ветви волн утечки с высокой степенью локализации на линии пересечения поверхностей и границ раздела или на поверхности промежуточного слоя между двумя твердыми телами клинового типа. Например, как полностью волноводные, так и излучающие одномерные волны могут применяться для неразрушающего контроля краев поверхностей раздела и промежуточных слоев в технических устройствах. В конкретной системе было показано, что их дисперсия может быть очень чувствительным к изменениям свойств материала и геометрии. Благодаря их сложным и специфичным смещениям эти моды могут быть использованы для неразрушающего обнаружения конкретных дефектов на границах раздела.

Для проверки и оптимизации расчетов МКЭ в этой работе использовался метод функций Лаггера. Очевидно, что метод конечных элементов обладает гораздо большей гибкостью в отношении геометрий, к которым он может быть применен, и его легче реализовать.

При поиске вытекающих волн в данной работе был применен сильно пространственно локализованный источник со специфической поляризацией, и величины смещений в ограниченной области на поверхности или на острие клина были отсканированы как функции частоты. Этой процедуры должно быть достаточно для обнаружения тех вытекающих волн, которые локализуются преимущественно на острие клина или на площади промежуточного слоя в системах, которые мы здесь исследовали.

Также в данной главе было показано, что в волноводах сложной формы могут существовать обратные акустически волны. Например, было обнаружено, что в спектре мод бегущих на поверхности края сделанного из силикона с жесткими границами существуют диапазоны с отрицательными групповыми скоростями. При замене жестких граничных условий на контакт с двумя четвертьпространствами из оргстекла данные диапазоны также присутствовали в спектре.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Итак, в результате проделанной работы заявленная цель была достигнута и решены все поставленные задачи.

На основе численно рассчитанного спектра для акустических мод в пластине  $YX \text{ LiNbO}_3$  была найдена ветвь с отрицательной скоростью переноса энергии. С помощью данного спектра были оценены длины волн и частоты на которых мода Лэмба  $A_1$  проходит участки с положительной и отрицательной групповой скоростями. По выбранным значениям длин волн проектировались встречно-штыревые преобразователи для резонатора на акустических модах в пластине. Это позволило достаточно точно возбуждать обратные моды Лэмба в эксперименте, исходя из задачи распространения. В дополнение к этому была составлена математическая модель для исследования возбуждения волн Лэмба с помощью метода конечных элементов в среде COMSOL. Сравнение двух теоретических подходов с экспериментальными измерениями показали их очень хорошее соответствие.

С помощью аналитических методов были исследованы энергетические характеристики обратных вытекающих волн Лэмба при различных граничных условиях. Показано, что для обратных вытекающих волн Лэмба в изотропной пластине, погруженной в жидкость, усредненный по времени интегральный по глубине поток энергии вдоль направления распространения равен нулю. Подробно исследован вопрос определения скорости переноса энергии в случае обратных вытекающих волн Лэмба. Построены дисперсионные зависимости для групповых и фазовых скоростей в случае присутствия в спектре обратных вытекающих волн Лэмба.

Была поставлена и решена задача о существовании чисто сдвиговых обратных волн в пластине ниобата калия. В случае, когда сдвиговая объемная волна распространяется в плоскости  $YX$ , то уравнения,

описывающие данные объемные волны несвязаны с уравнениями для других поляризаций. Получены дисперсионные соотношения для сдвиговых волн в пластине со свободными и металлизированными граничными условиями. Далее данные уравнения исследуются асимптотически двумя способами. С одной стороны с помощью прямого разложения дисперсионных соотношений в ряды относительно точек зарождения мод, а с другой стороны с помощью теории возмущений основанной на дивергентном соотношении. В результате получены зависимости частоты от волнового числа до второго порядка включительно. В данном выражении коэффициенты при каждом члене отвечают за свой вклад в дисперсию мод. Видно, что в таком представлении есть коэффициент при квадратичном члене разложения, который показывает влияние кривизны поверхности медленности. Данный член вносит основной вклад в существование обратных сдвиговых волн. Также в этом выражении есть коэффициент, при линейном члене описывающий взаимодействие с границей. А именно, что плоская сдвиговая волна при отражении от границы пьезоэлектрик/вакуум имеет отрицательный сдвиг фазы.

