

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

*На правах рукописи*



БЕЛЬКОВИЧ Игорь Викторович

**ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ РИМАНА-ЗИЛЬБЕРШТЕЙНА  
ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН И ЛУЧЕВОДОВ**

05.12.07 – Антенны, СВЧ-устройства и их технологии

Диссертация  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
Коган Б.Л.

Москва – 2019

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1.1 Принципы построения, проектирования и расчета лучеводов и зеркальных антенн дальней космической связи .....	12
1.2 Методы расчета электромагнитных полей электрически больших структур .....	21
1.3 Оценка и максимизация эффективности зеркальных антенн и лучеводов.....	26
1.4 Определение векторов Римана-Зильберштейна. Уравнения Максвелла и энергетические характеристики .....	31
1.5 Постановка задачи .....	36
1.6 Выводы .....	38
Глава 2. Теория и методы расчета электромагнитных полей векторов Римана-Зильберштейна.	39
2.1 Основные соотношения электродинамики векторов Р-З .....	39
2.2 Специальные системы координат .....	42
2.3 Метод физической оптики для векторов Р-З и интеграл Кирхгофа.....	44
2.4 Векторные сферические гармоники векторов Р-З.....	49
2.5 Разложение поля в ряд по цилиндрическим и сферическим волнам .....	54
2.6 Метод параболического уравнения .....	60
2.7 Выводы .....	61
Глава 3. Расчет электромагнитных полей апертурных антенн и лучеводах .....	62
3.1 Характеристики антенн, выраженные через векторы Р-З .....	62
3.2 Расчет характеристик двухзеркальной антенны.....	66
3.3 Расчет двухзеркального лучевода с учетом влияния кожуха .....	85
3.4 Выводы .....	97
Глава 4. Проектирование и расчет лучевода 32-метровой антенны ДКС .....	98
4.1 Построение облучающей схемы 32-метровой антенны.....	98
4.2 Принципы построения двухзеркальных несимметричных антенн и лучеводов, сохраняющих свойства симметрии диаграммы направленности и отсутствия кроссполяризации. Электродинамический расчет лучевода 32-метровой антенны.....	101
4.3 Синтез и расчет модифицированного лучевода 32-метровой антенны .....	113

4.4	Расчет лучевода и антенной системы с реальной облучающей системой и учетом источников искажений.....	121
4.5	Выводы .....	138
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....		139
Список сокращений .....		141
Список литературы .....		142
Приложение А. Вывод выражений поля элементарного диполя, теоремы эквивалентности и формулы Стрэттона-Чу для векторов Р-З.....		150
Приложение Б. Алгоритм расчета D-функций Вигнера.....		159
Приложение В. Вывод выражения сферических гармоник – собственных функций уравнений Максвелла для векторов Р-З.....		165
Приложение Г. Определение коэффициентов разложения поля в ряд.....		170
Приложение Д. Вывод выражений для метода параболического уравнения.....		175
Приложение Е. Решение тестовой задачи излучения плоской апертуры.....		180
Приложение Ж. Акт внедрения результатов диссертации НИУ «МЭИ».....		191
Приложение З. Акт внедрения результатов диссертации АО «ОКБ МЭИ» .....		192

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность темы исследования**

В настоящее время все большее значение приобретает задача освоения дальнего космоса. Важность задачи обусловлена новейшими открытиями в областях теоретической физики и астрономии, для дальнейшего развития которых необходимо освоение дальних рубежей космического пространства, открытие новых горизонтов и знаний человека об окружающем мире. В связи с этим активно развиваются техника и технологии систем дальней космической связи (ДКС). В рамках Федеральной космической программы России на 2016-2025 годы заложена модернизация и создание новых средств ДКС, важнейшим элементом которых являются антенны ДКС, применяемые для радиоастрономии и управления космическими аппаратами (КА).

В любой системе спутниковой связи два важнейших параметра радиолинии с точки зрения антенной системы – добротность антенны (отношение коэффициента усиления к шумовой температуре антенны,  $G/T_{ш}$ ) и эквивалентная изотропно излучаемая мощность. Оба фактора определяются усилением наземной антенны, которое пропорционально квадрату диаметра рефлектора и частоты, и характеризуют дальность работы и качество приема/передачи антенны. Условная граница дальнего космоса – расстояние от Земли 2 миллиона километров, поэтому для связи с дальними КА требуется принимать чрезвычайно слабые сигналы. Таким образом, для задач радиоастрономии и связи с дальними КА необходимо создание антенн с большой эффективной площадью, стоимость которых, по оценке Б.А. Попереченко (ОКБ МЭИ), для зеркальных антенн пропорциональна диаметру главного зеркала в третьей степени. В связи с этим антенные системы ДКС – сложные и дорогостоящие устройства, разрабатываемые и изготавливаемые с применением современных технологий, на этапе проектирования которых необходимо добиваться максимальной эффективности.

В 60-х – 70-х годах прошлого века началось активное развитие и создание больших антенн дальней космической связи. Были созданы 64-метровые, 70-метровые и даже 100-метровые полноповоротные радиотелескопы в СССР, США и Европе. Со временем как за рубежом, так и в России пришли к пониманию того, что создание и эксплуатация антенн диаметром больше 40-50 метров экономически нецелесообразны. В настоящее время их развитие идет по «гибридному» пути – создание антенных полей, состоящих из антенн среднего диаметра (от 12 до 35 метров).

В 1980-90е годы сначала японское агентство аэрокосмических исследований, а затем и другие космические агентства в трактах антенн дальней космической связи стали активно применять квазиоптические линии передачи – лучеводы, с помощью которых мощность доставляется к основным рефлекторам посредством зеркал, а облучатель и приемно-передающая аппаратура располагается в неподвижной доступной части здания антенного комплекса. Такой подход позволяет упростить облучающую систему, минимизирует потери в ВЧ-тракте и

позволяет обеспечить соответствующие условия эксплуатации оборудования. Это дает возможность добиться низкой шумовой температуры и большей эффективности таких систем по сравнению с классическими двухзеркальными антеннами. Лучеводы состоят из цепочки несимметричных зеркал и проектируются в геометрооптическом приближении. При распространении поля в них возникают искажения, которые необходимо учитывать и, по возможности, компенсировать. Существующие методики построения лучеводов, не вносящих искажения в распространяющиеся поля, не универсальны – большинство современных лучеводов в составе антенн NASA и ESA не обеспечивают отсутствие искажений, что приводит к увеличению потерь в тракте и снижению эффективности системы.

При проектировании антенн ДКС важен выбор метода электродинамического расчета. Размеры зеркал в таких антеннах могут достигать десятков и сотен длин волн. Задачи рассеяния электромагнитного (ЭМ) поля на электрически больших структурах традиционно решаются асимптотическими высокочастотными методами. Недостатки таких методов применительно к задачам анализа ЭМ полей больших антенн ДКС – погрешность, особенно на низких частотах, и невозможность проведения комплексного расчета с учетом конструктивных источников искажений (например, кожуха лучевода). Асимптотические методы можно применять для первоначального эскизного проектирования, формирования облика системы, оценки уровня облучения зеркал и коэффициента усиления.

Для повышения эффективности работы больших антенн ДКС и минимизации материальных затрат на проектирование, изготовление и настройку требуется высокоточный расчет электромагнитного поля с минимальным количеством допущений. Необходимость такого расчета также вызвана тем, что антенны ДКС применяются в составе командно-измерительных комплексов, обеспечивающих управление дальними КА и прием целевой информации. Поэтому, в отличие от других систем спутниковой связи, где недостаточная энергетика канала связи приводит к ухудшению качества связи, в командно-измерительных системах это может привести к невозможности построения системы или к отсутствию связи и потере КА.

В связи с вышеперечисленным, для проектирования антенн ДКС требуется наличие эффективных методов и алгоритмов, позволяющих получать точное решение для рассеиваемых и излучаемых полей, минимизируя при этом трудозатраты и требования к вычислительным мощностям. Для этой цели предложено применить особое представление электромагнитного поля и разработанные на его основе методы электродинамики, позволяющие уменьшить количество вычислительной работы в расчетах антенн и СВЧ-структур за счет особых свойств такого представления. Основы подхода – векторы Римана-Зильберштейна полей круговой поляризации, представляющие собой линейную комбинацию электрического и магнитного поля, были введены в начале XX века. Подобное описание поля неоднократно применялось в

электродинамике в течение всего XX века, однако подход не нашел своего заслуженного места в вычислительной электродинамике, где такие векторы имеют большой нераскрытый потенциал.

Таким образом, важной и актуальной *научной задачей* на современном этапе развития средств космической связи является создание высокоэффективных больших зеркальных антенн, обеспечивающих максимально возможные дальность работы и качество функционирования при минимизации стоимости их создания, для чего необходима разработка точных и эффективных алгоритмов вычислительной электродинамики и комплексное проектирование антенн с максимальным приближением расчетных моделей к реальности.

### **Степень разработанности проблемы**

Фундаментальными исследованиями, развитием теории и методов расчета антенн дальней космической связи наиболее глубоко и полно занимались такие организации, как NASA Jet Propulsion Laboratory (американское космическое агентство), JAXA (японское агентство аэрокосмических исследований) и ESA (Европейское космическое агентство) совместно с некоторыми европейскими университетами. В частности, большой вклад внесли такие ученые как W.A. Imbriale, D. A. Bathker, W. Veruttipong, T.Y. Ootshi, P. Besso, M. Bozzi, M. Formaggi, L. Perregrini, T. Hayashi, T. Nishimura, T. Takano, Y. Rahmat-Samii, а также вклад в общую теорию зеркальных антенн J. Ruze, P.D. Potter, H. Minnet, S. von Hoerner, V. Galindo, F.C. Ludwig. Результатом исследований вышеперечисленных авторов явились такие разработки больших антенн с лучеводами, как 64-метровая антенна в Усуде (Япония), антенны DSS-14, DSS-24, DSS-25, DSS-26 (США), DSS-34, DSS-43 (Австралия), DSS-54, DSS-55, DSS-63, DSS-65 (Испания), DSA-1 (Австралия), DSA-2 (Испания), DSA-3 (Аргентина). В отечественной антенной технике также предпринимались попытки применить перспективный подход применения лучеводов в больших зеркальных антеннах. В частности, в СВЧ-тракте радиотелескопа РТ-70 в Уссурийске и Евпатории применен лучевод из двух зеркал. Из советских и российских ученых существенный вклад в развитие техники зеркальных антенн внесли Л.Д. Бахрах, А.А. Пистолькорс, Б.Е. Кинбер, П.Д. Калачев, А.Г. Соколов, А.Ф. Богомолов, И.Ф. Соколов, Б.А. Попереченко, В.С. Поляк, А.Н. Козлов, Г.Г. Бубнов, Э.М. Хайкин, В.А. Калошин и другие.

Как правило, задачи электродинамического расчета электрически больших антенн решаются асимптотическими методами – методом геометрической оптики (ГО), геометрической теории дифракции (ГТД), или методом физической оптики (ФО). Для расчета полей лучеводов широко применяется метод параболического уравнения (ПУ) и его решение – гауссовы пучки. Все известные антенны с лучеводами были рассчитаны с применением одного или комбинации из нескольких вышеперечисленных методов. При этом, исходя из сравнительного анализа, погрешность результатов таких расчетов для многозеркальных лучеводов может быть существенной даже в направлении максимума излучения. Расчет лучевода более точными

методами – методом собственных функций не осуществлялся, оценка влияния кожуха и неидеальностей зеркал многозеркального лучевода на его характеристики с определением конструктивных рекомендаций не проводилась.

Анализ больших рассеивающих структур с применением линейной комбинации электрического и магнитного поля – векторов Римана-Зильберштейна (Р-З) не осуществлялся и в известной литературе не описывался. Подход сформулирован в 1907 году, схожее представление поля неоднократно применялось в работах по электромагнетизму для решения некоторых задач такими авторами как Max von Laue, H. Minkowski, H. Bateman, L. Lewin, V.H. Rumsey, A. Lakhtakia, а также Б.Л. Коганом для анализа гофрированных структур. Однако подход применялся для решения конкретных проблем и не был полноценно исследован, не разработаны теоретическая база, математический аппарат и расчетные алгоритмы.

В связи с вышеперечисленным, *перспективным* является направление исследований и разработка *новых* методов векторного анализа электромагнитных полей больших рассеивающих СВЧ-структур – больших зеркальных антенн и лучеводов. Такими методами являются методы вычислительной электродинамики для векторов, описывающих поля круговой поляризации, позволяющих упростить и оптимизировать проектирование антенн.

### **Цели и задачи работы**

**Целями** работы являются развитие теории и практики применения векторов Римана-Зильберштейна (Р-З) для решения прикладных задач электродинамики, разработка зеркальной системы и лучевода высокоэффективной 32-метровой зеркальной антенны ДКС.

Для достижения указанной цели были решены следующие **задачи**:

- 1) Вывод теоретических соотношений, разработка методов вычислительной электродинамики для электромагнитного поля, представленного векторами Р-З.
- 2) Создание численных алгоритмов применения разработанных методов для решения прикладных задач в среде MATLAB и их верификация сравнением теоретических результатов с расчетами в САПР и результатами эксперимента, определение преимуществ применения векторов Римана-Зильберштейна по сравнению с классическим представлением поля.
- 3) Создание методов учета влияния кожуха и неидеальностей зеркал лучеводов и зеркальных антенн на их эффективность.
- 4) Разработка методики проектирования двухзеркального лучевода, не вносящего искажения в распространяющиеся поля и позволяющего трансформировать ширину луча, и применение методики к проектированию лучевода 32-метровой антенны ДКС.
- 5) Применение разработанной теории, алгоритмов и методов к электродинамическому расчету 32-метровой антенны. Оптимизация лучевода и зеркальной системы с учетом источников искажений и элементов облучающей системы.

### **Предмет и объект исследования**

**Объектом** исследования являются электрически большие излучающие и рассеивающие структуры – апертурные антенны, многозеркальные лучеводы.

**Предмет исследования** – оптимизация радиотехнической эффективности таких антенн посредством векторного расчета распространяющихся и излучаемых электромагнитных полей в терминах векторов Римана-Зильберштейна.

### **Методы исследования**

Для создания расчетных алгоритмов были аналитически получены соотношения электромагнитного поля в терминах векторов Р-З, выражения для метода физической оптики и метода собственных функций уравнений Максвелла для векторов Р-З.

В работе использованы методы вычислительной математики, программирования, асимптотические методы прикладной электродинамики, трехмерное электромагнитное моделирование в современных программных комплексах (ANSYS HFSS, Altair FEKO, CST Microwave Studio). В среде MATLAB были разработаны программы для численного расчета полей зеркальных антенн и лучеводов методом физической оптики и методом собственных функций. В эксперименте применен стандартный метод определения радиотехнических характеристик зеркальных антенн.

### **Научная новизна**

1) Получены соотношения электромагнитного поля, выраженного через векторы Римана-Зильберштейна, выведены выражения для метода физической оптики, метода собственных функций уравнений Максвелла в специальных системах координат. Такое представление поля и методы, полученные на его основе, имеют преимущества для решения прикладных задач за счет независимости векторов, простоты и симметрии соотношений.

2) Для метода собственных функций разработан алгоритм вычисления сферических функций, в качестве которых применяются D-функции Вигнера, без накопления ошибки и получены соотношения для вычисления коэффициентов разложения по источникам, определенным на сфере, и непосредственно по токам на рассеивающей поверхности, позволяющие оптимизировать вычисления многозеркальных рассеивающих систем.

3) На основе решения прикладных задач показано, что в большинстве практических случаев достаточно вычисления одного вектора Р-З для определения полного поля основной поляризации, что для задач излучения и рассеяния позволяет сократить требуемые вычислительные ресурсы.

4) Проведено численное исследование влияния отклонений поверхностей зеркал зеркальных антенн и лучеводов от теоретических и металлического кожуха лучевода на распространяющиеся поля, получены формулы, позволяющие учитывать это влияние,



определены рекомендации к конструкции и технологии изготовления зеркал с целью минимизации возникающих искажений.

5) Получена методика синтеза двухзеркальных лучеводов, не вносящих искажения в распространяющиеся поля в геометрооптическом приближении – сохраняющих симметрию исходного распределения поля и отсутствие кроссполяризации. Методика позволяет обеспечивать преобразование ширины луча в лучеводе – синтезировать лучевод с заданным коэффициентом трансформации ширины, что дает гибкость в проектировании лучевода. С помощью методики синтезирован лучевод разрабатываемой 32-метровой зеркальной антенны.

**Практическая значимость** заключается в следующем:

1) Разработаны методы и алгоритмы, позволяющие проводить анализ и синтез сложных рассеивающих СВЧ-структур с достаточно высокой точностью. Показано, что в таких задачах можно ограничиться учетом одного вектора в расчетах, что позволяет сократить количество вычислительной работы. Предложенные методы и алгоритмы внедрены в процесс разработки антенн АО «ОКБ МЭИ» и пригодны для интеграции в существующие САПР или создания на их основе новых программ электродинамического анализа, сочетающих в себе преимущества универсальности численного решения уравнений Максвелла и упрощения представлений поля с применением векторов Р-З.

2) Полученные алгоритмы и разработанные рекомендации учета случайных отклонений поверхностей зеркал от теоретических и кожуха лучевода возможно применять для дальнейших разработок с целью повышения точности расчетов и оптимизации систем.

3) Проведена разработка лучевода и зеркальной системы 32-метровой антенны на основе векторного электромагнитного расчета и комплексной оптимизации с приближением расчетной модели к реальной. По сравнению с известными мировыми аналогами, расчетная эффективность антенны увеличена на несколько процентов, при этом проведена ее оценка с учетом облучающей системы, источников искажений и потерь. В настоящее время осуществляется изготовление антенны по заказу «Роскосмоса».

### **Внедрение**

Научные результаты работ по теме диссертации применяются на предприятии АО «ОКБ МЭИ» в разработках перспективных антенных систем, в том числе больших антенн дальней космической связи – новых 12-метровой и 32-метровой антенн, в модернизации ТНА-1500, радиотелескопа РТ-70. Непосредственно результаты работы внедрены при разработке новейшей изготавливаемой 32-метровой антенны, что подтверждается актом внедрения, а также в учебный процесс кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ «МЭИ».

### **Достоверность**

Корректность защищаемых положений обусловлена строгостью постановки электродинамической задачи и выкладок при выводах формул, корректностью упрощающих предположений, применяемых при построении математической модели, апробацией основных результатов диссертационной работы на научно-технических конференциях и публикациями, одобренными научной общественностью. Достоверность представленных расчетных данных подтверждается результатами численного моделирования в известных апробированных САПР с применением методов конечных элементов, интегральных уравнений, физической оптики, а также гибридных методов. Теоретические результаты подтверждаются результатами эксперимента с определением радиотехнических характеристик зеркальной антенны.

### **Практическая направленность**

Результаты исследований в виде расчетных алгоритмов и реализаций разработанных методов применяются в ряде НИОКР, проводимых АО «ОКБ МЭИ», связанных с проектированием зеркальных антенн, в том числе при создании первой в постсоветской истории России большой высокоэффективной антенны дальней космической связи с лучеводом.

### **Вклад соискателя**

В диссертации представлены те результаты работы, в которых автору принадлежит определяющая роль. Постановка основных задач исследований, а также вывод некоторых выражений (интеграла Кирхгофа, сферических гармоник в спиральных координатах, метода параболического уравнения, формул синтеза лучевода) осуществлялись совместно с научным руководителем д.т.н., профессором Б.Л. Коганом.

Лично соискателем получены некоторые теоретические соотношения для методов физической оптики, метода собственных функций; разработан алгоритм вычисления сферических функций и коэффициентов разложения в ряд; разработаны и отработаны алгоритмы расчета ЭМ полей с помощью полученных методов; применены алгоритмы для расчетов, оптимизации и оценки эффективности зеркальных антенн; выполнен полный векторный расчет и оптимизация облучателей, лучевода и зеркальной схемы 32-метровой антенны.

**Основные положения, выносимые на защиту** в соответствии с пунктами 1, 2, 9 и 10 паспорта специальности 05.12.07 «Антенны, СВЧ-устройства и их технологии»:

1) Предложено для задач анализа электрически больших рассеивающих СВЧ-структур применять представление электромагнитного поля векторами Римана-Зильберштейна, описывающими поля идеальной круговой поляризации, распространяющимися независимо в свободном пространстве и позволяющими свести уравнения Максвелла к двум независимым уравнениям. Установлено, что для таких задач достаточно проводить расчет для одного вектора  $P$ -3, что позволяет упростить расчеты.

2) Получены соотношения методов вычислительной электродинамики для векторов P-3: метод физической оптики, метод собственных функций уравнений Максвелла с применением специального математического аппарата, для которого разработаны алгоритмы расчета сферических гармоник (в качестве сферических функций для которых применяются D-функции Вигнера) и коэффициентов разложения в ряд, адаптированных под задачи расчета полей сложных рассеивающих структур.

3) С применением векторов P-3 решены задачи векторного расчета полей и оценки радиотехнической эффективности разрабатываемых в АО «ОКБ МЭИ» зеркальных антенн и лучеводов с учетом металлического корпуса и отклонений поверхностей зеркал от теоретических, повышающие точность расчетов характеристик антенн и лучеводов и позволяющие оптимизировать их конструкцию.

4) Получена и применена к проектированию 32-метровой антенны универсальная методика синтеза многозеркального лучевода с заданным коэффициентом трансформации ширины луча, не вносящего искажения в распространяющееся поле в геометрооптическом приближении и обеспечивающего высокую эффективность системы в целом.

5) Проведена оптимизация лучевода и зеркальной системы 32-метровой антенны с применением расчета векторами P-3 и учетом элементов облучающей системы и источников искажений поля, в результате чего получены расчетные значения эффективности, превосходящие мировые аналоги.

#### **Апробация результатов и публикации по теме диссертации**

Результаты исследований докладывались и обсуждались на Международной конференции Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS) 2017, Международной научной конференции «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» (Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves) 2017, Международной конференции 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP) 2019, 6-ой Всероссийской Микроволновой конференции, Москва 2018.

#### **Публикации**

Основные результаты диссертационной работы изложены в 15 научных работах, среди которых 4 статьи в научно-технических журналах, входящих в перечень ВАК РФ, 1 статья, индексируемая Scopus, 8 публикаций в трудах научно-технических конференций, в том числе 5 публикаций в материалах конференций, индексируемых в Scopus, а также получено 2 патента РФ на изобретение.

#### **Структура и объем диссертационной работы**

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 114 наименований. Работа изложена на 192 страницах машинописного текста, содержит 83 рисунка и 24 таблицы.

## **Глава 1. Лучеводные системы в антеннах дальней космической связи.**

### **Введение в теорию электромагнитных полей круговой поляризации.**

Первая глава посвящена анализу современного состояния техники антенн дальней космической связи, методов их расчета и проектирования. Приводится обзор литературы, историческая справка. Перечислены авторы, внесшие наибольший вклад в развитие техники и технологий антенн ДКС, их основные работы, в которых решались задачи проектирования, электродинамического анализа и оптимизации таких систем. Приводятся общие соображения построения несимметричных зеркальных антенн и лучеводов, описаны проблемы, возникающие при распространении полей в таких структурах, и традиционные методы решения этих проблем. Дана классификация и описание основных классических методов расчета электромагнитных полей, указаны их достоинства и недостатки, в том числе применительно к зеркальным антеннам.

Для решения задач электродинамического анализа больших рассеивающих структур предложено применять особое описание электромагнитного поля – векторы Римана-Зильберштейна. В главе приводится введение в теорию векторов Р-З, получены уравнения Максвелла для них. Показано, что в свободном пространстве уравнения Максвелла сводятся к системе двух независимым уравнений, векторы Р-З распространяются независимо и отсутствует взаимодействие – передача мощности между векторами Пойнтинга. Это и другие приведенные далее свойства векторов позволяют упростить процесс векторного расчета электромагнитного поля излучающих структур, что в конечном итоге позволит получить решение задач анализа электрически больших рассеивающих структур, таких как зеркальные антенны и лучеводы, с высокой точностью. В конце главы формулируются конкретные задачи диссертации.

#### **1.1 Принципы построения, проектирования и расчета лучеводов и зеркальных антенн дальней космической связи**

##### *1.1.1 Антенны ДКС*

В настоящее время в России, США, Европе, Австралии, Японии и Китае создан и эксплуатируется ряд больших зеркальных антенн (с диаметром главного зеркала 30 метров и более), решающие задачи радиоастрономии и дальней космической связи. В их число входят новейшие антенны, созданные американским Национальным управлением по аэронавтике и исследованию космического пространства (NASA) и Европейским космическим агентством (ESA) с применением современных технологий и методов проектирования.

Одни из последних таких антенн – DSA 2 и DSA 3 – были введены в строй ESA в 2005 и 2013 году соответственно. Создание этих и других современных антенн ДКС является результатом многолетнего совершенствования техники и технологий связи, начавшейся с момента старта космической гонки СССР и США. Одним из первых крупных радиотелескопов в

мире является комплекс РТ-22, созданный в период с 1951 по 1958 годы в СССР в Пушинской радиоастрономической обсерватории (рис. 1 (а)). Судя по всему, РТ-22 был первой большой зеркальной антенной, построенной по двухзеркальной схеме и позволившей обеспечить работу в миллиметровом диапазоне. Это стало возможным благодаря применению мощностей корабельной и авиационной промышленности СССР. Радиотелескоп имеет высокую точность радиоотражающей поверхности и, что примечательно, работает по сей день и решает задачи радиоастрономии. Практически одновременно с ним была введена в строй первая антенна ДКС, созданная лабораторией JPL NASA в 1958 году. Первоначально спроектированная по однозеркальной схеме, в дальнейшем она была преобразована в двухзеркальную антенну Кассегрена, и оставалась такой до вывода ее из эксплуатации в 1981 году (рис. 1 (б)). Антенна была разработана для первых лунных миссий, предназначенных для исследования космического излучения в области между Землей и Луной. Среди прочего, станция успешно отслеживала беспилотный космический аппарат NASA Surveyor 1, запущенный в 1966 году и предназначенный для исследований Луны, и лунный модуль Apollo 11, тем самым играя важную роль во множестве лунных и межпланетарных космических полетов. Достаточно подробный исторический обзор достижений JPL NASA содержится в монографии [1].

Следующий шаг в эволюции СВЧ-трактов антенн ДКС, который в конечном итоге привел к появлению лучеводных трактов таких антенн – это антенна ESA под названием VIL-1. Антенна построена по двухзеркальной схеме Кассегрена с диаметром главного зеркала 15 метров. Работает она в S-диапазоне. На рис. 1 (в) изображена антенна со схематичным обозначением облучающей системы. Совмещение электрической оси рупора с угломестной осью антенны и лучеводное зеркало позволяют «отвязать» облучающую систему от угломестной оси антенны, что в свою очередь позволяет в процессе наиболее критичного угломестного поворота антенны сохранять неподвижность и облегчить обслуживание и доступ к чувствительному СВЧ-оборудованию – маломощным усилителям (МШУ) и усилителям мощности (УМ). Тем не менее, облучающая система и СВЧ-оборудование, расположенные в азимутальной кабине, не являются полностью неподвижными и поворачиваются вместе со всей структурой по азимуту.

Более сложные лучеводные системы позволяют полностью отделить СВЧ-тракт антенны от азимутальной и угломестной осей, и, в то же время, упростить схему построения многочастотных облучателей зеркальных антенн для одновременной спутниковой связи и сопровождения в различных частотных диапазонах за счет применения пространственных фильтров – частотно-селективных поверхностей. В 1984 году японским агентством аэрокосмических исследований в центре дальней космической связи в Усуде (Япония) введена в строй первая полноценная антенна с лучеводом – 64-меровая Кассегрена, изображенная на рис. 1 (г). Антенна была спроектирована для работы в S-диапазоне, однако со временем

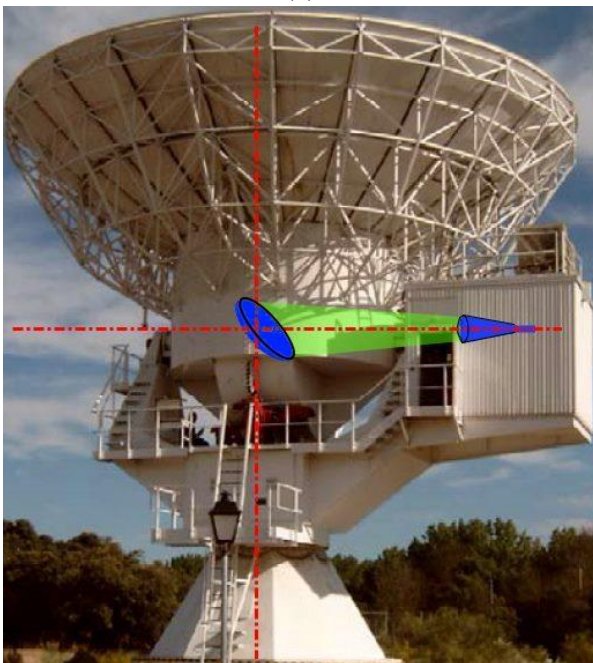
модернизирована для работы также в X-диапазоне. Изначально считалось, что антенны с лучеводами будут иметь слишком большие потери. Однако специалисты JPL NASA провели полный комплекс измерений характеристик японской антенны, в результате чего был сделан вывод о преимуществах такой концепции. Этот проект дал старт переходу от больших антенн (диаметр 64м и более), построенных по классической схеме с облучателем во вторичном фокусе, к антеннам меньшего диаметра с лучеводными трактами.



(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 1.1. Эволюция больших зеркальных антенн радиоастрономии и ДКС. РТ-22 в Пушино (а); 26-метровая антенна ДКС NASA (б); антенна VIL-1 с схематичным обозначением облучающей системы и осей вращения (в); 64-метровая антенна с полноповоротным лучеводом в Японии (г).

Фундаментальными исследованиями, развитием теории и методов расчета антенн дальней космической связи наиболее глубоко и полно занимались такие организации, как NASA Jet Propulsion Laboratory, JAXA (японское агентство аэрокосмических исследований) и ESA совместно с некоторыми европейскими университетами. Наиболее известны авторы William A. Imbriale, W. Veruttipong, D. Bathker, P. Besso, M. Bozzi, M. Formaggi, L. Perregini, A.G. Cha, T. Hayashi, T. Nishimura, T. Takano. В наиболее значимых работах этих авторов описаны история развития техники и технологий антенн ДКС, основные проблемы и методы их преодоления. В [2, 3, 4, 5] описана методика определения шумовых характеристик антенны с лучеводом. В [6, 7] представлена методика анализа полей лучевода с учетом влияния металлического кожуха, описана методика расчета потерь в многомодовом волноводе. Антенна с лучеводом для систем высокой мощности описана в [8], в [9] дано общее описание методов расчета лучеводов, представлено сравнение результатов расчетов разными методами. Наиболее полной монографией является [10], в которой описывается история развития антенной техники ДКС, приводится подробное описание конкретных реализованных систем, методы и способы анализа, расчета, настройки и измерений таких антенн. Также чрезвычайно полезной является диссертация [11], в которой собраны последние достижения ESA в части проектирования антенн с лучеводами. Помимо этого, существует большое количество публикаций по проектированию отдельных составных частей, доступных, например, в библиотеке IEEE. Вклад в общую теорию зеркальных антенн внесли J. Ruze, P.D. Potter, H. Minnet, S. von Hoerner, V. Galindo, F.C. Ludwig.

Результатом исследований вышеперечисленных авторов явились такие разработки антенн дальней космической связи, как 64-метровая антенна в Усуде (Япония), антенны DSS-11, DSS-12, DSS-13, DSS-14, DSS-24, DSS-25, DSS-26 (США), DSS-34, DSS-43 (Австралия), DSS-54, DSS-55, DSS-63, DSS-65 (Испания), DSA-1 (Австралия), DSA-2 (Испания), DSA-3 (Аргентина).

Из советских и российских ученых существенный вклад в развитие техники зеркальных антенн внесли Л.Д. Бахрах, А.А. Пистолькорс, Б.Е. Кинбер, П.Д. Калачев, А.Г. Соколов, А.Ф. Богомолов, И.Ф. Соколов, Б.А. Попереченко, В.С. Поляк, А.Н. Козлов, Г.Г. Бубнов, Э.М. Хайкин, В.А. Калошин и другие. Наша страна в связи с распадом СССР в настоящее время отстает в освоении новейших технологий средств дальней космической связи. В России эксплуатируются 64-метровые антенны ТНА-1500, проводится модернизация двух 70-метровых антенн П-2500 (РТ-70), однако полноценных антенн ДКС с лучеводами в отечественной технике до сих пор создано не было. Имеется большое количество статей, монографий по проектированию зеркальных антенн, в том числе больших антенн [12], однако всего несколько публикаций на тему анализа и проектирования лучеводов [13, 14]. При этом задач обеспечения устойчивой связи с дальними космическими аппаратами становится все больше, в связи с чем требуется создание новых современных средств ДКС.

### 1.1.2 Несимметричные зеркальные антенны и лучеводы

Антенны с лучеводами – перспективная схема построения наземных зеркальных антенн, которая находит все большее применение по мере перехода к работе в более высокочастотных диапазонах. Лучеводы имеют большой потенциал в следующих системах:

- 1) системы дальней космической связи, в которых необходимо обеспечить низкую шумовую температуру приемной системы (десятки кельвин) для приема слабых сигналов;
- 2) системы высокой мощности, где недопустимо наличие вращающихся сочленений.

Лучевод в антенной технике – квазиоптическая линия передачи энергии от облучателя к главному зеркалу или контррефлектору (рис.1.2 (а)). Он состоит из цепочки зеркал – отражающих поверхностей вращения второго порядка – параболоид, эллипсоид, гиперboloид. Конфигурация лучевода выбирается исходя из конструктивных и радиотехнических требований. К цепочке поверхностей вращения могут также добавляться плоские зеркала – эллипсы. Неплоские зеркала в лучевode принципиально несимметричные (офсетные), являющиеся вырезками из поверхностей вращения. Частным случаем лучевода является несимметричная зеркальная антенна с вынесенным облучателем. Двухзеркальные офсетные антенны Кассегрена и Грегори изображены на рис.1.2 (б). Преимущества таких антенн – высокая эффективность (за счет отсутствия затенения) и хорошая развязка между рефлектором и облучателем.

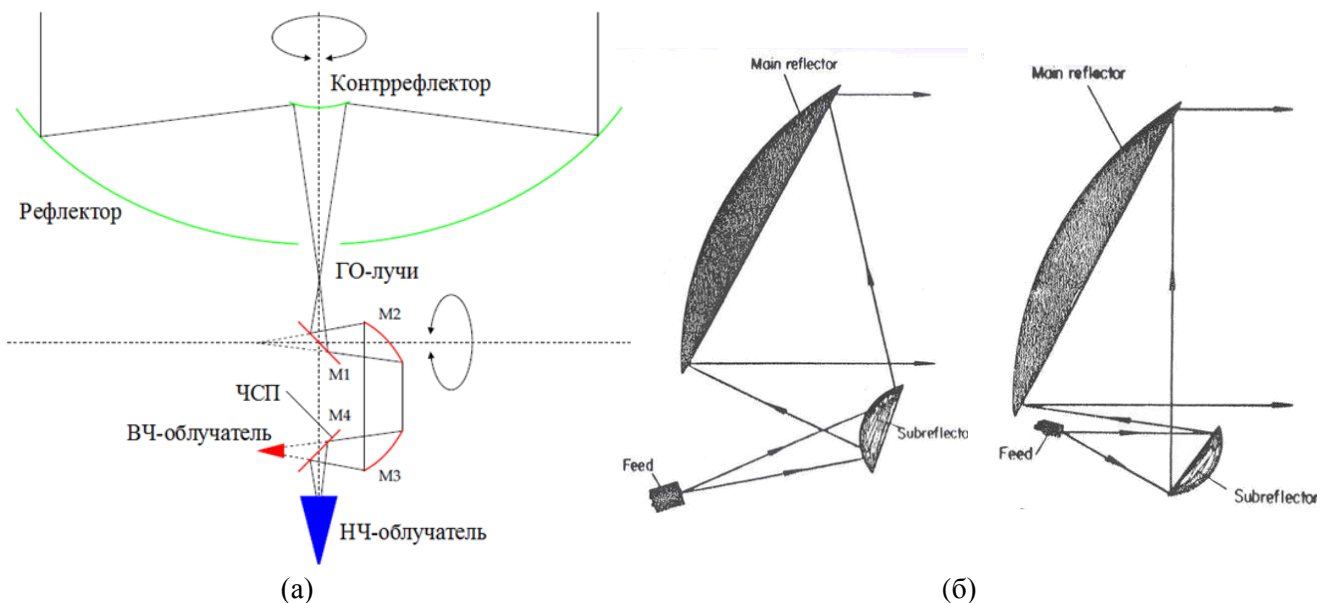


Рис. 1.2. Несимметричные зеркальные антенны и лучеводы. (а) Простейшая схема двухчастотного ВЧ-тракта с лучеводом; (б,) несимметричные двухзеркальные антенны Кассегрена и Грегори.

Лучеводы – сложные в проектировании, изготовлении и настройке изделия. В связи с высокой стоимостью и сложностью их применение должно быть обосновано. В трактах больших зеркальных антенн ДКС лучеводы применяются со следующими целями.

- Рациональное размещение приемопередающей аппаратуры. Антенны дальнего космоса разрабатываются для того, чтобы обеспечивать прием экстремально слабых сигналов,



поэтому стремятся добиться минимальной шумовой температуры приемной системы. С этой целью применяют криогенное охлаждение приемного и передающего высокомоощного тракта. В связи с этим размещение приемопередающей аппаратуры в надзеркальной кабине не всегда целесообразно, и размещение в большом термостабильном помещении является предпочтительным вариантом.

- Минимизации потерь в СВЧ-тракте. Типичные значения потерь в лучевом тракте составляют порядка 0.2-0.4дБ при длине траектории распространения до 40-50м, то есть погонные потери в правильно спроектированном лучевом тракте составляют  $L < 0.01$ дБ/м. При этом с увеличением частоты функционирование идеального лучевода не ухудшается, а наоборот, становится лучше, так как становится более точной геометрооптическая модель лучевода.
- Упрощение СВЧ-тракта. Лучеводы позволяют «отвязать» тракт от осей вращения антенны и разделить частотные каналы посредством селективных зеркал, тем самым обеспечить отсутствие вращающихся сочленений, упростить волноводный тракт и облучатель.