В продолжение исследования распространения сдвиговых обратных волн в ниобате калия рассматривалась задача влияния граничных условий на спектр данных волн. Показано, что проводящие тонкие слои, помещенные на обе поверхности пластины, проводимость которых изменяется от  $10^{-8}$  См/см (свободная пластина) до 1 См/см (закороченная пластина), существенно влияют на поведение спектра и распределение полей волн. Например, при электрическом закорачивании пластины с обеих сторон обратная SH1 волна становится прямой. С другой стороны, несимметричная проводимость относительно центра позволяет практически произвольным образом влиять на распределение, как смещений, так и электрического потенциала волны по толщине пластины.

В рамках диссертационной работы было проведено теоретическое исследование локализованных мод в волноводах сложной формы. Данная

задача решалась с помощью полуаналитического метода конечных элементов. Исследовались моды, распространяющиеся на границе двух сред образующих вместе либо клин, либо полупространство. Получено, что по такой границе распространяются локализованные волны в виде аналога волн Рэлея-Стоунли. Также в работе исследовались волны, бегущие по границе геометрии, состоящей из трех сред, похожей на усеченный клин. В данном волноводе существуют локализованные моды, у которых с увеличением номера моды растет число длин волн укладываемых по среднему слою. Для данной геометрии также исследовалась задача возбуждения. Показано наличие в ней вытекающих в центральную среду волн. Ограниченность геометрии в методе конечных элементов накладывает требования для применения специальных граничных условий, которые гасят уходящие на бесконечность волны.

Показано, что у дисперсионных кривых мод волноводов в виде края из искусственного каучука с жесткими границами и такого же края, граничащего с двумя четвертьпространствами из оргстекла, существуют ветви с частотными диапазонами, соответствующие обратным акустическим волнам.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю И.Е. Кузнецовой, за наставления и поддержку, В.Г. Можаяву за плодотворные обсуждения, П.Д. Пупыреву за существенную помощь в подготовке работы, А. Маеру за полезное сотрудничество, а также всем сотрудникам лаборатории электронных процессов в полупроводниковых материалах за поддержку и благоприятную для работы атмосферу.

## СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кузнецова И.Е., Недоспасов И.А., Можаяев В.Г. SH-волны с нулевой скоростью переноса энергии в пластине из сверхсильного пьезоэлектрика  $\text{KNbO}_3$  // Нелинейный мир. 2015, № 13 (2). С. 30.
2. Kuznetsova I.E., Nedospasov I.A., Zaitsev B.D., Kuznetsova A.S. Influence of conductive and viscous liquid on the properties of the Bleustein-Gulyaev wave in potassium niobate crystal // 2016 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS). IEEE, 2016. 4 p.
3. Nedospasov I.A., Mozhaev V.G., Kuznetsova I. E. Leaky backward Lamb waves in various isotropic and anisotropic plate/liquid systems // 2016 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS). – IEEE, 2016. 4 p.
4. Кузнецова, И. Е., Можаяев, В. Г., Недоспасов, И. А. Чисто сдвиговые обратные волны в пьезоэлектрических пластинах ниобата калия X- и Y-срезов // Радиотехника и электроника. 2016, № 61(11), P 1122.
5. Mozhaev V. G., Nedospasov I. A., Kuznetsova I. E. Backward acoustic plate waves: Features of properties and possible applications in microelectronic devices // 2017 Joint Conference of the European Frequency and Time Forum and IEEE International Frequency Control Symposium (EFTF/IFCS). – IEEE, 2017. P. 850.
6. Kuznetsova I. E., Nedospasov I.A., Qian Z., Wang B., Zhu F. Control of acoustic field of backward acoustic waves in piezoelectric plates // 24th International Congress on Sound and Vibration (ICSV24), 2017., Abstracts 1 p.
7. Mozhaev V.G., Nedospasov I.A., Kuznetsova I.E. Application of perturbation theory to the problem of existence of backward Lamb waves // International Conference «Days on Diffraction 2017», Abstracts. St. Petersburg: POMI, 2017. P. 101-102.
8. Nedospasov I., Mozhaev V., Kuznetsova I. Mechanisms of appearance of backward shear-horizontal waves in potassium niobate plates // 2017 IEEE

International Ultrasonics Symposium. Washington, D.C., USA. Abstract Book. IEEE, 2017. P. 184.