Принцип действия зеркальных антенн и лучеводов основаны на оптических соображениях. Однако в диапазоне СВЧ распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла и имеет особенности в оптической схеме. В частности, при отражении от поверхностей вращения второго порядка электромагнитная волна претерпевает искажения – появляется кроссполяризованная составляющая и нарушается симметрия поля. В 1954г. в статье [15] было показано, что появление кроссполяризованной составляющей в излучении осесимметричной параболической антенны связано в основном с выбором облучателя. Кроссполяризация не появляется, если антенна облучается элементом Гюйгенса, называемом автором «plane-wave feed». Работа [15] стала основой для определения Людвигом [16] «поляризованно-чистой антенны» – антенны без кроссполяризации (третье определение Людвига). Определение согласуется с результатами измерения кроссполяризации исследуемой антенны на стандартной измерительной установке. Поляризованно-чистый облучатель – это антенна, направление векторов поля излучения которой в дальней зоне такое же, как у элемента Гюйгенса. Такие облучатели были созданы и реализованы на практике [17, 18, 19]. Применение зеркальных антенн с такими облучателями было особенно важным для работы спутниковых радиосистем в режиме поляризованного уплотнения. Наибольшее распространение в технике зеркальных антенн нашли гофрированные и чок-рупоры [20] с осесимметричной диаграммой направленности с низким уровнем кроссполяризованной составляющей.

В процессе дальнейшего развития техники и активного применения несимметричных параболических антенн Хандфлингом [21] было обнаружено и многократно подтверждено другими авторами (например, [22]), что облучение несимметричных параболоидов даже идеально поляризованной антенной приводит к появлению кроссполяризованной составляющей,

зависящей от угла наклона оси облучателя к фокальной оси параболы. В несимметричных антеннах с круговой поляризацией эффекты нарушения симметрии проявляются в виде бокового смещения максимумов диаграмм излучения право- и лево- поляризованных лучей в противоположные стороны относительно плоскости симметрии (squint-эффект). Хорошее описание этих свойств офсетных антенн приведено в [23], в которой приведены кривые зависимости кроссполяризации и смещения луча от угла отклонения и уровня облучения зеркала.

Для уменьшения уровня кроссполяризации несимметричных параболических антенн был предложен 3-модовый рупорный облучатель [24]. В излучении такого рупора в дополнение к волнам  $TE_{11}$  и  $TM_{11}$  излучается определенным образом сфазированная волна  $TE_{21}$ . По сути, волна  $TE_{21}$  аналогична источнику кроссполяризованного поля и используется для его подавления. Несмотря на хорошие характеристики, такое решение оказалось неудобным в практическом отношении: рупоры не универсальны, так как конструкция облучателя в этом случае зависит от угловых соотношений несимметричного параболоида и, кроме того, возбуждение высших мод в рупоре всегда чревато узкополосностью. Одним из решений проблемы стал переход к несимметричным дкучзеркальным антеннам Кассегрена и Грегори, в которых угол между осями главного и вспомогательного рефлектора и угол отклонения оси облучателя от оси вспомогательного рефлектора связаны функциональным соотношением [24-27]. Это решение позволило использовать в качестве облучателей универсальные конструкции антенн с хорошей симметрией диаграммы направленности и без кроссполяризации.

### *1.1.3 Традиционные пути преодоления искажений поля в лучеводах*

По мере развития теории и техники зеркальных антенн их схемы усложнялись. Впервые в схеме зеркальной антенны лучевод полноценно исследовал коллектив Трентини [28]. Была исследована антенна Кассегрена, облучаемая рупорно-параболическим облучателем. При этом выявились типичные проблемы искажений поля в лучеводах – не удавалось обеспечить низкий уровень кроссполяризации и симметрию диаграммы направленности всей зеркальной антенны. Решение проблемы было предложено в работе Мизусавы и Китцеругавы [29]. В ней были сформулированы геометрооптические условия, которым должна удовлетворять форма и геометрия расположения зеркал лучевода, облучаемого на входе рупором с симметричной диаграммой направленности и без кроссполяризации, и сохраняющего эти свойства на выходе. С тех пор условия Мизусавы широко используются в конструкциях лучеводов больших зеркальных антенн, решающих задачи дальней космической связи и радиоастрономии [10, 30, 31]. Самым популярным решением стало применение лучевода, состоящего из двух параболических и двух плоских зеркал. Но такое решение можно применять только в схеме антенны с угломестно-азимутальной подвеской, когда внизу на азимутальной оси располагается единственный рупорный облучатель. В реальных задачах часто требуется обеспечить работу антенны в

нескольких диапазонах частот, а также в режиме приёма и передачи одновременно. Поэтому стали усложнять лучеводную схему, добавляя внизу дополнительные селективные зеркала для обеспечения независимой работы в нескольких диапазонах частот, а также дополнительный рефлектор в форме поверхности вращения 2-го порядка для удобства размещения набора селективных зеркал и рупоров облучателей и возможной трансформации угловой ширины пучка лучей облучателя (рис. 1.3). Хотя такое дополнение к лучеводу вызывает увеличение кроссполяризационных искажений и несимметрию диаграммы направленности, на практике оно широко применяется [10, 11].

Практически все антенны NASA и ESA построены по такой схеме, что является их общим недостатком – источником искажения поля и снижения эффективности.

Критерий Мизусавы для двухзеркальной системы записывается следующим образом:

- 1) все четыре фокальные точки должны быть расположены на одной прямой линии;
- 2) эксцентриситеты зеркал должны быть равны или обратно пропорциональны.

На рис. 1.4 изображены три примера лучеводных конфигураций, построенных согласно критерию Мизусавы. Первые два включают плоские рефлекторы, не влияющие на функционирование системы на высоких частотах. Критерий может быть применен в лучеводе с произвольным количеством зеркал (4, 6 зеркал). При применении лучеводов, построенных в соответствии с критерием Мизусавы, в них помимо сохранения симметрии лучей и отсутствия кроссполяризации обязательно выполняется условие равенства угловых ширин входного и выходного пучков лучей.

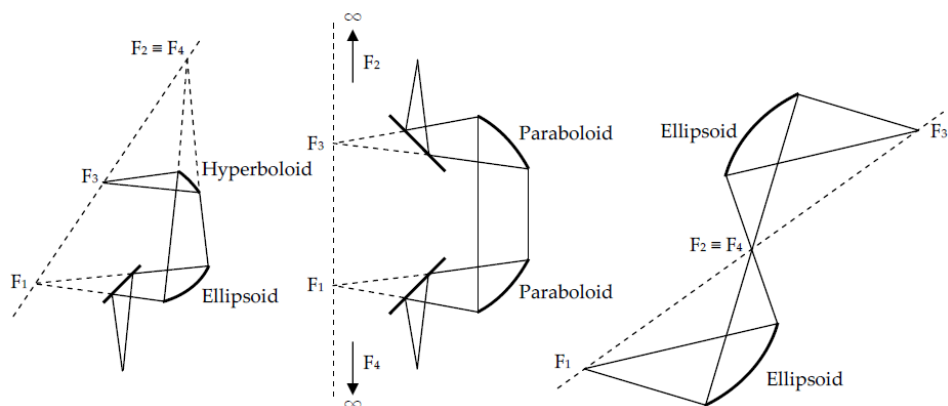


Рис. 1.4. Двухзеркальные лучеводные конфигурации из работы Мизусавы.

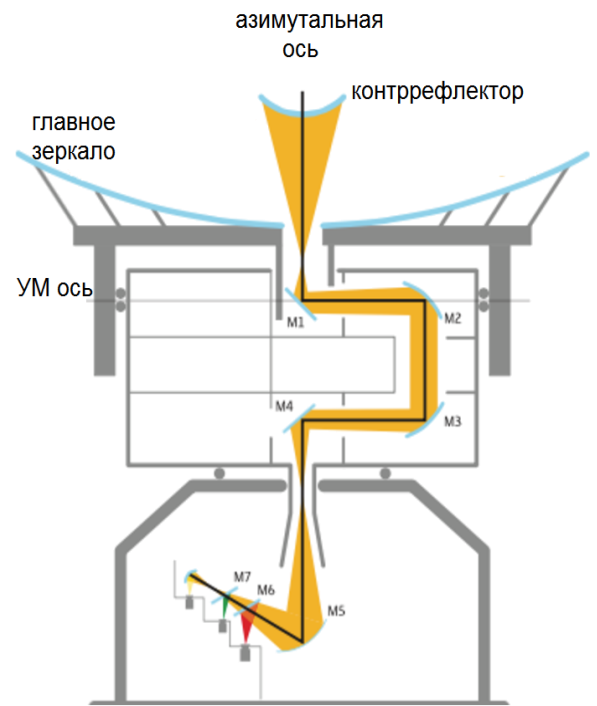


Рис. 1.3. Типичная схема многочастотной двухзеркальной антенны с лучеводом.

Выполнение последнего свойства не всегда целесообразно. В некоторых случаях может быть нужно произвести трансформацию угловой ширины пучка. Условия Мизусавы накладывают ограничения на геометрию лучевода, не допускающие этой трансформации.

Более общие условия сохранения симметрии и отсутствия кроссполяризации предложены в работе Драгоне [32]. В ней рассмотрена система зеркал, состоящая из цепочки попарно софокусных поверхностей второго порядка (эллипсоидов, параболоидов и гиперболоидов), в которой пучок лучей в результате последовательных отражений может терять свойство симметрии и отсутствия кроссполяризации (рис. 1.5). Показано, что восстановить эти свойства можно поворотом центрального луча, исходящего из фокуса одного из крайних элементов цепочки, на такой угол, чтобы после полного прохождения цепочки центральный луч, возвращающийся в начальный фокус, совпал по направлению с исходным лучом. В этом случае ось, направленную вдоль исходного луча, автор называет «эквивалентной осью». Восстановления симметрии можно также добиться добавлением определённым образом установленного дополнительного рефлектора с поверхностью второго порядка, у которого один из фокусов совпадает с начальным фокусом цепочки. При полном прохождении цепочки зеркал центральные лучи пучков должны образовывать замкнутую траекторию, что и является геометрическим условием отсутствия кроссполяризации. В [32] анализ основан на принципе конформности преобразований волновых фронтов при отражении, и результат обоснован для пучков лучей малой угловой ширины, но в патенте автора [33] ограничения на ширину пучка лучей отсутствуют. Ограничения на возможность трансформации ширины пучка не накладываются в обеих публикациях. Таким образом, по сравнению с работой Мизусавы, у Драгоне предложены более общие геометрические условия построения системы зеркал, позволяющие не только сохранять симметрию и отсутствие кроссполяризации, но и трансформировать ширину пучка лучей – распределения поля.

Несмотря на большую общность условий Драгоне, они не нашли широкого применения для построения лучеводов на практике. Имеется работа Брауна [34], который со ссылкой на статью Драгоне в частном случае строит лучевод с трансформацией угловой ширины пучка лучей. Кроме того, в работе Квик [35] лучевод, построенный в соответствии с условиями Мизусавы, дополняется рефлектором 2-го порядка, увеличивающим кроссполяризационные искажения, что выявляется в результате проведения соответствующих расчётов. Для устранения кроссполяризации и squint-эффекта автор предлагает воспользоваться методом Драгоне, но ограничивается только этим указанием. По-видимому, непопулярность условий Драгоне на практике вызвана сложностью применения и отсутствием ясной методики синтеза лучевода, в связи с чем в диссертационной работе развивается подход, позволяющий получить простое доказательство отсутствия искажений и разрабатывается методика синтеза лучевода.

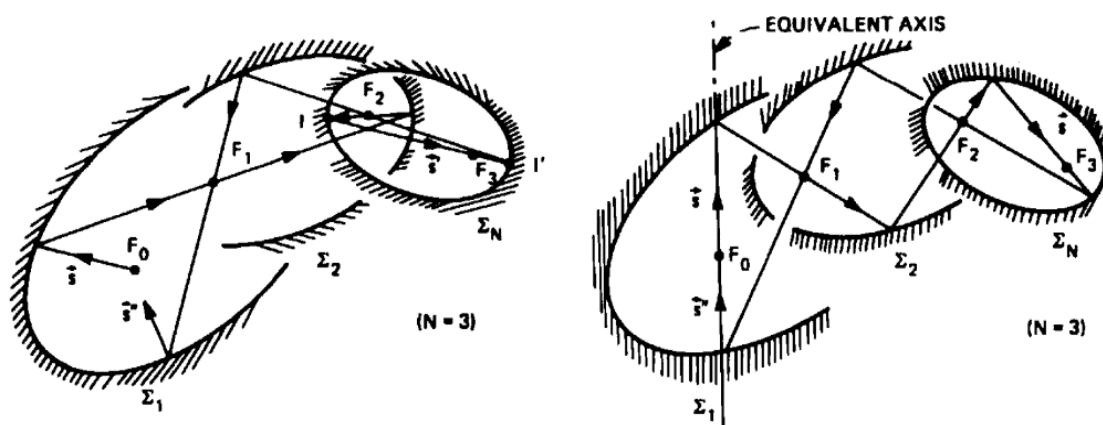


Рис. 1.5. Незамкнутая (слева) и замкнутая (справа) траектории лучей на примере трехзеркальной системы из работы Драгоне.

Критерий Музисавы и условия Драгоне справедливы при допущениях геометрической оптики, а именно в случае, когда размеры зеркал много больше длины волны, и эффектом дифракции можно пренебречь. Но в виду необходимости работы антенной системы на разных частотах неизбежны ситуации, когда длина волны соизмерима с размерами зеркал. В этих случаях для проектирования лучеводов применяют, например, метод физической оптики [36], который учитывает дифракционные эффекты. Далее будут рассмотрены традиционные методы анализа лучеводных систем, указаны их применимость и преимущества/недостатки.

## 1.2 Методы расчета электромагнитных полей электрически больших структур

Разработка и проектирование антенн и СВЧ-устройств невозможны без теоретических расчетов, для чего нужно решать систему уравнений Максвелла с заданными граничными условиями и сторонними возбуждающими токами. В большинстве прикладных задач, к которым относятся задачи проектирования зеркальные антенны и лучеводы, получение аналитического решения уравнений Максвелла зачастую не представляется возможным, и для решения таких задач применяют специальные методы вычислительной электродинамики.

### 1.2.1. Общая классификация и описание методов вычислительной электродинамики

Существует множество методов электродинамического расчета и анализа рассеивающих СВЧ-структур. Методы вычислительной электродинамики можно разделить на 3 группы:

- аналитические методы, позволяющие получать точное решение уравнений Максвелла;
- численные методы, точность которых зависит от вычислительных возможностей;
- асимптотические методы.

На рис. 1.6 приведены основные наиболее широко используемые методы. Аналитическое решение уравнений Максвелла дает точный результат, однако получение такого решения возможно лишь для простых структур. Исключение составляет лишь метод разложения поля в ряд (метод собственных функций), который определенным образом может быть адаптирован под широкий класс задач. Этот метод с некоторыми допущениями развивается в данной работе.



Рис. 1.6. Методы вычислительной электродинамики.

Численные методы – универсальный и мощный инструмент для решения электродинамических задач, получивший повсеместное распространение с развитием вычислительной техники. В их число входят метод конечных элементов (FEM), интегральных уравнений с решением методом моментов (МоМ) или многоуровневым мультипольным методом (MLFMM) и метод конечных разностей во временной области (FDTD). Все они основаны на разбиении анализируемой области пространства на некоторое число элементов и сведении расчетов полей и токов к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Существует большое количество САПР, построенных на основе таких методов, правильность расчетов которых многократно верифицирована на практике. Однако без наличия суперкомпьютеров численные методы не могут быть использованы в случае электрически больших структур из-за требуемых вычислительных ресурсов, быстро растущих с ростом размеров анализируемой структуры. Эта проблема может быть решена несколькими способами.

Первый способ – повышение производительности персональных компьютеров. В последнее время в среде персональной вычислительной техники практически перестала расти тактовая частота процессоров, увеличивается лишь количество процессоров/ядер, развиваются методы вычислений с применением графических ядер. То есть в технике происходят количественные, не качественные изменения. Поэтому, не смотря на быстрое развитие

вычислительной техники, значительное повышение производительности ПК в ближайшем будущем не предвидится.

Второй путь – создание гибридных методов, которые используют преимущества численных и аппроксимационных методов. Несколько таких методов применены в данной работе. Гибридные методы – перспективное направление развития вычислительной электродинамики, так как они позволяют использовать преимущества точных и приближенных методов, не теряя в точности расчета и экономя вычислительные ресурсы.

### *1.2.2. Методы расчета зеркальных антенн и лучеводов*

Не смотря на значительный прогресс в создании универсальных численных методов и прирост производительности вычислительной техники, остается большое количество задач, получение точного решения для которых либо не представляется возможным. В этом случае на помощь приходят асимптотические методы, получившие свое развитие в 20 веке. Для расчета зеркальных антенн применяются практически все методы, перечисленные на рис. 1.6. Применительно к лучеводам наиболее распространенные методы – метод физической оптики, метод параболического уравнения с решением в виде гауссовых пучков. Синтез лучевода при этом, как было сказано, осуществляется исходя из геометрических соображений. Размеры зеркал варьируются от единиц и десятков длин волн для малых зеркал лучеводов до сотен и тысяч длин волн для главных зеркал.

Основы асимптотических методов были заложены задолго до их активного развития и применения. В частности, геометрическая оптика (ГО) основана на принципе Ферма, согласно которому оптические лучи между двумя точками распространяются по кратчайшему пути. Этот подход справедлив при медленном изменении амплитуды электромагнитного поля на расстояниях, сопоставимых с длиной волны, и при больших радиусах кривизны как волнового фронта падающей волны, так и отражающей поверхности. Такие условия в некоторых случаях можно считать справедливыми для больших зеркальных антенн. На границе между двумя различными средами лучи отражаются и преломляются по закону Снеллиуса. Волны распространяются внутри лучевых трубок, которые могут быть сходящимися или расходящимися. Поле представлено в виде поперечного электромагнитного поля – ТЕМ-волны.

Физическая оптика (ФО) – асимптотический метод, связывающий поверхностный ток на проводнике с падающим электромагнитным полем. Основные постулаты метода:

- ток на теневой части рассеивающей поверхности равен нулю;
- на освещенной части поверхностный ток равен удвоенному магнитному полю;
- токи, возбуждаемые в каждой точке поверхности, независимы друг от друга;
- справедливы положения ГО аппроксимации – чем меньше кривизна, тем выше точность;
- в отличие от ГО, ФО применима для описания явлений интерференции и дифракции.

Полное электромагнитное поле при наличии рассеивателя может быть представлено в виде суперпозиции падающего и рассеянного полей. Однако за преимущества метода ФО вынуждены расплачиваться сложностью расчетов и требованиям к вычислительным ресурсам.

Геометрическая и физическая оптика зачастую не всегда могут быть использованы в качестве самостоятельных полноценных средств анализа зеркальных антенн из-за их ограничений и недостатков, главный из которых – неполный учет дифракционных эффектов, которые могут играть ключевую роль в анализе. Это приводит к снижению точности расчетов. Методы получили развитие соответственно в геометрической теории дифракции (ГТД) и физической теории дифракции (ФТД).

Сохраняя основные преимущества геометрической оптики (представление о пучках), геометрическая теория дифракции дополняет ее множителем, направленным на устранение разрывов поля на границе свет-тень. С момента появления развитие ГТД было направлено на преодоление ошибок, возникающих в методе, как в переходных областях, близких к границе свет-тень, так и в каустиках. Так сформировались единая геометрическая теория дифракции (UTD) и асимптотическая теория дифракции (ATD).

Физическая теория дифракции, с другой стороны, является расширением физической оптики, которая уточняет приближение поверхностного поля. Метод реализует дополнительные, неоднородные компоненты тока, которые включают эффекты, не учтенные в стандартном подходе физической оптики, который был продемонстрирован как неточный вблизи краев рассеивающих поверхностей (при наличии разрывов).