9. Недоспасов И.А., Можяев В.Г., Кузнецова И.Е. Изучение обратных сдвиговых волн в пьезоэлектрических пластинах кристаллов класса 2mm на основе асимптотического разложения дисперсионных уравнений // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2017. № 5. С. 1751308/1-1751308/3.

10. Nedospasov I.A., Mozhaev V.G., Kuznetsova I.E. Unusual energy properties of leaky backward Lamb waves in a submerged plate // Ultrasonics. 2017. V. 77. P. 95-99.

11. Kuznetsova, I. E., Nedospasov, I. A., Kuznetsova, A. S. Forward and Backward Acoustic Waves in Crystals with High Piezoactivity and Dielectric Permittivity // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2018. № 82(5), P. 476-480.

12. Kuznetsova, I. E., Nedospasov, I. A., Kolesov, V. V., Qian, Z., Wang, B., Zhu, F. Influence of electrical boundary conditions on profiles of acoustic field and electric potential of shear-horizontal acoustic waves in potassium niobate plates // Ultrasonics. 2018. № 86, P. 6-13.

13. Zaitsev B., Kuznetsova I., Nedospasov I., Smirnov A., Semyonov, A. New approach to detection of guided waves with negative group velocity: Modeling and experiment // Journal of Sound and Vibration. 2019. № 442, P. 155-166.

14. Pupyrev P. D., Nedospasov I. A., Mayer A. P. Guided acoustic waves at the intersection of interfaces and surfaces // Ultrasonics. 2019. № 95, P. 52-62.

15. Пупырев П. Д., Недоспасов И.А., Майер, А. П. Волноводные акустические моды в сложных структурах клиново-кромочного типа // Нелинейный мир. 2019. № 2. С. 36-38.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid // Proc. London Math. Soc. Ser 2. 1904. V. 1. № 1. P. 473.
2. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966.
3. Tolstoy I., Usdin E., Wave propagation in elastic plates: Low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. № 29, P. 37-42.
4. Meitzler A.H. Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1965. V. 38. №. 5. P. 835.
5. Бурлий П.В., Кучеров И.Я. Обратные упругие волны в пластинах// Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. №. 9. С. 644.
6. Григорьевский В.И., Козлов А.И., Плесский В.П., Терешков В.П. Расчет дисперсионных кривых мод Лэмба в пластинах ниобата лития YZ-среза // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 42.
7. Negishi, K., Existence of negative group velocities in Lamb waves // Jap. J. Appl. Phys, Pt.1. 1987. № 26, P. 171-173.
8. Wolf J., Ngoc T.D.K., Kille R., Mayer W.G. Investigation of Lamb waves having a negative group velocity // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. №. 1. P. 122.
9. Parygin V.N., Vershoubskiy A.V., Mozhaev V.G., Weihnacht M. Prolonged acousto-optic interaction with Lamb waves in crystalline plates// Ultrasonics. 2000. V. 35. № 1-8. P. 594.
10. Shuvalov A.L., Poncelet O. On the backward Lamb waves near thickness resonances in anisotropic plates // Int. J. Sol. Str. 2008. V. 45. № 11-12. P. 3430.
11. Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E., Borodina I.A., Teplykh A.A. Influence of electrical boundary conditions on profiles of acoustic field and electric potential of shear-horizontal acoustic waves in potassium niobate plates // IEEE Trans. 2008. V. UFFC-55. № 7. P. 1660.

12. Prada C., Clorennec D., Murray T.W., Royer D. Influence of the anisotropy on zero-group velocity Lamb modes // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2009. V. 126. №. 2. P. 620.
13. Germano M., Alippi A., Bettucci A., Mancuso G. Anomalous and negative reflection of Lamb waves in mode conversion // *Phys. Rev. B.* 2012. V. 85. №. 1. P. 012102-1.
14. Maznev, A. A., Every, A. G., Surface acoustic waves with negative group velocity in a thin film structure on silicon // *Appl. Phys. Lett.* 2009. V. 95. P. 011903.
15. Prada C., Clorennec D., Royer D. Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008 V.124. P. 203-212.
16. Caliendo C., Hamidullah M., Zero-group-velocity acoustic waveguides for high-frequency resonators // *J. of Phys. D: Appl. Phys.* 2017. V. 50. P. 474002.
17. Yantchev V., Arapan L., Katardjiev I., Plessky V., Thin-film zero-group-velocity Lamb wave resonator // *Appl. Phys. Lett.* 2011. V. 99. P. 033505.
18. Philippe F.D., Murray T.W., Prada C., Focusing on plates: controlling guided waves using negative refraction // *Sci. Rep.* 2015. V. 5. P. 11112.
19. Liu T., Karunasena W., Kitipornchai S., Veidt M., The influence of backward wave transmission on quantitative ultrasonic evaluation using Lamb wave propagation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 107. P. 306-314.
20. Nishimiya K., Mizutani K., Wakatsuki N., Yamamoto K., Relationships between existence of negative group velocity and physical parameters of materials for Lamb-type waves in solid/liquid/solid structure // *Jap. J. Appl. Phys.* 2008. V. 47. P. 3855-3856.
21. Lu M.H., Zhang C., Feng L., Zhao J., Chen Y. F., Mao Y.W., Zi J., Zhu Y.Y., Zhu S.N., Ming N.B., Negative birefracton of acoustic waves in a sonic crystal // *Nat. Mater.* 2007. V. 6. P. 744-748.
22. Guenneau S., Movchan A., Pétursson G., Ramakrishna S.A., Acoustic metamaterials for sound focusing and confinement // *New J. of Phys.* 2007. V. 9. P. 399.

23. Gazis D.C., Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. II. Numerical Results // J. Acoust. Soc. Am. 1959. V. 31. P. 573-578.
24. Meitzler A.H., Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // J. Acoust. Soc. Am. 1965. V. 38. P. 835-842.
25. Marston P.L., Negative group velocity Lamb waves on plates and applications to the scattering of sound by shells // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. P. 2659-2662.
26. Cès M., Royer D., Prada C., Characterization of mechanical properties of a hollow cylinder with zero group velocity Lamb modes // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 132. P. 180-185.
27. Philippe F.D., Clorennec D., Ces M., Anankine R., Prada C., Analysis of backward waves and quasi-resonance of shells with the invariants of the time reversal operator // POMA. 2013. V. 19. P. 055022.
28. Cui. H., Lin W., Zhang H., Wang X., Trevelyan J., Characteristics of group velocities of backward waves in a hollow cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 135. P. 3398-3408.
29. Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я. О возможности существования поперечных обратных волн в пластинах // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. № 9. С. 568.
30. Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я. Обратные поперечные акустические волны в пластинах кубических кристаллов // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 3. С. 310.
31. Кучеров И.Я., Маляренко Е.В. Поток энергии обратных и прямых нормальных поперечных акустических волн в пьезоэлектрических пластинах // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 4. С. 492.
32. Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E., Borodina I.A., Teplykh A.A., The peculiarities of propagation of the backward acoustic waves in piezoelectric plates // IEEE Trans. Ultras. Ferroel. Freq. Control. 2008. V. 55. P. 1660-1664.