При проектировании большинства существующих лучеводных систем использовался квазиоптический метод – метод гауссовых пучков, основанный на принципах распространения гауссовых пучков. Метод дает хорошие результаты при работе с относительно большими рассеивающими поверхностями (несколько десятков длин волн) и может рассматриваться как «полосовой», поскольку точность расчета падает как на низких частотах, так и на высоких частотах. Длинноволновое ограничение связано с естественным ухудшением приближения параболического уравнения (ПУ), когда размеры объектов становятся близки к длине волны. Конструкция одного из первых лучеводов для антенн ДКС (проект NASA под названием DSS-13) была основана на высокочастотном геометрооптическом расчете, в то время как более поздние антенны были рассчитаны методом гауссовых пучков либо физической оптикой.

Первая математическая формулировка гауссовых пучков, полученная из решения уравнений Максвелла, была дана Губо и Шверингом в 1961 году [36]. Несколько десятилетий спустя, в 1998 году, Голдсмит опубликовал книгу, которая получила широкое признание как одна из наиболее полных работ по квазиоптике. В своей книге [37] автор утверждает, что «квазиоптика имеет дело с распространением лучей, которые достаточно хорошо коллимируются, но имеют



относительно небольшие размеры в длинах волн при измерении в плоскостях, поперечных оси распространения». Иными словами, квазиоптика обеспечивает решение задач для рассеивающих структур, слишком малых для анализа с помощью геометрической оптики, но достаточно больших для применения физической оптики. Процесс распространения пучка через цепочку зеркал лучевода изображен на рис. 1.7.

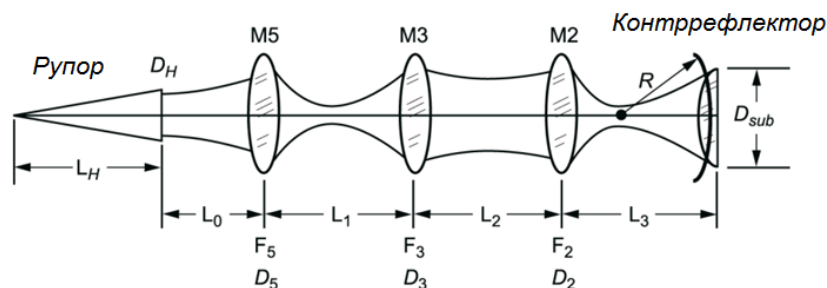


Рис. 1.7. Распространение гауссовых пучков в лучеводе.

На рис. 1.8 показаны сравнения результатов расчета ближнего поля трехзеркального лучевода методами ГО, гауссовых пучков и ФО из [10]. На частоте 2.3ГГц методы ГО и гауссовых пучков имеют существенную погрешность, результаты довольно сильно расходятся с расчетом ФО. На частоте 32ГГц сходимость значительно лучше, однако все равно имеется довольно существенное отличие, особенно в боковых лепестках.

В таблицу 1 сведены условные границы применимости основных асимптотических методов для анализа полей лучеводов. В ней  $r$  – сфера минимального радиуса, охватывающая исследуемые рассеивающие поверхности.

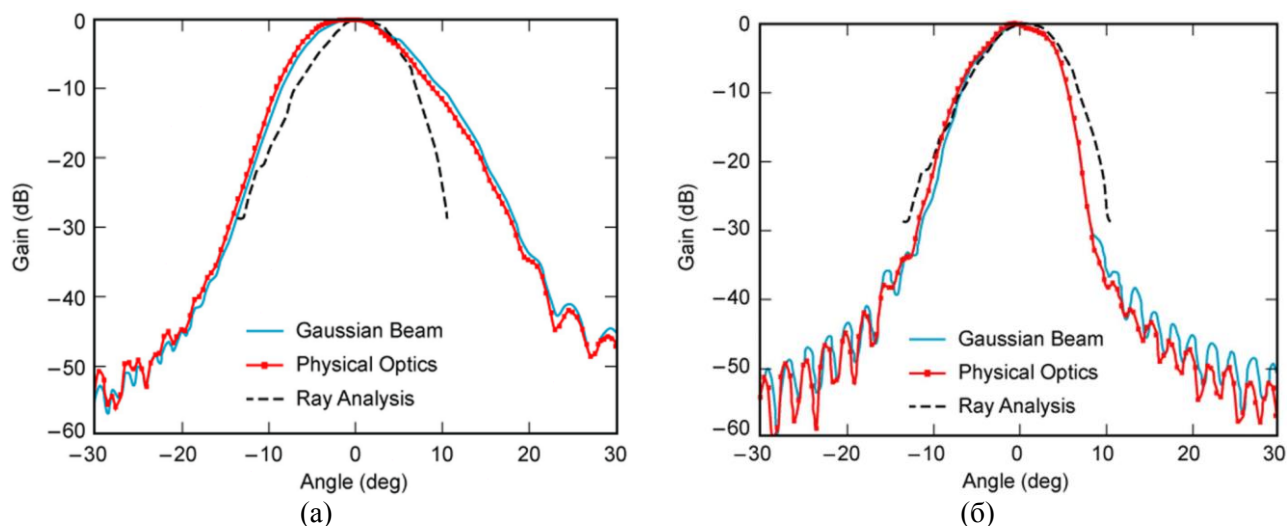


Рис. 1.8. Сравнение результатов расчета трехзеркального лучевода методами ГО, гауссовых пучков и ФО. Частота  $f=2.3$ ГГц (а); частота  $f=32$ ГГц (б).

Таблица 1. Приблизительные границы применимости квазиоптических методов

Метод расчета	Размеры объектов
Геометрическая оптика	$r > 50\lambda$
Метод гауссовых пучков	$r > 20\lambda$
Метод физической оптики	$r < 20\lambda$

Метод фокальной плоскости был разработан в рамках работы над антенной DSS-13 для создания лучевода, работающего на низких частотах [38]. Лучевод антенны DSS-13 первоначально был конструирован для работы в X-диапазоне и Ka-диапазоне. При проектировании антенны было запланировано добавление S-диапазона (передача 2.025-2.120ГГц и прием 2.2-2.3ГГц). В S-диапазоне диаметр зеркал составляет 19 длин волн, что не позволяет применить методы ГО и гауссовых пучков. В проектируемом в данной работе лучевode также возможна дальнейшая модификация с целью добавления низкочастотного диапазона, поэтому задача оптимизации лучевода для работы с более низкими частотами является актуальной.

При помещении стандартного рупора с усилением  $K_u=22$ дБ в фокус первого зеркала было обнаружено, что потери в лучевode составляют более 1.5дБ. Это было вызвано тем, что для низких частот «дифракционный» фазовый центр рупора находился далеко от геометрического фокуса зеркала, что привело к большим потерям за счет расфокусировки и переливания энергии за края зеркала. Для первого зеркала – эллипсоида такое геометрическое расхождение составило порядка трех метров. Таким образом, задача заключалась в определении необходимого усиления и расположения облучателя.

Для этого специалистами NASA из лаборатории JPL был применен метод, названный ими «методом фокальной плоскости». Он заключается в решении обратной задачи – облучение главного зеркала плоской волной, далее находятся токи на контррефлекторе и зеркалах лучевода с пересчетом полей в плоскость, проходящую через фокус облучателя лучевода. Получив поле в фокальной плоскости, рассчитываются эквивалентные токи, и по комплексно-сопряженным токам рассчитывается интеграл Кирхгофа с определением поля в дальней зоне. Таким образом получают идеальную диаграмму направленности облучателя. Подобрал облучатель с соответствующей диаграммой направленности и установив ее в фокус, добиваются максимальной эффективности. Нет гарантии, что диаграммы, полученные этим методом, будут легко реализуемы на практике. Однако для DSS-13 рассчитанная диаграмма обладала круговой симметрией, и была реализована посредством гофрированного рупора [39].

### **1.3 Оценка и максимизация эффективности зеркальных антенн и лучеводов**

Как уже было сказано, в настоящее время актуальной является задача создания высокоэффективных зеркальных антенн дальней космической связи, минимизируя при этом затраты на проектирование и изготовление. Один из важнейших этапов проектирования зеркальной антенны – оценка её радиотехнической эффективности. Наличие достаточно точных и быстрых методов расчета и оценки эффективности позволяют оптимизировать процесс проектирования. Методика оценки эффективности зеркальных антенн хорошо известна и подробно расписана, например, в [39, 40]. Эффективность антенны с лучеводом оценивалась в [10] и в ряде статей коллектива JPL NASA, однако авторы подробно не раскрывают методику

оценки и считают лишь суммарный КИП. В данном разделе будут описаны методика оценки составляющих эффективности и потерь в зеркальной антенне в совокупности с лучеводом с применением векторов Р-З. Зеркальные антенны можно условно рассматривать как частный случай лучеводов, так как они имеют общее назначение – направлять энергию СВЧ-излучения.

Для простейшей зеркальной антенны без лучевода, в фокусе которой устанавливается рупорный излучатель, для оценки качества функционирования достаточно рассчитать составляющие коэффициента использования поверхности (КИП) и, таким образом, рассчитать коэффициент усиления ( $K_u$ ) и шумовую температуру антенны ( $T_{ш}$ ). Для антенн дальней космической связи с лучеводными трактами задача оценки  $K_u$  и  $T_{ш}$  несколько сложнее. Всю антенную систему ДКС можно разделить на две части, для каждой из которых проводится оценка составляющих КИП или потерь – облучатель как совокупность рупора и лучевода, и двухзеркальная система с облучающим полем, являющимся полем на выходе лучевода. То есть в антенной системе с лучеводом облучатель контррефлектора – это совокупность рупорного облучателя и лучевода, заканчивающийся в точке вторичного фокуса зеркальной системы, для которого проводится оценка потерь и искажений с учетом всех их источников.

Необходимо ввести понятие эффективности антенны и лучевода. Под *эффективностью* лучевода или антенны здесь и далее подразумевается отношение реального значения оцениваемого параметра к идеальному. Для зеркальной системы это эквивалентно коэффициенту использования поверхности с учетом всех источников потерь. Для лучевода это отношение излучаемой полезной мощности в необходимом секторе углов (соответствующие углу облучения контррефлектора) к подводимой к облучателю мощности. Отметим, что также должны учитываться симметрия поля и уровень облучения края контррефлектора, однако это учитывается в оценке эффективности зеркальной системы – то есть работа зеркальной антенны должна рассматриваться вместе с лучеводом, так как все элементы связаны между собой.

Приведем основные соображения расчета радиотехнической эффективности антенн ДКС.

1) Оценка коэффициента использования поверхности зеркальной антенны. Полный КИП апертурной антенны определяется следующим выражением:

$$K_{\Sigma} = K_{an} K_{nep} K_{диф} K_{зат} K_{CKO} K_{кросс} K_{ном}. \quad (1.1)$$

Составляющие этой формулы:

- $K_{an}$  – апертурный КИП;
- $K_{nep}$  – коэффициент, учитывающий потери за счет переливания энергии за края зеркал;
- $K_{диф}$  – коэффициент, определяющий дифракционные потери;
- $K_{зат}$  – коэффициент, определяющий потери из-за затенения апертуры главного рефлектора конструкциями вторичной системы;

- $K_{СКО}$  – коэффициент, учитывающий среднеквадратическое отклонение (СКО) профилей зеркал от теоретических;
- $K_{кросс}$  – коэффициент кроссполяризации;
- $K_{дисс.пот}$  – коэффициент диссипативных потерь;
- $K_{пот}$  – коэффициент потерь в облучающей системе, речь о котором пойдет ниже.

Первая составляющая  $K_{ан}$  определяется полем облучателя и геометрией зеркальной системы. Апертурный КИП учитывает часть излучённой мощности, соответствующую излучению, поляризация которого согласована с поляризацией «идеального» облучателя. Остальная часть излучённой мощности учитывается коэффициентом кроссполяризации. С целью повышения апертурного КИП в антеннах ДКА применяют специальные профили главного зеркала и контррефлектора, отличные от используемых в классических оптических схемах Кассегрена и Грегори. При увеличении  $K_{ан}$  также увеличивается уровень боковых лепестков, что является главным недостатком такого подхода. Составляющие  $K_{зам}$  и  $K_{СКО}$  являются конструктивными и, как правило, оцениваются по приближенным формулам. Традиционно применяемая формула для определения  $K_{СКО}$  (формула Рузе) является довольно грубой, в связи с чем в работе уточняется методика оценки влияния СКО на эффективность зеркальных антенн и лучеводов.

Последние две составляющие в основном определяются выбором облучателя – рупора и лучевода. Кроссполяризационная составляющая также зависит от геометрии зеркальной системы, однако при облучении осесимметричной антенны волной, направление векторов поля которой совпадает с полем элемента Гюйгенса, кроссполяризация отсутствует. Диссипативные потери оцениваются как потери в металле на зеркалах и в ВЧ-тракте.

Отметим, что для некоторых типов зеркальных антенн понятие апертурного КИП перестаёт быть однозначно определённым. Это антенны, в которых по условиям работы в геометрооптическом приближении облучается не вся отражающая поверхность главного рефлектора. Для таких антенн больше подходит понятие эффективной площади. Понятие коэффициента использования площади можно при этом вводить по-разному: относить эффективную площадь либо к площади проекции рефлектора на плоскость апертуры, либо к полной площади отражающей поверхности рефлектора. Выбор определения может отразиться на результате оптимизации из-за изменения целевой функции.

2) Оценка потерь в облучающей системе. Задача оценки эффективности лучевода имеет свои особенности. Дело в том, что для многозеркальных лучеводов неприменимы понятия эффективной площади и коэффициента использования поверхности, так как их главная задача – передача электромагнитной энергии определенной поляризации с минимальными искажениями (по аналогии с другими линиями передачи) и обеспечение наиболее оптимального облучения

контррефлектора. При этом лучеводы зачастую проектируются так, чтобы параметры волны менялись при прохождении через цепочку зеркал – например, сужение или расширение луча.

В эффективности  $K_{обл}$  так же, как и для эффективности зеркальной антенны, можно выделить отдельные составляющие. В расчете удобнее оперировать составляющими потерь, пересчитываемыми в коэффициенты эффективности:

- потери за счет рассогласования облучателя – рупора  $L_{согл}$ ;
- дифракционные потери  $L_{диф}$ ;
- потери за счет переливания энергии за края зеркал  $L_{пер}$ ;
- потери за счет возникновения кроссполяризованной составляющей  $L_{кросс}$ ;
- потери за счет отклонения профилей зеркал от теоретических  $L_{СКО}$ ;
- потери за счет нарушения симметрии поля  $L_{сим}$ ;
- диссипативные потери  $L_{дисс.пот}$ .

Существенный вклад в ухудшение шумовых характеристик антенной системы вносят потери за счет переливания энергии за края зеркал и омические потери на поверхностях зеркал [13, 14]. Потери за счет распространения поля в кожухе реального лучевода приводят к нарушению структуры поля, возникновению кроссполяризации и возрастанию омических потерь.

Для оценки составляющих эффективности зеркальной антенны  $K_{ан}$ ,  $K_{пер}$ ,  $K_{диф}$ ,  $K_{СКО}$ ,  $K_{кросс}$ ,  $K_{дисс.пот}$  и лучевода  $L_{диф}$ ,  $L_{пер}$ ,  $L_{кросс}$ ,  $L_{дисс.пот}$ ,  $L_{СКО}$  в данной работе проводится полный векторный расчет структуры полей, распространяющихся в лучеводной системе. Существенное допущение при этом – расчет наведенных токов в приближении физической оптики, погрешностью которого можно пренебречь при малом уровне поля на краях зеркал (как правило, спадание поля на краю зеркал выбирается  $<-20$ дБ).

В применяемой методике искажения, возникающие за счет отклонения профилей зеркал от теоретических  $L_{СКО}$ , учитываются более строго, чем по классической приближенной формуле, с учетом реальной статистической модели и расчета полей искаженных токов. Анализ влияния неидеальностей поверхностей зеркал на поля в лучевode и определение требований к точностям изготовления в известной литературе не проводились. Увеличение точности оценки эффективности также планируется за счет учета кожуха лучевода. Таким образом, применяемая методика позволяет наиболее строгим образом оценивать потери в лучевode, пересчитываемые в общую эффективность лучевода, что в свою очередь учитывается в оценке КИП антенной системы.

Необходимость максимизации и точной оценки эффективности для антенн дальней космической связи вызвана следующими причинами. Антенны ДКС применяются в составе наземных комплексов управления дальними космическими аппаратами и должны обеспечивать

их управление на чрезвычайно больших расстояниях. Важнейшие параметры антенной системы, определяющие функционирование системы связи и качество приема и передачи – добротность антенны  $G/T_{ш}$  и эквивалентная изотропно излучаемая мощность (ЭИИМ), определяемые коэффициентом усиления наземной антенны  $G$  ( $K_u$ ).  $T_{ш}$  – шумовая температура антенны, складывающаяся из двух составляющих – внешние принимаемые антенной шумы и собственные шумы антенны и СВЧ-тракта. Если раньше шумы антенны и приемника были соизмеримы по величине, в настоящее время удалось добиться чрезвычайно низких значений шумовой температуры МШУ, и суммарная шумовая температура системы определяется в основном  $T_{ш}$  антенны. То есть чтобы обеспечить прием чрезвычайно низких сигналов, необходимо снижать  $T_{ш}$  антенны. При этом в отличие от систем связи, где недостаточная энергетическая эффективность приводит к ухудшению качества связи, в системах управления ДКА недостаточная эффективность может привести к отсутствию связи как таковой и потере ДКА.

Для точной оценки всех составляющих КИП и повышения эффективности систем ДКС необходимо проведение строгого векторного анализа распространяющихся в антенной системе полей с минимальным количеством допущений, что невозможно с помощью приближенных методов. В получении точной оценки преследуются две цели:

- уменьшение временных и материальных затрат на разработку, изготовление и испытания. Облучающая система, спроектированная и рассчитанная с недостаточной степенью точности, ведет к потерям из-за неучтенных искажений, что в свою очередь приводит к большому циклу измерений и настройки, возможным расходам на повторное конструирование и изготовление, что с учетом сжатых сроков реализации в современных условиях недопустимо;
- максимизация реальной эффективности антенны и уменьшение суммарных шумов.

В связи с вышеперечисленным для анализа и оптимизации зеркальных антенн ДКС с лучеводами требуется наличие эффективных методов и алгоритмов, позволяющих получать точное решение таких задач, минимизируя при этом трудозатраты и требования к вычислительным мощностям. Для этой цели в диссертации предлагается применение особого представления электромагнитного поля и разрабатываются методы, позволяющие значительно упростить процедуру электродинамического расчета полей антенн и СВЧ-структур.

Классическая электродинамика построена на уравнениях Максвелла, описывающих связь между векторами электрического и магнитного поля. Для полного описания электромагнитного поля в общем случае требуется найти напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ . При этом известно и широко применяется свойство уравнений Максвелла в статическом случае распадаться на два независимых уравнения для электрического и магнитного

полей. Это свойство используется при построении квазистатического низкочастотного асимптотического решения.

Значительно менее распространено в электродинамике применение свойства уравнений Максвелла распадаться на два независимых уравнения, справедливое на всех частотах, включая СВЧ. Это свойство основано на инвариантности уравнений с использованием линейной комбинации векторов электрического и магнитного поля – векторов Римана-Зильберштейна (векторы Р-З). Подобно статическому асимптотическому решению, векторы Р-З упрощают представление электромагнитного поля и сводят систему уравнений Максвелла в однородном пространстве к двум независимым уравнениям, каждое из которых описывает полное электромагнитное поле. Помимо преимущества независимости векторов, представление полей в терминах векторов Римана-Зильберштейна позволяет построить удобный и эффективный аппарат разложения полей в ряд по векторным сферическим гармоникам – мультиполям, что будет показано в следующих главах.