33. Prada C., Balogun O., Murray T.W., Laser-based ultrasonic generation and detection of zero-group velocity Lamb waves in thin plates // *Appl. Phys. Lett.* 2005. V. 87. P. 194109.
34. Clorennec D., Prada C., Royer D., Murray T.W., Laser impulse generation and interferometer detection of zero group velocity Lamb mode resonance // *Appl. Phys. Lett.* 2006. V. 89. P. 024101.
35. Bramhavar S., Prada C., Maznev A.A., Every A.G., Norris T.B., Murray T.W., Negative refraction and focusing of elastic Lamb waves at an interface // *Phys. Rev. B.* 2011. V. 83. P. 014106.
36. Grünsteidl C. M., Veres I. A., Berer T., Burgholzer P., Application of SLM generated patterns for laser-ultrasound // *IEEE Ultras. Symp.* 2014. P. 1360-1363.
37. Faëse F., Raetz S., Chigarev N., Mechri C., Blondeau J., Campagne B., Tournat V. Beam shaping to enhance zero group velocity Lamb mode generation in a composite plate and nondestructive testing application // *NDT & E International.* 2017. V. 85. P. 13-19.
38. Grünsteidl C., Berer T., Hettich M., Veres I. Determination of thickness and bulk sound velocities of isotropic plates using zero-group-velocity Lamb waves // *Applied Physics Letters.* 2018. V 112(25). P. 251905.
39. Germano M., Alippi A., Angelici M., Bettucci A., Self-interference between forward and backward propagating parts of a single acoustic plate mode // *Phys. Rev. E.* 2002. V. 65. P. 046608.
40. Rokhlin S.I., Chimenti D.E., Nayfeh A.H., On the topology of the complex wave spectrum in a fluid-coupled elastic layer // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85. P. 1074-1080.
41. Lenoir O., Duclos J., Conoir J.M., Izbicki J.L., Study of Lamb waves based upon the frequency and angular derivatives of the phase of the reflection coefficient // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. P. 330-343.
42. Negishi K., Li H.U., Strobo-photoelastic visualization of Lamb waves with negative group velocity propagating on a glass plate // *Jap. J. Appl. Phys.* 1996. Pt.1. V. 35(5S). P. 3175-3176.

43. Durinck G., Thys W., Rembert P., Izbicki J.L., Experimental observation on a frequency spectrum of a plate mode of a predominantly leaky nature // *Ultras.* 1999. V 37. P. 373-376.
44. Simonetti F., Lowe M.J.S., On the meaning of Lamb mode nonpropagating branches // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 118. P. 186-192.
45. Shuvalov A.L., Poncelet O., Deschamps M., Analysis of the dispersion spectrum of fluid-loaded anisotropic plates: leaky-wave branches // *J. Sound Vibr.* 2006. V. 296. P. 494-517.
46. Aanes M., Lohne K.D., Lunde P., Vestrheim M., Ultrasonic beam transmission through a water-immersed plate at oblique incidence using a piezoelectric source transducer. Finite element-angular spectrum modeling and measurements // *Proc. IEEE Int. Ultras. Symp.* 2012. P. 1972-1977.
47. Bernard A., Lowe M.J.S., Deschamps M., Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110. P 186-196.
48. Бурлий П. В., Кучеров И. Я. Обратные упругие волны в пластинах // *Письма в ЖЭТФ.* 1977. Т. 26(9). С 644-647.
49. Kuznetsova I.E., Zaitsev B.D., The peculiarities of the Bleustein-Gulyaev wave propagation in structures containing conductive layer. // *Ultrasonics.* 2015. V. 59. P. 45-49.
50. Zaitsev B.D., Joshi S.G., Kuznetsova I.E., Borodina I.A., Influence of conducting layer and conducting electrode on acoustic waves propagating in potassium niobate plates // *IEEE Trans. UFFC* 48. 2001. P. 624-626.
51. Kuznetsova I.E., Joshi S.G., Zaitsev B.D., SH Acoustic Waves in a Lithium Niobate Plate and the Effect of Electrical Boundary Conditions on Their Properties // *Acoust. Phys.* 2001. V. 47. P. 282-285.
52. Rose J.L., The upcoming revolution in ultrasonic guided waves // *Proc. of SPIE* 7983. 2011. P. 798302-1-30.
53. Sinha B.K., Asvadurov S., Dispersion and radial depth of investigation of borehole modes // *Geophysical Prospecting.* 2004. V. 52. P. 271–286.