#### 1.4 Определение векторов Римана-Зильберштейна. Уравнения Максвелла и энергетические характеристики

Формулировка уравнений Максвелла в терминах векторов Римана-Зильберштейна появилась в 1907 году в работе Зильберштейна [41]. Название «векторы Римана-Зильберштейна» введено польским физиком Бялыницким-Бирулей в его работах по квантовой электродинамике [42, 43]. Зильберштейн основывал свою идею на лекциях Римана по уравнениям в частных производных, отредактированных и опубликованных в 1901 году Вебером [44].

$$(1) \quad \begin{aligned} c \operatorname{curl} \mathfrak{M} &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \\ c \operatorname{curl} \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \end{aligned}$$

und diese beiden Gleichungen lassen sich zu einer vereinigen, wenn wir die erste mit  $i$  multipliciren und zur zweiten addiren:

$$(2) \quad c \operatorname{curl} (\mathfrak{E} + i\mathfrak{M}) = i \frac{\partial (\mathfrak{E} + i\mathfrak{M})}{\partial t}.$$

Рис. 1.9. Формулировка векторов Р-З в работе Зильберштейна.

Теория векторов Римана-Зильберштейна схожа с известными векторными полями Бельтрами. Такие поля были введены в 1889 г. Бельтрами в [45] для задач гидродинамики. В своей работе Бельтрами исследовал поля, удовлетворяющие условию  $\operatorname{rot} \mathbf{F} + \lambda \mathbf{F} = 0$ , и указал на схожие свойства таких полей с электромагнитными полями, описываемыми уравнениями Максвелла. Стоит отметить, что впервые такие поля были введены и изучены русским ученым-механиком Громекой в своей докторской диссертации за 8 лет до публикации работы Бельтрами [46]. Диссертация была опубликована на русском языке и неизвестна за границей.

После работы Зильберштейна аналогичные соображения неоднократно появлялись в работах по электромагнетизму в течение 20-го века. Фон Лауэ [47] и Минковский [48] применяли их в своих работах по теории относительности. Английский математик Бейтмен в книге [49] использовал бивекторную форму электромагнитного поля  $\mathbf{M}=\mathbf{H}\pm i\mathbf{E}$  в сочетании с гиперкомплексным исчислением, в котором  $\pm 1$  используется в качестве дополнительной образующей гиперкомплексных чисел. Аналогичный подход (но с другой образующей чисел) был применен Левином в его работе по волноводам [50]. В [51] Рамси рассмотрены решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие условию  $\mathbf{E}=\pm i\eta\mathbf{H}$ , при этом автор также не вводит индекс для векторов поля. Это решение было применено к частотно-независимым антеннам. Развитие теории полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, как комплексных полей Бельтрами было продолжено индийским ученым Лахтакией в [52]. В этой и нескольких других работах автора были введены векторы поля Бельтрами и описана теория этих полей применительно к киральным средам. Автор также получил решения для сферической задачи и распространил теорию на векторные сферические волновые функции для орторомбического диэлектрико-магнитного материала с гиротропными магнитоэлектрическими свойствами [53].

$$\begin{aligned} \text{curl } \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r},t) &= -\mu_0 \partial_t \underline{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{r},t) - \underline{\tilde{\mathbf{K}}}(\mathbf{r},t), & \Rightarrow \text{div } \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_+(\mathbf{r},t) &= \mp ic \underline{\tilde{\mathbf{w}}}_+(\mathbf{r},t), & \text{The time-dependent Beltrami fields } \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_+(\mathbf{r},t) &= \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r},t) \pm i\sqrt{(\mu_0/\epsilon_0)} \underline{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{r},t) \\ \text{curl } \underline{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{r},t) &= \epsilon_0 \partial_t \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r},t) + \underline{\tilde{\mathbf{J}}}(\mathbf{r},t). & \text{curl } \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_+(\mathbf{r},t) \mp (i/c) \partial_t \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_+(\mathbf{r},t) &= \underline{\tilde{\mathbf{W}}}_+(\mathbf{r},t), & \text{The Beltrami charge densities } & \underline{\tilde{\mathbf{w}}}_+(\mathbf{r},t) = -\underline{\tilde{\rho}}_m(\mathbf{r},t) \pm i\sqrt{(\mu_0/\epsilon_0)} \underline{\tilde{\rho}}_e(\mathbf{r},t) \end{aligned}$$

Рис. 1.10. Формулировка векторных полей Бельтрами в работе Лахтакии.

Векторы Римана-Зильберштейна в теории антенн применялись Коганом Б.Л. начиная с 1970-х годов, изначально для задачи распространения волн круговой поляризации в гофрированных волноводах и рупорах. Главная идея, развитая автором – отождествление мнимой единицы в формулировке векторов с четвертьволновым сдвигом фаз для гармонических полей. Это позволило без введения гиперкомплексного исчисления применить векторы Римана-Зильберштейна для описания ортогональных полей круговой поляризации. Позднее подход был развит в [39, 54, 55], где подробно исследованы и описаны источники возникновения кроссполяризованного поля. В этих работах впервые были введены векторные сферические гармоники векторов Римана-Зильберштейна в спиральной системе координат. В [56, 57] для введённых векторов используется название «векторы Фарадея», но название «векторы Римана-Зильберштейна» исторически более точное. Теоретические основы применения векторов Римана-Зильберштейна в вычислительной электродинамике были описаны в [58, 59, 60, 61]. Более подробно история применения и развития теории векторов P-3 описана в [57], где также приведено подробное описание формулировок, применявшихся указанными выше авторами.

Помимо вышеприведенных работ аналогичный подход неоднократно применялся и исследовался в течение 20-го века. Однако метод описания электромагнитных полей векторами



Римана-Зильберштейна применялся для решения конкретных проблем и не был полноценно исследован, не разработаны математический аппарат и теоретическая база.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд гармонических полей в линейной изотропной среде:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{j}^m; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{j}^e; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho^m; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho^e. \end{cases} \quad (1.2)$$

Аналитическое решение системы (1.2) возможно лишь для простейших задач и структур. В сложных задачах прибегают к аппроксимационным или численным методам. К таким задачам относится анализ полей в зеркальных антеннах и лучеводах. Методы расчета полей таких структур значительно упрощаются при переходе к другому, отличному от классического виду описания электромагнитного поля – к векторам Римана-Зильберштейна. Векторы Р-З – линейная комбинацией векторов напряженности электрического и магнитного поля. В линейной изотропной среде без потерь с постоянными во времени параметрами для гармонических полей

$$\mathbf{F}_{\pm} = 0.5(1/\sqrt{z}\mathbf{E} \mp i\sqrt{z}\mathbf{H}), \quad (1.3)$$

где  $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – волновое сопротивление. Подставляя (1.3) в (1.2) из первого и второго уравнений (1.2) получаем систему уравнений Максвелла для векторов Римана-Зильберштейна

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}_{\pm} \mp kn\mathbf{F}_{\pm} + 0.5[\operatorname{grad}(\ln z), \mathbf{F}_{\mp}] = \mathbf{j}_{\pm}, \quad (1.4)$$

где  $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ ,  $n = \sqrt{\mu\varepsilon/\mu_0\varepsilon_0}$ . В выражении (1.4) в левой части третье слагаемое с изменённым порядком индексов векторов Р-З определяет взаимную связь между векторами  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$ . Из (1.4) следует, что в среде с пространственно-однородным импедансом ( $\operatorname{grad} z = 0$ ) уравнения Максвелла преобразуются в систему двух независимых уравнений с соответствующими источниками возбуждения

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}_{\pm} \mp k\mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{j}_{\pm}, \quad (1.5)$$

где плотности сторонних токов выражаются через плотности электрического и магнитного токов:

$$\mathbf{j}_{\pm} = -0.5(1/\sqrt{z}\mathbf{j}^m \pm i\sqrt{z}\mathbf{j}^e). \quad (1.6)$$

Помимо выражения (1.5) из третьего и четвертого уравнений системы (1.2), являющихся формами закона Гаусса, можно также получить уравнения Максвелла для векторов Р-З:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_{\pm} = \pm ic\rho_{\pm}, \quad (1.7)$$

где эквивалентные плотности зарядов

$$\rho_{\pm} = -0.5 \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \rho^e \pm i \sqrt{z} \rho^m \right). \quad (1.8)$$

Выражение (1.7) можно также получить непосредственно из первого уравнения Максвелла (1.5) для векторов Р-З. Выражение (1.5) представляет собой два независимых уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов Римана-Зильберштейна в однородном пространстве. Каждый вектор  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$  удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению первого порядка. Единицы измерения векторов:

$$[\mathbf{F}] = \frac{\sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}}{\text{Ом}}, [\mathbf{j}] = \frac{\sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}}{\text{Ом} \cdot \text{м}}. \quad (1.9)$$

Вектор Пойнтинга также выражается в терминах векторов Р-З

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] = -\frac{i}{2} \cdot [\mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_-, \mathbf{F}_+^* - \mathbf{F}_-^*] = -\frac{i}{2} \cdot ([\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_+^*] - [\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_-^*] + [\mathbf{F}_-, \mathbf{F}_+^*] - [\mathbf{F}_-, \mathbf{F}_-^*]) = \\ &= -\frac{i}{2} \cdot ([\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_+^*] - [\mathbf{F}_-, \mathbf{F}_-^*]) + \frac{i}{2} \cdot ([\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_-^*] + [\mathbf{F}_-, \mathbf{F}_+^*]). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Первое выражение в правой части (1.10) всегда реально, второе – всегда мнимое. Мнимая часть обращается в нуль для полей чисто круговой поляризации и возникает лишь тогда, когда полное поле отличается от поля круговой поляризации. Реальная (активная) часть представляет собой алгебраическую сумму векторов Пойнтинга для векторов Римана-Зильберштейна правой и левой круговой поляризации. Таким образом, векторы  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$  распространяются в пространстве независимо друг от друга, и направленная мощность складывается по правилу сложения векторов. В однородном пространстве каждый вектор  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$  описывает полное электромагнитное поле идеальной круговой поляризации. Векторы не взаимодействуют между собой. В этом заключается фундаментальное свойство независимости векторов Р-З, позволяющее упрощать процедуру решения задач электродинамики. Источник  $\mathbf{j}_+$  возбуждает в дальней зоне (ДЗ) волну круговой поляризации правого направления вращения во всех направлениях, источник  $\mathbf{j}_-$  возбуждает левополяризованную волну.

Из уравнений Максвелла (1.5) можно получить выражение, описывающее закон сохранения энергии, известное как теорема Пойнтинга. Для этой цели умножим скалярно каждое уравнение Максвелла на комплексно-сопряженный вектор Р-З для того, чтобы каждый член выражения имел размерность единицу энергии на объем

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \mathbf{F}_+ = -k \mathbf{F}_+ + \mathbf{j}_+ \cdot (\mathbf{F}_+^*) \\ \text{rot} \mathbf{F}_+^* = -k \mathbf{F}_+^* + \mathbf{j}_+^* \cdot (\mathbf{F}_+) \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \mathbf{F}_- = k \mathbf{F}_- + \mathbf{j}_- \cdot (\mathbf{F}_-^*) \\ \text{rot} \mathbf{F}_-^* = k \mathbf{F}_-^* + \mathbf{j}_-^* \cdot (\mathbf{F}_-) \end{array} \right\}; \quad (1.11)$$

$$\text{div}(\mathbf{F}_+ \times \mathbf{F}_+^*) + \text{div}(\mathbf{F}_- \times \mathbf{F}_-^*) = 2 \text{Im}(\mathbf{j}_+ \cdot \mathbf{F}_+^*) + 2 \text{Im}(\mathbf{j}_- \cdot \mathbf{F}_-^*). \quad (1.12)$$

Интегрируя по объему  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , и применяя теорему Гаусса

$$\frac{i}{2} \left( \oiint_S (\mathbf{F}_+ \times \mathbf{F}_+^*) \cdot \mathbf{n} da + \oiint_S (\mathbf{F}_- \times \mathbf{F}_-^*) \cdot \mathbf{n} da \right) = - \iiint_V (\mathbf{j}_+ \cdot \mathbf{F}_+^*) dv - \iiint_V (\mathbf{j}_- \cdot \mathbf{F}_-^*) dv. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) представляет собой теорему Пойнтинга для поля, выраженного в терминах векторов Римана-Зильберштейна. Поверхностный интеграл в левой части – это поток энергии поля через поверхность  $S$ . Правая часть – это энергия, обусловленная наличием заряда.

В качестве примера рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны. Решение однородного уравнения Максвелла (1.5) в виде плоской волны, распространяющейся в сторону положительного направления оси  $Z$ , для вектора Р-З правой круговой поляризации ищется в виде  $\mathbf{F}_+ = \mathbf{f} e^{-ikz}$ . После подстановки этого выражения в (1.5) для вектора амплитуды  $\mathbf{f}$  получим уравнение  $-i[\mathbf{e}_z, \mathbf{f}] - \mathbf{f} = 0$ , решение которого с точностью до постоянного множителя:

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{F}_+ = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) e^{-ikz}. \quad (1.14)$$

Для вектора левой круговой поляризации получается выражение  $\mathbf{F}_- = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) e^{-ikz}$ . Комплексный вектор Пойнтинга равен  $\mathbf{e}_z$ . На рис. 1.11 представлено сравнение плоской распространяющейся в направлении оси  $Z$  волны линейной поляризации, выраженной через классические векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и векторы Р-З.

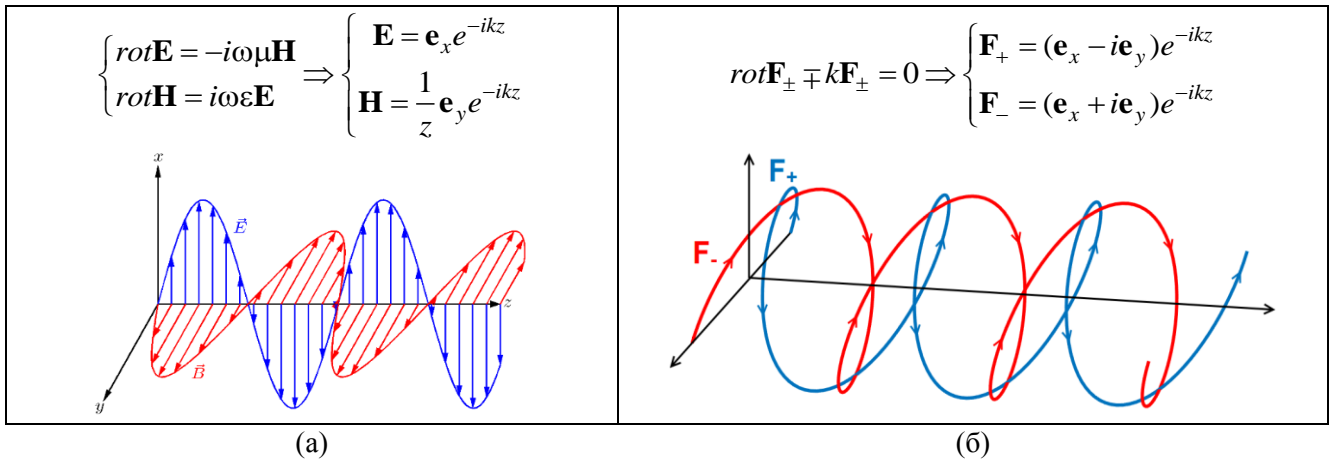


Рис. 1.11. Плоская волна. Выражение через векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (а); выражение через векторы Р-З (б).

Из (1.14) видно, что для векторов Р-З удобно перейти от поперечных декартовых ортов  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  к циклическому  $\{\mathbf{e}^{+1}, \mathbf{e}^{-1}\}$ , а в случае сферического распространения от поперечных сферических ортов  $\{\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi\}$  к спиральным ортам  $\{\mathbf{e}^{+1'}, \mathbf{e}^{-1'}\}$  по формулам:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{cases}; \quad \begin{cases} \mathbf{e}^{+1'} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\vartheta - i\mathbf{e}_\varphi) \\ \mathbf{e}^{-1'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\vartheta + i\mathbf{e}_\varphi) \end{cases}. \quad (1.15)$$

Подробно такие системы координат описаны в главе 2. Рассмотренный пример плоской электромагнитной волны помогает выписать условия излучения на бесконечности для

электромагнитного поля в форме векторов Р-З. Найдём связь между составляющими вектора в сферическом и спиральном базисах. Произвольная векторная функция, имеющая лишь поперечные компоненты

$$\mathbf{F} = f_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + f_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} = f_{+1} \mathbf{e}^{+1'} + f_{-1} \mathbf{e}^{-1'}. \quad (1.16)$$

Из (1.16) и (1.17) следуют соотношения:

$$f_{+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(f_{\vartheta} + if_{\varphi}); \quad f_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{\vartheta} - if_{\varphi}); \quad (1.17)$$

Уходящая на бесконечность локально плоская волна в спиральном базисе имеет лишь одну составляющую:  $\mathbf{e}^{+1}$  для вектора Р-З правой поляризации и  $\mathbf{e}^{-1}$  для левой, поэтому условия излучения для векторов Р-З имеют вид:

$$f_{\vartheta} \mp if_{\varphi} \underset{r \rightarrow \infty}{=} o(1/r). \quad (1.18)$$

В данной работе теория векторов Р-З применяется для получения эффективного аппарата сферических волн, позволяющего относительно просто получать поля, рассеиваемые на произвольных поверхностях. Разложение электромагнитных полей в ряды Фурье – один из наиболее эффективных методов численного и аналитического решения уравнений Максвелла. Традиционно применяется разложение по элементарным магнитным и электрическим мультиполям. В общем случае для получения полного решения необходимо определение коэффициентов разложения по всем мультиполям – электрическим и магнитным. Полученный в следующей главе аппарат метода собственных функций, основанный на фундаментальном свойстве независимости векторов поля и простом мультипольном разложении, в совокупности позволяет создать эффективный метод для получения точного решения прикладных задач.

### 1.5 Постановка задачи

Теперь, ознакомившись с проблемами, возникающими при расчете электромагнитных полей зеркальных антенн и лучеводов, основными методами расчетов, а также с введением в теорию векторов Р-З, становится возможным сформулировать и уточнить задачу. Задачи, решаемые в данной диссертации, ставится следующим образом:

- разработка теории и методов вычислительной электродинамики решения уравнений Максвелла, записанных для электромагнитных полей в терминах векторов Р-З;
- введение и применение математического аппарата, с помощью которого можно получить оптимальные расчетные соотношения для векторов Р-З;
- разработка алгоритмов применения методов для численного расчета векторной структуры поля апертурных антенн, сравнение результатов с классическими методами расчетов в САПР, верификация посредством эксперимента, анализ расчетного времени;

- применение полученных методов и алгоритмов для векторного анализа полей лучевода 32-метровой зеркальной антенны в X-диапазоне, спроектированного и построенного по классической схеме (рис. 1.12), оценка потерь;
- создание и применение к 32-метровой антенне методики синтеза лучевода с заданным коэффициентом трансформации угловой ширины луча, сохраняющего свойства симметрии и отсутствия кроссполяризации, позволяющей минимизировать размеры рупорного облучателя и зеркал лучевода;
- конструктивная проработка узлов антенны, оказывающих влияние на структуру ЭМ поля, разработка частотно-селективной поверхности и оптимального рупорного облучателя;
- применение разработанных алгоритмов к анализу лучевода с максимальным приближением к реальной модели – учет кожуха, искажений поверхностей зеркал, реальной облучающей системы (рупор и частотно-селективная поверхность);
- исходя из результатов расчета, оптимизация лучевода 32-метровой антенны по критерию максимального коэффициента усиления всей системы, сравнение с аналогами.