54. Roth M., Holliger K., Green A.G., Guided waves in near-surface seismic surveys, *Geophys // Res. Lett.* 1998. V. 25. P. 1071-1074.
55. Royer D., Dieulesaint E., *Elastic Waves in Solids II, Generation. Acousto-Optic Interaction, Applications.* Springer. Berlin. 2000.
56. Lowe M.J.S., Alleyne D.N., Cawley P., Defect detection in pipes using guided waves // *Ultrasonics.* 1998. V. 36. P. 147-154.
57. Lomonosov A.M., Hess P., Mayer A.P., Silicon edges as one-dimensional waveguides for dispersion-free and supersonic leaky wedge waves // *Appl. Phys. Lett.* 2012. V. 101. P. 031904-1-4.
58. Sokolova E.S., Kovalev A.S., Maznev A.A., Mayer A.P., Acoustic waves guided by the intersection of a surface and an interface of two elastic media // *Wave Motion.* 2012. V. 49. P. 388–393.
59. Scholte J.G., The range and existence of Rayleigh and Stoneley waves // *Mon. Not. R. Astron. Soc.: Geophys. Suppl.* 1947. V. 5. P. 120–126.
60. Abell B.C., Pyrak-Nolte L.J., Coupled wedge waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. P. 3551-3560.
61. Lagasse P.E., Analysis of a dispersion-free guide for elastic waves // *Electron. Lett.* 1972. V. 8. P. 372–373.
62. Lagasse P.E., Higher-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 1973. V. 53. P. 1116–1122.
63. Maradudin A.A., Wallis R.F., Mills D.L., Ballard R.L., Vibrational edge modes in finite crystals // *Phys. Rev. B.* 1972. V. 6. P. 1106–1111.
64. Moss S.L., Maradudin A.A., Cunningham S.L., Vibrational edge modes for wedges with arbitrary interior angles // *Phys. Rev. B.* 1973. V. 8. P. 2999–3008.
65. Maradudin A.A., Subbaswamy K.R., Edge localized vibration modes on a rectangular ridge // *J. Appl. Phys.* 1977. V. 48. P. 3410-3414.
66. Laude V., Korotyaeva M.E., Stochastic excitation method for calculating the resolvent band structure of periodic media and waveguides // *Phys. Rev. B.* 2018. V. 97. P. 224110.

67. Budaev B.V., Bogy D.B., Scattering of Rayleigh and Stoneley waves by two adhering elastic wedges // *Wave Motion*. 2001. V. 33. P. 321–337.
68. Gantesen A.K., Scattering of Rayleigh wave by an elastic wedge whose angle is less than  $180^\circ$  // *Wave Motion*. 2002. V. 36. P. 417–424.
69. Darinskii A.N., Weihnacht M., Schmidt H., FE analysis of surface acoustic wave transmission in composite piezoelectric wedge structures // *Ultrasonics*. 2018. V. 84. P. 366–372.
70. Hess P., Lomonosov A.M., Mayer A.P., Laser-based linear and nonlinear guided elastic waves at surfaces (2D) and wedges (1D) // *Ultrasonics*. 2014. V. 54 P. 39-55.
71. Mayer A.P., Krylov V.V., Lomonosov A.M., Guided acoustic waves propagating at surfaces, interfaces, and edges // *Proc. IEEE Ultrasonics Symp.* 2011. P. 2046–2052.
72. Kamotskii I.V., On a surface wave traveling along the edge of an elastic wedge // *Algebra Analiz*. 2008. V. 20. P. 86–92.
73. Zavorokhin G.L., Nazarov A.I., On elastic waves in a wedge // *J. Math. Sci.* 2011. V. 175. P. 646–650.
74. Pupyrev P.D., Lomonosov A.M., Nikodijevic A., Mayer A.P., On the existence of guided acoustic waves at rectangular anisotropic edges // *Ultrasonics*. 2016. V. 71. P. 278–287.
75. Oliner A.A. (Ed.), *Acoustic Surface Waves*. Springer. Berlin. 1978.
76. Auld B.A., *Acoustic Fields and Waves in Solids*. V.I and II. John Wiley. New York. 1973.
77. Joshi S. G., Zaitsev B. D., Kuznetsova I. E., Teplykh A. A., Pasachhe A., Characteristics of fundamental acoustic wave modes in thin piezoelectric plates // *Ultras.* 2006. V. 44. P. 787-791.
78. [www.bostonpiezooptics.com/lithium-niobate](http://www.bostonpiezooptics.com/lithium-niobate)
79. Kuznetsova I.E., Zaitsev B.D., Borodina I.A., Teplykh A.A., Shurygin V.V., Joshi S.G., Investigation of acoustic waves of higher order propagating in plates of lithium niobate // *Ultras.* 2004. V. 42, P. 373-376.

80. Zaitsev B., Kuznetsova I., Nedospasov I., Smirnov A., Semyonov A. New approach to detection of guided waves with negative group velocity: Modeling and experiment // *Journal of Sound and Vibration*. 2019. V. 442. 155-166.
81. Nedospasov I.A., Mozhaev V.G., Kuznetsova I.E., Unusual energy properties of leaky backward Lamb waves in a submerged plate // *Ultras*. 2017. V. 77. P. 95-99.
82. Kaduchak G., Hughes D.H., Marston P.L., Enhancement of the backscattering of high-frequency tone bursts by thin spherical shells associated with a backwards wave: Observations and ray approximation // *J. Acoust. Soc. Am*. 1994. V. 96. P. 3704.
83. Kaduchak G., Marston P.L., Traveling-wave decomposition of surface displacements associated with scattering by a cylindrical shell: Numerical evaluation displaying guided forward and backward wave properties // *J. Acoust. Soc. Am*. 1995. V 98. P. 3501.
84. Morse S.F., Marston P.L., Meridional ray contributions to scattering by tilted cylindrical shells above the coincidence frequency: ray theory and computations // *J. Acoust. Soc. Am*. 1999. V. 106. P. 2595.
85. Fahmy A.H., Adler E.L., Propagation of acoustic surface waves in multilayers: A matrix description // *Appl. Phys. Lett*. 1973. V. 22. P. 495.
86. Mechel F.P., *Formulas of Acoustics*. Ed. Springer. Berlin. 2008.
87. Oughstun K.E., *Electromagnetic and Optical Pulse Propagation 2: Temporal Pulse Dynamics in Dispersive. Attenuative Media*. Springer. Dordrecht. 2009.
88. Gerasik V., Stastna M., Complex group velocity and energy transport in absorbing media // *Phys. Rev. E*. 2010. V. 81. P. 056602.
89. Кузнецова И. Е., Можяев В. Г., Недоспасов И. А. Чисто сдвиговые обратные волны в пьезоэлектрических пластинах ниобата калия X-и Y-срезов // *Радиотехника и электроника*. 2016. Т. 61(11). С. 1122-1131.
90. Недоспасов И.А., Можяев В.Г., Кузнецова И.Е. Изучение обратных сдвиговых волн в пьезоэлектрических пластинах кристаллов класса 2mm на

основе асимптотического разложения дисперсионных уравнений // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2017. № 5. С. 1751308/1-1751308/3.

91. Tseng C.C. Piezoelectric surface waves in cubic and orthorhombic crystals // *Appl. Phys. Lett.* 1970. V. 16. № 6. p. 253.

92. Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials // *Appl. Phys. Lett.* 1968. V. 13. № 12. P. 412.

93. Bleustein J. L. Some simple modes of wave propagation in an infinite piezoelectric plate // *The Journal of the Acoustical Society of America.* 1969. V. 45(3). P. 614-620.