В диссертационной работе ставится комплексная задача – развитие теории и практики применения векторов круговой поляризации, и применение теории и методов к высокоточному расчету и оптимизации большой антенны, создаваемой для задач дальней космической связи.

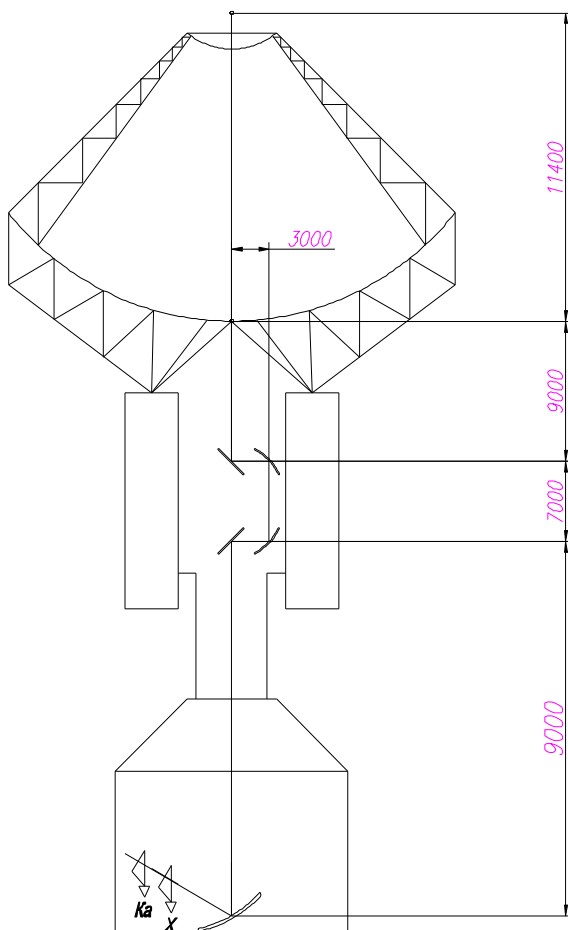


Рис. 1.12. Исходный вариант 32-метровой антенны.

## 1.6 Выводы

В главе представлена историческая и теоретическая справка по развитию, проектированию и электродинамическому анализу больших антенн дальней космической связи. Актуальность тематики обусловлена развитием космической техники и, в частности, программам освоения дальнего космоса, что требует наличия высокоэффективных антенн. Антенны ДКС – сложные и дорогостоящие устройства, к которым предъявляются самые жесткие требования по их функционированию, и, соответственно, для проектирования которых необходимы достаточно точные методы анализа и расчета электромагнитных полей. Традиционно распространение поля в таких системах рассчитывается скалярно с применением асимптотических методов вычислительной электродинамики, что ведет к погрешности расчетов и невозможности учета многих источников искажений – ограничивает возможности оптимизации антенн.

Для преодоления этих сложностей в работе предлагается применение методов, основанных на неклассическом описании электромагнитного поля векторами Римана-Зильберштейна. В главе представлено введение в теорию векторов Римана-Зильберштейна. В свободном пространстве уравнения Максвелла для векторов Р-З распадаются на два независимых уравнения, векторы распространяются независимо. Применение этого свойства имеет большой потенциал для практических задач и в совокупности с другими особенностями векторов Р-З позволяет получить значительные преимущества для задач вычислительной электродинамики. При этом, как было показано из исторического обзора, свойства векторов Р-З слабо исследованы, а практика их применения ограничивается немногими авторами, использовавшими векторы в своих работах для решения конкретных задач.

Другая проблема, возникающая при проектировании лучеводов – искажения поля при отражении от несимметричных зеркал. Существующие методы преодоления этих искажений не универсальны и ограничивают возможности проектирования, в связи с чем требуется создание методики проектирования лучеводов, позволяющей преобразовывать ширину луча и сохранять симметрию поля и отсутствие кроссполаризации.

На основе представленных соображений в последующих главах будет решена комплексная задача – помимо вывода теории и методов электродинамики векторов Римана-Зильберштейна будут также решены практические задачи векторного анализа полей, рассеиваемых и излучаемых лучеводами и зеркальными антеннами. Это позволит, во-первых, проводить такие расчеты для решения возникающих практических задач с меньшими затратами вычислительных ресурсов, а во-вторых достичь поставленной в первой главе цели – создание высокоэффективной 32-метровой антенны ДКС с лучеводным трактом и проведение высокоточных электродинамических расчетов с целью минимизации временных и материальных затрат при изготовлении, настройке и испытаниях.

## Глава 2. Теория и методы расчета электромагнитных полей векторов Римана-Зильберштейна.

Во второй главе приведено подробное теоретическое описание перспективного представления электромагнитного поля посредством векторов Римана-Зильберштейна. Получены основные соотношения электродинамики, необходимые для построения методов решения практических задач. Вводится применяемый математический аппарат – специальные системы координат, позволяющие наглядно и просто представить цилиндрическое и сферическое разложение, а также специальные сферические функции.

Получены соотношения методов вычислительной электродинамики для векторов Р-З – методов физической оптики разложения поля в ряд по собственным функциям в специальных системах координат. Все полученные в данном разделе формулы и соотношения необходимы для создания алгоритмов векторного расчета полей и будут применены в дальнейшем для решения практических задач.

### 2.1 Основные соотношения электродинамики векторов Р-З

Для начала необходимо получить вспомогательные соотношения, применяемые в дальнейшем – это граничные условия для тангенциальных составляющих поля, выражение для поля элементарного электрического диполя и лемма Лоренца.

#### 2.1.1 Граничные условия.

Из уравнений Максвелла в интегральной форме получим выражение, связывающее тангенциальные составляющие поля на границе раздела двух сред

$$\oint_C \mathbf{F}_{\pm} dr = \iint_S (\pm k \mathbf{F}_{\pm} + \mathbf{j}_{\pm}) ds. \quad (2.1)$$

В качестве пути интегрирования возьмем прямоугольный путь, пересекающий границу раздела (рис. 2.1). Уменьшая размеры сторон прямоугольника и переходя к пределу, первое слагаемое правой части (2.1) стремится к нулю. Если проводимости сред конечны, то поверхностные токи отсутствуют, и плотность стороннего тока в (2.1) также стремится к нулю

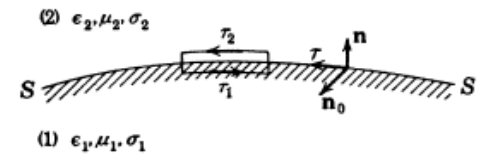


Рис. 2.1. К выводу тангенциальных ГУ

$$[\mathbf{n}, (\mathbf{F}_{\pm 2} - \mathbf{F}_{\pm 1})] = 0. \quad (2.2)$$

Если проводимость стремится к бесконечности, то вводится плотность поверхностных токов  $\mathbf{J}_{\pm}$  как предел  $\mathbf{j}_{\pm} \Delta l$  при  $\Delta l \rightarrow 0$  и  $\mathbf{j}_{\pm} \rightarrow \infty$

$$\pm [\mathbf{n}, (\mathbf{F}_{\pm 2} - \mathbf{F}_{\pm 1})] = \mathbf{J}_{\pm}. \quad (2.3)$$

Как видно из (2.3), токи ортогональных поляризации на идеально проводящих поверхностях равны по амплитуде и противоположны по знаку, что позволяет в решении таких задач учитывать лишь один вектор. Из второго уравнения Максвелла также можно получить граничное условие для нормальных компонент поля.

### 2.1.2 Векторный потенциал и поле диполя Герца круговой поляризации.

Легко показать, что в свободном пространстве электромагнитное поле, удовлетворяющее уравнению Максвелла (1.5), по аналогии с классической теорией выражается через векторный потенциал соответствующей круговой поляризации

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm k \mathbf{A}_{\pm} + \text{rot} \mathbf{A}_{\pm} \pm \frac{1}{k} \text{grad} \text{div} \mathbf{A}_{\pm}. \quad (2.4)$$

Подставляя выражение (2.4) в (1.5) получаем, что векторные потенциалы  $\mathbf{A}_{\pm}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\pm} + k^2 \mathbf{A}_{\pm} = -\mathbf{j}_{\pm}. \quad (2.5)$$

Решение неоднородного уравнения Гельмгольца – свертка

$$\mathbf{A}_{\pm}(p) = \iiint_V G_{pq} \mathbf{j}_{\pm}(q) dv_q, \quad (2.6)$$

где  $q$  – точка источника,  $p$  – точка наблюдения. Интегрирование в (2.6) ведется по всему объему, в котором сосредоточены токи.  $G_{pq}$  – скалярная функция Грина свободного пространства

$$G_{pq} = \frac{\exp(-ikr_{pq})}{4\pi r_{pq}}. \quad (2.7)$$

Для вывода поля диполя Герца круговой поляризации запишем уравнения Максвелла для векторов Римана-Зильберштейна

$$\text{rot} \mathbf{F}_{\pm} \mp k \mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{j}_{\pm}. \quad (2.8)$$

Источник – диполь, направленный вдоль вектора  $\mathbf{a}$ , расположенный в точке  $\mathbf{r}_0$  (рис. 2.2)

$$\mathbf{j}_{\pm} = \mathbf{a} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \quad (2.9)$$

Тогда уравнения Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{F}_{\pm} \mp k \mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{a} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \quad (2.10)$$

Решение – тензорная функция Грина  $\mathbf{G}_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{a}\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} \right) [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]] - \frac{2}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} \mathbf{a} \right\}; \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0$  – единичный вектор, направленный от точки истока  $\mathbf{r}_0$  к точке наблюдения  $\mathbf{r}$ .



$$\frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} = \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left( -ik - \frac{1}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \right); \quad \frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r^2} = \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left( -k^2 + \frac{2ik}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} + \frac{2}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^2} \right); \quad \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|};$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}; \quad r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} = \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|;$$

или в другом виде поле диполя Герца

$$\mathbf{G}_{\mathbf{a}\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -k \left\{ i \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}] \pm \left\{ \left( 1 - \frac{3i}{kr} - \frac{3}{(kr)^2} \right) (\mathbf{r}^0, \mathbf{a}) \mathbf{r}^0 - \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \mathbf{a} \right\} \right\} \Psi_{pq}. \quad (2.13)$$

Таким образом, поле элементарного диполя Герца получается путем подстановки выражения для векторного потенциала в (2.4) и применения тождеств векторного анализа. Полный вывод полученного выражения содержится в Приложении А. Например, поле диполя, направленного вдоль оси Z:

$$\mathbf{F}_{\pm} = kG \left\{ \pm \frac{2}{kr} \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta \mathbf{e}_r \mp \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \right\}. \quad (2.14)$$

В дальней зоне (при  $\mathbf{r}^0 = -\mathbf{e}_r$ ,  $kr \gg 1$ ) в выражениях (2.11-2.14) остаются только поперечные составляющие поля.

### 2.1.3 Лемма Лоренца.

Одно из важных и полезных соотношений для граничных задач электродинамики – лемма Лоренца, устанавливающая связь между двумя источниками в объеме  $V$  и создаваемыми ими полями. Пусть  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  — одноимённые векторы Р-З, либо оба вектора правой поляризации, либо оба левой. Случай с двумя разноимёнными векторами Р-З рассматривать не имеет смысла, так как они удовлетворяют разным уравнениям и не взаимодействуют между собой. Векторы определены в области с границей  $S$  и удовлетворяют в этой области уравнению Максвелла с соответствующими источниками. Запишем уравнения Максвелла для каждого из векторов и умножим скалярно первое уравнение на  $\mathbf{F}_2$ , а второе на  $\mathbf{F}_1$  и вычтем из первой строки вторую

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{F}_1 \mp k \mathbf{F}_1 = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{F}_2 \\ \text{rot} \mathbf{F}_2 \mp k \mathbf{F}_2 = \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}_2 \text{rot} \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \text{rot} \mathbf{F}_2 = (\mathbf{j}_1, \mathbf{F}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{F}_1),$$

$$\text{div}[\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2] = (\mathbf{j}_1, \mathbf{F}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{F}_1). \quad (2.16)$$

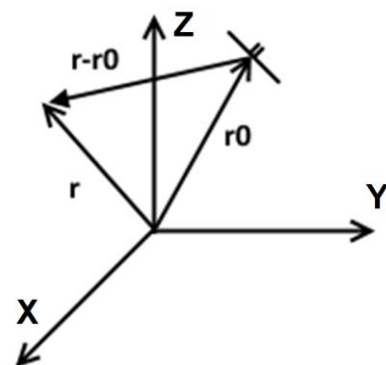


Рис. 2.2. К выводу выражения для элементарного диполя

По теореме Остроградского-Гаусса для произвольной области и ограничивающей его поверхности  $S$  получаем выражение леммы Лоренца:

$$\oiint_S ([\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2], \mathbf{n}) ds = \iiint_V \{(\mathbf{j}_1, \mathbf{F}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{F}_1)\} dv. \quad (2.17)$$

Здесь  $V$  – объём, ограниченный поверхностью  $S$ ,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности. Лемма Лоренца применяется, например, при составлении интегральных уравнений. Далее с помощью леммы Лоренца выводится теорема эквивалентности для векторов Р-З.

## 2.2 Специальные системы координат

В теории векторов Римана-Зильберштейна удобно оперировать системами координат, описывающими вращения векторов. Для описания полей применяются как стандартные – декартовы, сферические, цилиндрические системы координат, так и специфические – циклические и спиральные координаты, введенные специально для описания векторных полей в квантовой механике. Ниже будут указаны основные формулы, характеризующие такие системы координат, взятые в обозначениях из книги [61].

Для циклических и спиральных систем координат необходимо отличать ковариантные и контравариантные орты и векторы. Ковариантность и контравариантность — используемые в математике (линейной алгебре, дифференциальной геометрии, тензорном анализе) и в физике понятия, характеризующие то, как тензоры (скаляры, векторы, операторы, билинейные формы) изменяются при преобразованиях базисов в соответствующих пространствах или многообразиях. Контравариантными называют «обычные» компоненты, которые при смене базиса пространства изменяются с помощью преобразования, обратного преобразованию базиса. Ковариантными — те, которые изменяются так же, как и базис.

Для получения простых и симметричных соотношений методов вычислительной электродинамики векторов Р-З необходимо ввести вышеуказанные системы координат, определить скалярное и векторное произведение, а также ввести сферические гармоники.

### 2.2.1 Системы координат и орты.

*Циклические координаты* применяются вместо цилиндрических для описания полей круговой поляризации. *Циклические ковариантные и контравариантные орты* [61]

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \end{cases} ; \begin{cases} \mathbf{e}^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{cases}. \quad (2.18)$$

*Спиральные орты* применяются вместо сферических для описания полей круговой поляризации. *Спиральные ковариантные и контравариантные орты*

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi) \\ \mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}'_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\varphi) \end{cases} ; \begin{cases} \mathbf{e}^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\varphi) \\ \mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi) \end{cases} . \quad (2.19)$$

Далее по тексту с целью упрощения записей в обозначениях ортов спиральных координат  $\{\mathbf{e}^{+1}, \mathbf{e}^{-1}\}$  иногда штрих опускается. Ковариантные и контравариантные циклические и спиральные орты связаны между собой

$$\mathbf{e}^\mu = (-1)^\mu \mathbf{e}_{-\mu}; \mathbf{e}_\mu = (-1)^\mu \mathbf{e}^{-\mu} \quad (2.20)$$

Связь между декартовыми и циклическими ортами

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{-1} - \mathbf{e}_{+1}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{-1} - \mathbf{e}^{+1}) \\ \mathbf{e}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{-1} + \mathbf{e}_{+1}) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{-1} + \mathbf{e}^{+1}) \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}^0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Связь между спиральными ковариантными ортами и циклическими ковариантными

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_{+1} = \mathbf{e}_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} \\ \mathbf{e}'_0 = -\mathbf{e}_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \\ \mathbf{e}'_{-1} = \mathbf{e}_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{cases} \quad (2.22)$$

Связь между циклическими ковариантными ортами и спиральными ковариантными

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{+1} = \mathbf{e}'_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}'_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'_0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{e}_{-1} = \mathbf{e}'_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} \end{cases} \quad (2.23)$$

### 2.2.2 Векторы. Скалярное и векторное произведение векторов.

Произвольный вектор может быть представлен в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha} A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \mathbf{e}^{\alpha} \quad (2.24)$$

Для циклических и спиральных компонент справедливо

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{-\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A^{-\mu} \mathbf{e}^{\mu} \quad (2.25)$$

Связь между компонентами векторов в различных системах координат такая же, как и связь между соответствующими ортами. Допустим, имеется вектор  $\mathbf{F}$ , заданный в циклических координатах. Используем *ковариантные* компоненты в *контравариантном* базисе, то есть

$$\mathbf{F} = F_{+1}\mathbf{e}^{+1} + F_0\mathbf{e}^0 + F_{-1}\mathbf{e}^{-1} \quad (2.26)$$

Теперь выразим вектор в *спиральных* координатах. Мы также используем *ковариантные* компоненты в *контравариантном* базисе

$$\mathbf{F} = F'_{+1}\mathbf{e}'^{+1} + F'_0\mathbf{e}'^0 + F'_{-1}\mathbf{e}'^{-1} \quad (2.27)$$

Таким образом, применяем формулы перехода из *циклических ковариантных* компонент вектора к *спиральным ковариантным* составляющим.

Скалярное умножение в циклических и спиральных координатах

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{\mu} A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu} B^{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{-\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A^{-\mu} B^{\mu} \quad (2.28)$$

Векторное умножение в циклических и спиральных координатах

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = i \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{+1} & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_{-1} \\ A_{+1} & A_0 & A_{-1} \\ B_{+1} & B_0 & B_{-1} \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \mathbf{e}^{+1} & \mathbf{e}^0 & \mathbf{e}^{-1} \\ A^{+1} & A^0 & A^{-1} \\ B^{+1} & B^0 & B^{-1} \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_{+1} = i(A_0 B_{+1} - A_{+1} B_0) = i(A^{-1} B^0 - A^0 B^{-1})$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_0 = i(A_{-1} B_{+1} - A_{+1} B_{-1}) = i(A^{+1} B^{-1} - A^{-1} B^{+1}) \quad (2.30)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_{-1} = i(A_{-1} B_0 - A_0 B_{-1}) = i(A^0 B^{+1} - A^{+1} B^0)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^{+1} = i(A_0 B_{-1} - A_{-1} B_0) = i(A^{+1} B^0 - A^0 B^{+1})$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^0 = i(A_{-1} B_{+1} - A_{+1} B_{-1}) = i(A^{+1} B^{-1} - A^{-1} B^{+1}) \quad (2.31)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^{-1} = i(A_{+1} B_0 - A_0 B_{+1}) = i(A^0 B^{-1} - A^{-1} B^0)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}^*] = -i(A_0 B_{-1}^* + A_{+1} B_0^*)\mathbf{e}^{+1} - i(A_{-1} B_{-1}^* - A_{+1} B_{+1}^*)\mathbf{e}^0 + i(A_{-1} B_0^* + A_0 B_{+1}^*)\mathbf{e}^{-1}$$

### 2.3 Метод физической оптики для векторов Р-З и интеграл Кирхгофа

Физическая оптика (ФО) – аналитический метод, позволяющий решать задачи рассеяния и дифракции на электрически больших объектах. ФО широко применяется для задач рассеяния на проводящих поверхностях, что обусловлено простотой применения и высокой точностью. Метод ФО базируется на принципе Гюйгенса-Френеля, впервые открытом Гюйгенсом в 1690г. для построения огибающей волнового фронта и сформулированном Френелем [62] с учетом интерференции полей элементарных источников волнового фронта. Строгую математическую формулировку в скалярном случае впервые получил Гельмгольц в 1859 году, показав, что

принцип Гюйгенса-Френеля сводится к интегральной формуле, позволяющей вычислять значения поля в точке  $p$  по значениям поля и его нормальной производной на замкнутой поверхности, охватывающей точку

$$v(p) = -\frac{1}{4\pi} \oint \left\{ v \frac{d}{dn} \left( \frac{e^{-ikr_{pq}}}{r_{pq}} \right) - \frac{dv}{dn} \frac{e^{-ikr_{pq}}}{r_{pq}} \right\} ds \quad (2.32)$$

Кирхгофф применил эту формулу для задач дифракции [63]. В методе Кирхгоффа поверхность  $S$  стягивается вокруг дифрагирующего тела, при этом поле на теневой (неосвещенной) стороне считается равным нулю, то есть имеется разрыв поля при переходе через границу свет-тень. Рубинович [64] и Коттлер [65] показали, что решение Кирхгофа соответствует не краевой задаче, а задаче с заданным разрывом. При этом разрыв геометрооптического поля в работе Рубиновича на границе тени компенсируется противоположным по знаку разрывом в интеграле Кирхгофа, распространенном на конус тени. В статье Коттлера считается заданной величина разрыва при прохождении через бесконечно тонкий «черный экран». Отметим, что теория Кирхгофа применима для определения поля на достаточно больших расстояниях в предельном случае коротких волн.

Формулировки метода Кирхгоффа, применяемые в инженерной практике, были получены в первой половине XX века. Строгая векторная формулировка принципа Гюйгенса, аналогичная формуле Гельмгольца (32), после работ Лармора [66] и Котлера [67] стала возможной и для электромагнитных волн.

В 1901 году [68] Лав получил выражение, аналогичное которому мы называем теоремой эквивалентности. Это выражение для внутренней задачи связывает поле внутри замкнутой поверхности  $S$  с касательными составляющими поля на поверхности. Лармор, Игнатовский и Макдональд [66, 68, 69] пришли к схожим результатам. Коттлер добавил в выражение составляющую, компенсирующую разрыв на границе незамкнутой поверхности. Щелкунов сформулировал несколько фундаментальных теорем электродинамики [70, 71]. В частности, он сформулировал упомянутую выше теорему и назвал ее «принцип эквивалентности», при этом автор выражает поля через векторные потенциалы, которые в свою очередь выражаются через токи на поверхности. Формулировка принципа эквивалентности: на поверхности  $S$  может быть найдено такое распределение электрических и магнитных токов, которые за пределами поверхности возбуждают такое же поле, как и поле от реальных источников внутри  $S$ ; а также которые внутри  $S$  создают такое же поле, как и создаваемое реальными источниками вне  $S$ .

В известной работе Стрэттона и Чу [72, 73] авторы обобщили выводы Коттлера и приспособили их для инженерных вычислений, таким образом создав удобный аппарат расчета полей в приближении ФО. Формула Стрэттона-Чу является широко распространенным

выражением для расчета полей по заданным источникам в задачах дифракции. Основные постулаты метода ФО приведены в Главе 1, их иллюстрация изображена на рис. 2.3.

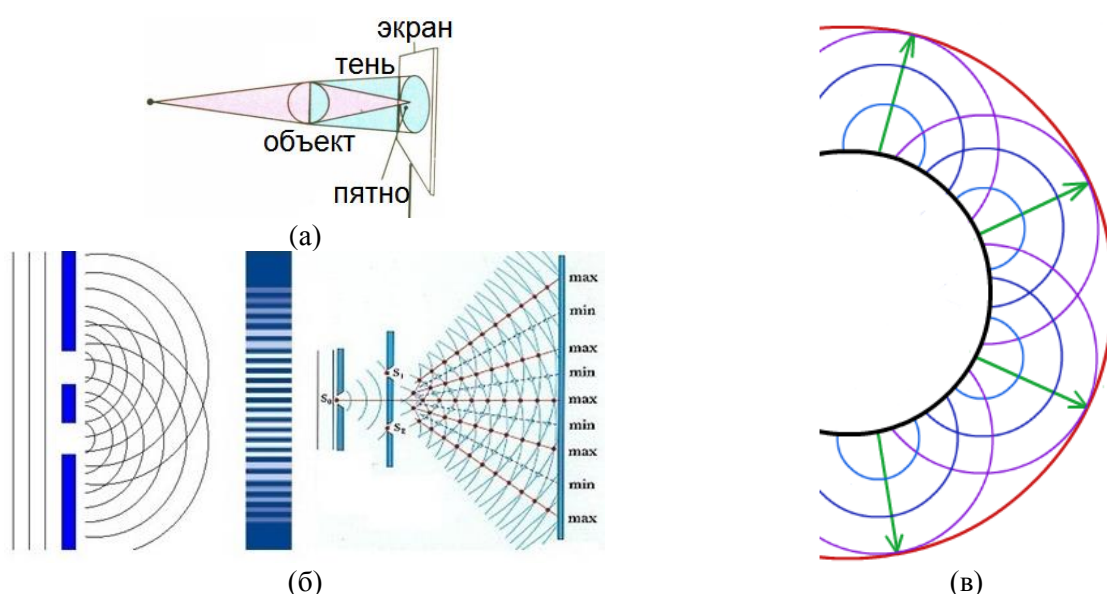


Рис. 2.3. Иллюстрация принципов физической оптики: дифракция на границе свет-тень (а, б); принцип Гюйгенса-Френеля (в).

В данном разделе выводятся основные соотношения для векторов Р-3, применяемые в расчетах методом ФО [74]. Для получения поля вне замкнутой поверхности, ограниченной объемом  $V$ , по сторонним источникам внутри объема  $V$  и составляющим этого поля на поверхности мы применяем лемму Лоренца. В (2.17) положим  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$  – поле с источниками в объеме  $V$ , удовлетворяющее внутри поверхности  $S$  уравнению Максвелла (1.5) и условию излучения на бесконечности,  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_D$  – поле элементарного диполя, сосредоточенного в точке  $\mathbf{r}_0$ , которая может быть либо строго внутренней, либо строго наружной относительно границы  $S$ , (то есть, расстояние от этой точки до границы  $S$  строго больше некоторого положительного числа  $\epsilon$ ),  $\mathbf{a}$  – единичный вектор вдоль диполя. Уравнение поля диполя:

$$\text{rot } \mathbf{F}_2 \mp k \mathbf{F}_2 = \mathbf{a} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \quad (2.33)$$

Решение уравнения с такой правой частью – функция Грина. Полный вывод выражений для всех случаев приведен в Приложении А. Применим лемму Лоренца в области без источников  $S+S_1+S_2$  и подставим в нее выражения для полей диполя. Интегралы по  $S_1$  и  $S_2$  равны нулю, поэтому из леммы Лоренца получаем

$$\oint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{F}_D], \mathbf{n}) ds = \iiint_V \{(\mathbf{j}, \mathbf{F}_D) - (\mathbf{j}_D, \mathbf{F})\} dv, \quad (2.34)$$

$$-\oint_S (\mathbf{F}_D, [\mathbf{F}, \mathbf{n}]) ds = \iiint_V (\mathbf{j}, \mathbf{F}_D) dv - \iiint_V (\mathbf{a} \delta(p - q), \mathbf{F}) dv, \quad (2.35)$$

или

$$(\mathbf{a}, \mathbf{F}(p)) = \oint_S (\mathbf{F}_D, \mathbf{J}) ds + \iiint_V (\mathbf{j}, \mathbf{F}_D) dv. \quad (2.36)$$

где  $\mathbf{J}=[\mathbf{F},\mathbf{n}]$  – вектор, содержащий тангенциальные составляющие поля, называемый эквивалентной плотностью поверхностного тока. Подставляя (2.13) в (2.36) и проводя векторные преобразования получаем выражение для теоремы эквивалентности векторов Р-3

$$(-ik) \left\{ \oint_S (-ik) G_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} \mathbf{b}_{\pm}(\rho, \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0, \mathbf{J}_{\pm}) ds_{\mathbf{r}} + \iiint_V G_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} \mathbf{b}_{\pm}(\rho, \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0, \mathbf{J}_{\pm}) dv_{\mathbf{r}} \right\} = \mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}_0);$$

$$\mathbf{b}_{\pm}(\rho, \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0, \mathbf{J}_{\pm}) = \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) [\mathbf{J}_{\pm}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0] \pm \left(i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2}\right) \left(\mathbf{J}_{\pm} - (\mathbf{J}_{\pm}, \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0) \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0\right) \mp \frac{2}{k\rho} \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) \mathbf{J}_{\pm}; \quad (2.37)$$

$$\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|; \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}; G_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} = \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho}.$$

Полагая при выводе наличие разрыва поля на части поверхности, можно получить аналог формулы Стрэттона-Чу [72]:

$$(\mathbf{F}_{\pm}(p), \mathbf{a}) = \mp k \iint_S ([\mathbf{F}_{\pm}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \iint_S ([\mathbf{F}_{\pm}, [\mathbf{grad} \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp$$

$$\mp \frac{1}{k} \iint_S (\mathbf{n}, \mathbf{rot} \{(\mathbf{grad} \psi, \mathbf{a}) \mathbf{F}_{\pm}\}) ds \pm \frac{1}{k} \iint_S (\mathbf{grad} \psi, \mathbf{a}) (\mathbf{n}, \mathbf{rot} \mathbf{F}_{\pm}) ds. \quad (2.38)$$

Или, применяя к области разрыва теорему Стокса, получаем формулу Стрэттона-Чу с контурным интегралом, впервые введенным Котлером [65] для незамкнутых поверхностей

$$\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}_0) = k \iint_S \left\{ \mp [\mathbf{n}, \mathbf{F}_{\pm}] + i \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) \left([\mathbf{n}, \mathbf{F}_{\pm}], \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0\right) - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_{\pm}) \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0 \right\} G_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} ds_{\mathbf{r}} \pm$$

$$\pm i \oint_L \left(1 - \frac{i}{k\rho}\right) G_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} \mathbf{r}_{\mathbf{r}_0}^0 (\mathbf{F}_{\pm}, d\mathbf{l}_{\mathbf{r}}). \quad (2.39)$$

В формуле (2.39) нормаль внутренняя, направление обхода контура должно быть согласовано с ориентацией поверхности: обход в интеграле по контуру происходит так, что если смотреть с конца вектора нормали, то при обходе контура поверхность должна оставаться слева.

В формуле Стрэттона-Чу искомое поле выражается через касательные и нормальные составляющие поля на поверхности, а также через интеграл по контуру поверхности. Все интегральные операторы, входящие в (2.39), являются ограниченными. Результат таким образом получается более точный по сравнению с выражением (2.37) для точек наблюдения, расположенных вблизи незамкнутых поверхностей, содержащих источники излучения, таких как апертура, поверхность рефлектора и т.д.

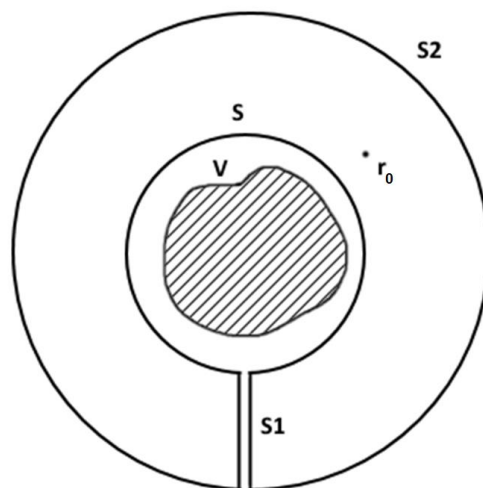


Рис. 2.4. К выводу выражения интеграла Кирхгофа

Поле в дальней зоне (ДЗ) получается при подстановке  $\mathbf{r}_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}^0 = -\mathbf{e}_r$

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_{r_0}) = ik \iint_{S_2} \left\{ [\mathbf{J}, \mathbf{e}_{r_0}] \mp i(\mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{e}_{r_0})\mathbf{e}_{r_0}) \right\} \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho} ds. \quad (2.40)$$

Функция Грина в ДЗ

$$\begin{aligned} \rho &= |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| = |\mathbf{r}_0| - (\mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{r}'); \\ G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) &= \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho} = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} e^{ik(\mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{r}')}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Тогда поле в ДЗ

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_{r_0}) = ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_{S_2} \left\{ [\mathbf{J}, \mathbf{e}_{r_0}] \mp i(\mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{e}_{r_0})\mathbf{e}_{r_0}) \right\} e^{ik(\mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{r}')} ds'. \quad (2.42)$$

Переведем составляющие в спиральные координаты

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}_0) &\approx ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_S \left\{ (J_{\varphi}\mathbf{e}_{\vartheta} - J_{\vartheta}\mathbf{e}_{\varphi}) \mp i(J_{\vartheta}\mathbf{e}_{\vartheta} + J_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi}) \right\} e^{ik(\mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{r}')} ds' = \\ &= ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_S \left\{ (J_{\varphi} \mp iJ_{\vartheta})\mathbf{e}_{\vartheta} + (-J_{\vartheta} \mp iJ_{\varphi})\mathbf{e}_{\varphi} \right\} e^{ik(\mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{r}')} ds = \left( \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_S J_{\pm 1} e^{ik(\mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{r}')} ds \right) \mathbf{e}^{\pm 1}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Формула (2.43) является выражением интеграла Кирхгофа в дальней зоне. В ДЗ в спиральных координатах ненулевая лишь основная поперечная составляющая поля, что является весомым преимуществом применения векторов Р-З для расчета характеристик антенн. Подробнее данное свойство будет описано далее.

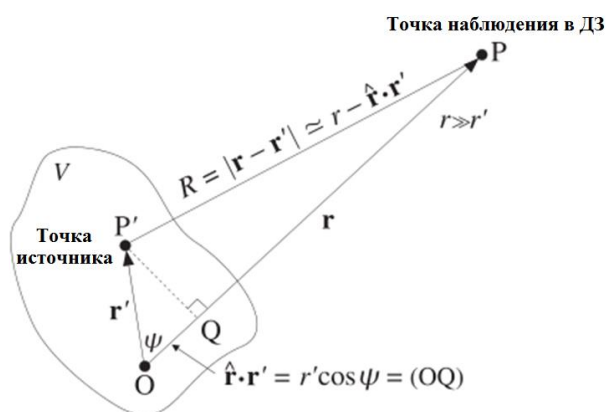


Рис. 2.5. К выводу выражения для функции Грина и интеграла Кирхгофа в ДЗ.

Рассмотрим простой пример. Пусть задано распределение тока в циклических координатах  $J_{+1}=1$  в плоской прямоугольной апертуре размерами  $axb$  при  $z=0$ , что соответствует распространяющейся волне правой круговой поляризации. В этом случае в формуле интеграла Кирхгофа в ДЗ



$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{r}' = x_{ap} \mathbf{e}_x + y_{ap} \mathbf{e}_y.$$

Переведем составляющие тока из циклических в спиральные:

$$\mathbf{J}_+ = J_{+,+1} \mathbf{e}^{+1} = J_{+,+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} \mathbf{e}^{+1}. \quad (2.45)$$

Подставляем (2.46), (2.47) в (2.45):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_+ &= \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_S \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} \exp\left(ik\left(\mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta, x_{ap} \mathbf{e}_x + y_{ap} \mathbf{e}_y\right)\right) ds \mathbf{e}^{+1} = \\ &= \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \int_{-a/2}^{a/2} \exp(ik \sin \vartheta \cos \varphi x_{ap}) dx_{ap} \int_{-b/2}^{b/2} \exp(ik \sin \vartheta \sin \varphi y_{ap}) dy_{ap} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} \mathbf{e}^{+1} = \\ &= \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \frac{\sin(0.5ak \sin \vartheta \cos \varphi)}{k \sin \vartheta \cos \varphi} \frac{\sin(0.5bk \sin \vartheta \sin \varphi)}{k \sin \vartheta \sin \varphi} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} \mathbf{e}^{+1}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

На рис. 2.6 представлены результаты расчета составляющей  $F_{+,+1}$  в дальней зоне, посчитанные по формуле (2.46) и численно по формуле (2.39). Решение некоторых практических задач методом ФО для векторов Р-3 представлено в [74].

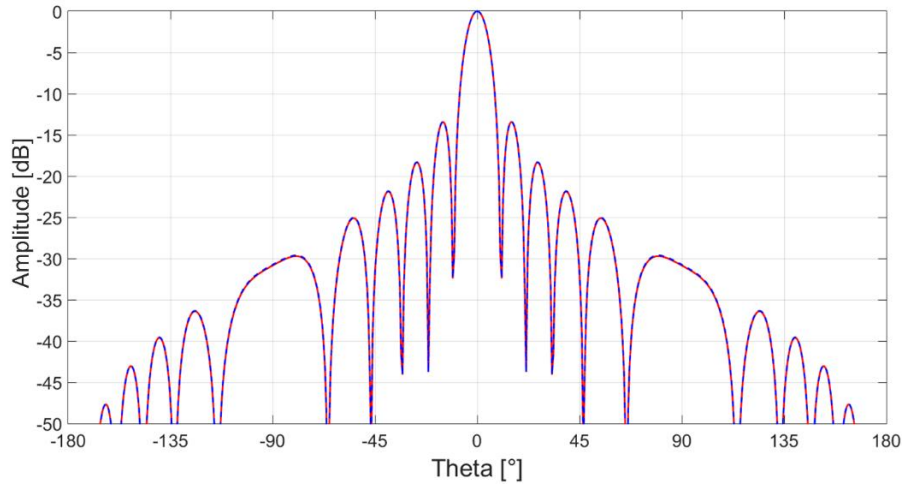


Рис. 2.6. Поле в ДЗ от прямоугольной апертуры – кривые, полученные аналитически (синяя) и численно (красная).

## 2.4 Векторные сферические гармоники векторов Р-3

В спиральных координатах получаются удобные соотношения для собственных функций уравнений Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{F}_\pm \mp k \mathbf{F}_\pm = \mathbf{j}_\pm. \quad (2.47)$$

Решение методом разделения переменных в спиральных координатах имеет вид [39]

$$\mathbf{F}_\pm = \begin{pmatrix} b_1(r) P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \mathbf{e}^{+1} \\ b_0(r) P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \mathbf{e}^{+0} \\ b_{-1}(r) P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} e^{-im\varphi}. \quad (2.48)$$

Полное решение будет приведено далее. В классическом сферическом разложении по ТЕ и ТМ-волнам применяются скалярные сферические гармоники  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , в которые входят присоединенные функции Лежандра  $P_m^n(\cos \vartheta)$ . В спиральном представлении векторов Р-З используются специальные функции  $P_{m,l}^n(\cos \vartheta)$ , введенные Гельфандом и Шапиро [76].