94. Микер Т., Мейтцлер И.А. Гл. 2. В кн.: Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т. 1. Ч. А. М.: Мир, 1966. С. 140; Meeker T.R., Meitzler A.H. Ch. 2. In: *Physical Acoustics* / Ed. W.P. Mason. V. 1. Pt. A. New York: Academic Press, 1964. P. 111.

95. Zgonik M., Schlessler R., Biaggio I., Voit E., Tscherry J., Günter P. Materials constants of  $\text{KNbO}_3$  relevant for electro-and acousto-optics // *J. Appl. Phys.* 1993. V. 74. № 2. P. 1287.

96. Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E., Borodina I.A., Joshi S.G. Characteristics of acoustic plate waves in potassium niobate ( $\text{KNbO}_3$ ) single crystal // *Ultrasonics.* 2001. V. 39. № 1. P. 51.

97. Лямшев Л.М., Шевяхов Н.С. Явление отрицательного смещения ультразвукового пучка при отражении от свободной границы пьезоэлектрического кристалла // *Акуст. журн.* 1975. Т. 21. № 6. С. 951.

98. Марышева Т.Н., Шевяхов Н.С. О продольном потоке энергии при отражении поперечной волны на границе пьезокристалл–вакуум // *Акуст. журн.* 1986. Т. 32. № 3. С. 413.

99. Balakirev M.K., Gilinsky I.A., Popov V.V. Double reflection and birefringence of acoustoelectrical waves in piezocrystals with polarization unchanged // *Sol. State Commun.* 1979. V. 32. № 3. P. 253.

100. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.

101. Levy M., Bass H., Stern R., Modern acoustical techniques for the measurement of mechanical properties. Vols. 39. Academic Press. 2001.
102. Slobodnik A.J., Jr., Conway E.D., Delmonico R.T. Microwave Acoustic Handbook. 1973. AFCRL-TR-73-0597
103. Hu Z., Cui H., An Z., Mao J., Measurements of backward wave propagation using the dynamic photoelastic technique // IEEE Ultras. Symp. 2016. P. 1-4.
104. Hashim A.M., Kasai S., Hashizume T., Hasegawa H., Large modulation of conductance in interdigital-gated HEMT devices due to surface plasma wave interactions // Jpn. J. Appl. Phys. 2005. V. 44. P. 2729-2734.
105. Drapak S. I., Kovalyuk Z.D., The effect of photocurrent amplification in an  $\text{In}_2\text{O}_3$ -GaSe heterostructure // Tech. Phys. Lett. 2001. V. 27. P. 755-757.
106. Pakula C., Zaporojtchenko V., Strunskus T., Zargarani D., Herges R., Faupel F., Reversible light-controlled conductance switching of azobenzene-based metal/polymer nanocomposites // Nanotechnology. 2010. V. 21. P. 465201.
107. Mayer M., Zaglmayr S., Wagner K., Schöberl J., Perfectly matched layer finite element simulation of parasitic acoustic wave radiation in microacoustic devices // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 2007. P. 702-706.
108. Burrige R., Sabina F.J., Theoretical computations on ridge acoustic surface waves using the finite-element method // Electronics Lett. 1971. V. 7. P. 720-722.
109. Chu J.Y.H., Courtney C., Ultrasonic edge waves for damage detection in composite plate stiffeners // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 2016.
110. Feng F., Shen Z., Shen J., Edge waves in a 3D plate: Two solutions based on plate mode matching // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. V. 22 P. 2065–2074.
111. Lawrie J.B., Kaplunov J., Edge waves and resonance on elastic structures: An overview // Mathematics and Mechanics of Solids. 2012. V. 17. P. 4–16.

112. Dhia A. S. B. B., Chambeyron C., Legendre G., On the use of perfectly matched layers in the presence of long or backward propagating guided elastic waves // *Wave Motion*. 2014. V. 51(2). P. 266-283.
113. Skelton E. A., Adams S. D., Craster, R. V. Guided elastic waves and perfectly matched layers // *Wave motion*. 2007. V. 44(7-8). P. 573-592.