Вращение объектов в трехмерном пространстве определяется тремя углами Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , где углы  $\varphi$ ,  $\theta$  определяют сферические координаты положения новой системы координат, угол  $\psi$  – это угол поворота объектов относительно новой оси (рис. 2.7). Для инвариантного выражения физических величин используются так называемые «матричные элементы неприводимых представлений группы вращений». Они выражаются через углы Эйлера [61] и включают специальные сферические функции

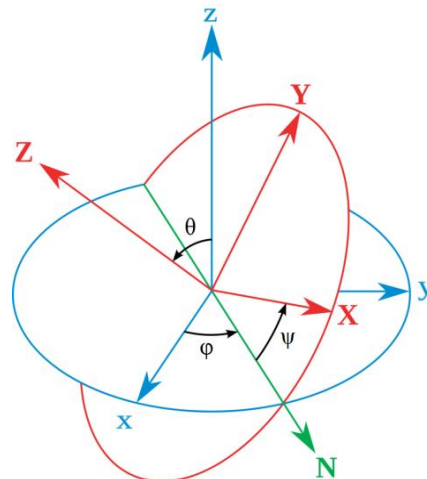


Рис. 2.7. Углы Эйлера поворота системы координат

$$P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-i(m\varphi+l\psi)}, \quad n \geq \max(|m|, |l|). \quad (2.49)$$

В спектральном частотном представлении угол  $\psi$  не используется, он соответствует вращению в зависимости от времени  $\psi = \omega t$ , а индекс  $l$  определяет векторную составляющую, которая вращается согласовано или противоположно поперечной составляющей в дальней зоне, либо не вращается, подобно радиальной составляющей. Совокупность гармоник с индексами  $l=0, \pm 1$  формируют одну векторную сферическую гармонику. Функции  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  формируют полный ортогональный базис функций для компонент произвольной квадратично-интегрируемой векторной функции  $\mathbf{F} = F_{+1}\mathbf{e}^{+1} + F_0\mathbf{e}^0 + F_{-1}\mathbf{e}^{-1}$ , определенной на сфере.

Условие ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i(m_1-m_2)\varphi} P_{m_1,l}^{n_1}(\cos \vartheta) \left( P_{m_2,l}^{n_2}(\cos \vartheta) \right)^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi / (2n_1+1) \delta_{m_1,m_2}^{n_1,n_2}. \quad (2.50)$$

Применяемые базисные функции с точностью до постоянного множителя совпадают с D-функциями Вигнера, в связи с чем в работе они могут называться D-функциями [61]:

$$\begin{aligned} P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} &= (-i)^{m-l} D_{m,l}^n(\varphi, \vartheta) \\ P_{m,l}^n(\cos \vartheta) &= (-i)^{m-l} d_{m,l}^n(\vartheta) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Функции  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  – это полный набор матричных элементов неприводимых представлений группы вращений евклидоваго пространства любой размерности, применяемые для нахождения собственных функций линейных задач любых тензорных объектов для

соответствующих значений индекса  $l$ ). В нашем случае мы применяем их для самого простого случая – векторов в трехмерном пространстве. Эти функции хорошо исследованы и имеют разработанный математический аппарат [61, 75, 76, 77].

В скалярном случае ( $l=0$ ) функции с точностью до постоянного множителя совпадают с присоединенными функциями Лежандра

$$P_n^m(z) = i^m \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!}} P_{m,0}^n(z). \quad (2.52)$$

Сферические функции определяются в явном виде, для них определены соотношения симметрии, рекуррентные соотношения и соотношение ортогональности

$$P_{m,l}^n(z) = P_{-m,-l}^n(z), \quad (2.53)$$

$$\sqrt{1-z^2} \frac{dP_{m,l}^n(z)}{dz} \pm \frac{lz-m}{\sqrt{1-z^2}} P_{m,l}^n(z) = -i\sqrt{(n\mp l)(n\pm l+1)} P_{m,l\pm 1}^n(z). \quad (2.54)$$

Первые функции  $P_{m,l}^n(\cos \vartheta)$  – элементарные мультиполи:

$$\begin{array}{ccc} \underline{n=1, m=+1} & \underline{n=1, m=0} & \underline{n=1, m=-1} \\ \left( \begin{array}{c} P_{1,1}^1(\cos \vartheta) \\ P_{1,0}^1(\cos \vartheta) \\ P_{1,-1}^1(\cos \vartheta) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \frac{1+\cos \vartheta}{2} \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1-\cos \vartheta}{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} P_{0,1}^1(\cos \vartheta) \\ P_{0,0}^1(\cos \vartheta) \\ P_{0,-1}^1(\cos \vartheta) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \cos \vartheta \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} P_{-1,1}^1(\cos \vartheta) \\ P_{-1,0}^1(\cos \vartheta) \\ P_{-1,-1}^1(\cos \vartheta) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} -\frac{1-\cos \vartheta}{2} \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\cos \vartheta}{2} \end{array} \right) \end{array} \quad (2.55)$$

Несколько первых векторных мультиполей изображены на рис. 2.8. В вычислительной электродинамике D-функции Вигнера используются в основном для описания вращений сферических гармоник [78]. Существуют алгоритмы вычисления D-функций Вигнера, например, [79, 80]. Однако такие алгоритмы применяются для вычисления функций с любыми индексами  $l$ , они сложны и громоздки, в связи с чем разработан простой алгоритм вычисления функций без накопления ошибки. Были исследованы различные алгоритмы, построенные на рекуррентных соотношениях и формулах симметрии, описанные в Приложении Б. Для полного представления произвольной векторной функции применяются сферические функции с индексами  $l = -1, 0, +1$ . Функции с индексом  $l=+1$  соответствуют составляющей  $F_{+1}$  в спиральном базисе, и, как будет показано далее, волне правой круговой поляризации, распространяющейся в направлении  $\mathbf{r}$ . Индекс  $l=-1$  соответствует волне той же круговой поляризации, отраженной от сечения сферического волновода и распространяющейся в направлении  $-\mathbf{r}$ .

Для иллюстрации физического смысла составляющих векторов P-3, выраженных в спиральном базисе, рассмотрим распространение сферической волны, имеющей только поперечные компоненты, например, правой круговой поляризации.

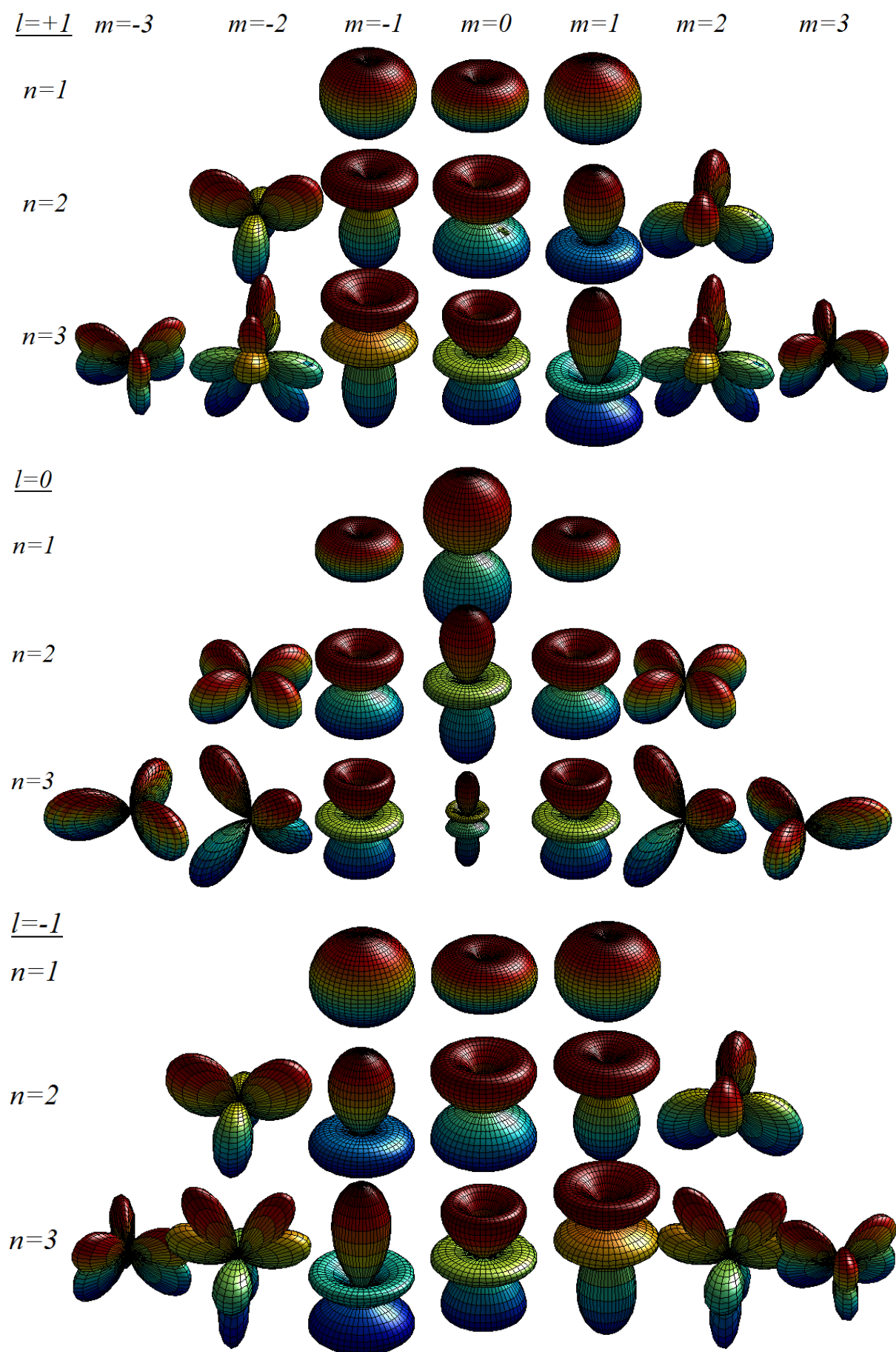


Рис. 2.8. Векторные сферические гармоники  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$ .

Решение однородных уравнения Максвелла ищется в виде

$$\mathbf{F}_+ = \mathbf{f}^+ \frac{e^{-ikr}}{r} = (F_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.56)$$

Подставляя это поле в уравнение Максвелла, получаем

$$\text{rot}\mathbf{F}_+ - k\mathbf{F}_+ = \sqrt{2}k \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\vartheta + i\mathbf{e}_\varphi)F_\vartheta + i\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\vartheta - i\mathbf{e}_\varphi)F_\varphi \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2.57)$$

Таким образом, в случае равенства комплексных амплитуд (для идеально поляризованной волны)  $F_\vartheta = F_\varphi$  решение с точностью до постоянного множителя представляется в виде

$$\mathbf{F}_+ = (\mathbf{e}^{+\vartheta} + i\mathbf{e}^{+\varphi}) \frac{e^{-ikr}}{kr} \quad (2.58)$$

Теперь можно интерпретировать физическую сущность спиральных компонент векторов Римана-Зильберштейна. Для этого рассмотрим сечение сферического волновода, изображенное на рис. 2.9. Для вектора правой круговой поляризации  $\mathbf{F}_+$  составляющая  $F_{+1}$  является «прямой» волной, распространяющейся вдоль увеличения координаты  $r$  в сферическом волноводе. Составляющая  $F_{-1}$  имеет смысл «отраженной» волны, распространяющейся вдоль убывания координаты  $r$  в сферическом волноводе. Составляющая  $F_0$  – продольная составляющая, «бегущая» волна на поверхности сферы – сечения волновода.

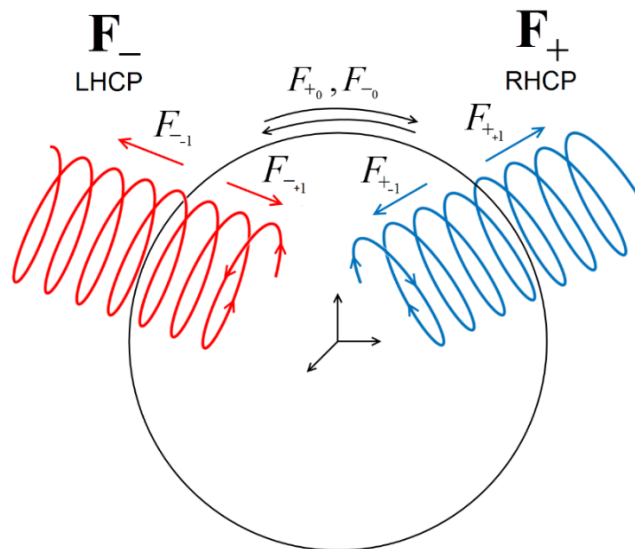


Рис. 2.9. Иллюстрация физического смысла распространяющихся в сферическом волноводе спиральных составляющих векторов Римана-Зильберштейна.

Сферический волновод неоднородный для распространяющихся в нем волн, в волноводе возникают отражённые волны. Они тем интенсивнее, чем меньше текущий радиус (по сравнению с длиной волны). У векторной функции составляющая  $F_{-1}$  – это отражённая волна расходящейся волны правой круговой поляризации. Она быстро убывает с увеличением радиуса. Когда радиус мал по сравнению с длиной волны электромагнитная волна имеет продольную составляющую (она замыкается на сфере).

## 2.5 Разложение поля в ряд по цилиндрическим и сферическим волнам

Перейдем теперь к описанию решения уравнений Максвелла методом разделения переменных – нахождением собственных функций в разных системах координат.

### 2.5.1. Решение уравнений Максвелла в цилиндрическом и циклическом базисах

Запишем однородные уравнения Максвелла в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial F_{z\pm}}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_{\varphi\pm}}{\partial z} \mp k F_{r\pm} = 0, \\ \frac{\partial F_{r\pm}}{\partial z} - \frac{\partial F_{z\pm}}{\partial r} \mp k F_{\varphi\pm} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_{\varphi\pm}) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_{r\pm}}{\partial \varphi} \mp k F_{z\pm} = 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Пусть волна распространяется вдоль оси  $Z$ , то есть  $F_{\pm}(\rho, \varphi, z) = F_{0\pm}(\rho, \varphi) e^{-i\beta z}$ , где  $\beta$  – продольное волновое число. Решаем разделением переменных

$$\begin{cases} F_{\pm, r} = A(r) e^{i(m\varphi - \beta z)}, \\ F_{\pm, \varphi} = B(r) e^{i(m\varphi - \beta z)}, \\ F_{\pm, z} = C(r) e^{i(m\varphi - \beta z)}. \end{cases} \quad (2.60)$$

Подставляем (2.60) в (2.59), проводим преобразования и приходим к уравнению Бесселя относительно радиальной функции. Выбираем решение в виде функции Бесселя, не имеющей особенности в центре координат. Обозначаем  $k_{\perp mn} = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ ;  $k_{mn} = \beta$  – поперечное и продольное волновое число. Решение

$$\begin{cases} F_{r\pm} = C_{m\pm} \frac{i}{k_{\perp mn}^2} \left( \pm \frac{km}{r} J_m(k_{\perp mn} r) - k_{\perp mn} k_{mn} J'_m(k_{\perp mn} r) \right) e^{i(m\varphi - k_{mn} z)}, \\ F_{\varphi\pm} = C_{m\pm} \frac{1}{k_{\perp mn}^2} \left( \frac{k_{mn} m}{r} J_m(k_{\perp mn} r) \mp k_{\perp mn} k J'_m(k_{\perp mn} r) \right) e^{i(m\varphi - k_{mn} z)}, \\ F_{z\pm} = C_{m\pm} J_m(k_{\perp mn} r) e^{i(m\varphi - k_{mn} z)}. \end{cases} \quad (2.61)$$

где  $C_{m\pm}$  – амплитудный коэффициент, зависящий от способа возбуждения и граничных условий. Мы получили систему собственных волн векторов Р-З в цилиндрической системе координат. Для определения распространяющихся волн, например, в круглом волноводе, нужно решить дисперсионное уравнение и определить поперечное волновое число. Систему (2.61) можно привести к несколько иному виду, применив рекуррентные формулы для функций Бесселя

$$\begin{cases} F_{r\pm} = C_{m\pm} \frac{i}{2k_{\perp mn}} \left( (k_{mn} \pm k) J_{m+1}(k_{\perp mn} r) - (k_{mn} \mp k) J_{m-1}(k_{\perp mn} r) \right) e^{i(m\varphi - k_{mn} z)}, \\ F_{\varphi\pm} = C_{m\pm} \frac{1}{2k_{\perp mn}} \left( (k_{mn} \pm k) J_{m+1}(k_{\perp mn} r) + (k_{mn} \mp k) J_{m-1}(k_{\perp mn} r) \right) e^{i(m\varphi - k_{mn} z)}, \\ F_{z\pm} = C_{m\pm} J_m(k_{\perp mn} r) e^{i(m\varphi - k_{mn} z)}. \end{cases} \quad (2.62)$$

Или то же самое в циклических координатах

$$\begin{cases} F_{\pm, +1} = -C_{m\pm} \frac{i}{\sqrt{2}k_{\perp mn}} (k_{mn} \pm k) J_{m+1}(k_{\perp mn} r) e^{i((m+1)\varphi - k_{mn} z)}, \\ F_{\pm, 0} = C_{m\pm} J_m(k_{\perp mn} r) e^{i(m\varphi - k_{mn} z)}, \\ F_{\pm, -1} = -C_{m\pm} \frac{i}{\sqrt{2}k_{\perp mn}} (k_{mn} \mp k) J_{m-1}(k_{\perp mn} r) e^{i((m-1)\varphi - k_{mn} z)}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Эти выражения будут использованы в дальнейшем для решения задачи возбуждения и распространения волн в гладком и гофрированном волноводах с целью определения влияния короба лучевода на распространяющееся поле. Как видно, решение уравнений Максвелла в циклических координатах свелось к удобному симметричному виду.

### 2.5.2. Решение уравнений Максвелла в спиральном базисе

Метод разложения электромагнитного поля в ряд по сферическим гармоникам – один из широко применяемых и эффективных методов для решения многочисленных задач антенной и СВЧ техники. Сферические волны – мультиполи – представляют собой элементарные решения уравнений Максвелла для свободного пространства, получаемые разделением переменных в сферической системе координат. Метод разложения на электромагнитные мультиполи основан на том, что электромагнитное поле может быть выражено в виде линейной комбинации множества ортогональных решений в соответствующей системе координат – в виде ряда Фурье. Преимущество метода заключается в том, что, однажды определив коэффициенты разложения по источникам поля, можно определить поле в практически любой точке пространства.

Метод широко используется для расчета полей линий передач, антенн, пересчета ближнего поля в поле в дальней зоне и расчета диаграммы направленности излучения, расчетов взаимного импеданса, а также в других задачах антенной техники. Традиционная теория электромагнитных мультиполей, сформулированная Ми и Дебаем в начале 20 века, описывает поле, выраженное векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , через сферические ТЕ (магнитные) и ТМ (электрические) волны [73, 81, 82]. Выражения для разложения поля в ряд по электрическим и магнитным мультиполям включают радиальные и векторные сферические функции, а также производные этих функций с некоторыми коэффициентами. Более общий и эффективный аппарат сферических функций был создан в теории представлений групп [61]. Сферические гармоники векторов Римана-Зильберштейна в спиральных координатах просто выражается через описанные

ранее D-функции Вигнера. Как будет показано, разложение поля в ряд по векторным сферическим гармоникам проще и удобнее, включает в себя только дифференцирование сферических функций Бесселя.

Вместо применения классической сферической системы координат и классических мультиполей мы будем искать решение в ранее введенных спиральных координатах. Решение уравнений Максвелла в спиральном базисе ищется в виде (2.48). Подстановка выражения (2.48) в уравнения Максвелла (1.5) и использование свойств сферических функций приводит к сферическому уравнению Бесселя относительно радиальной функции. Полный вывод приведен в Приложении В. Окончательное выражение для фундаментального решения – векторной сферической гармоники

$$\mathbf{F}_{m\pm}^n = e^{-im\varphi} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \mp ik \right) \mathbf{e}^{r+1} \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \frac{i\sqrt{2n(n+1)}}{r} \mathbf{e}^{r,0} \\ P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \mp ik \right) \mathbf{e}^{r-1} \end{pmatrix} z_n(kr) = \quad (2.64)$$

$$= e^{-im\varphi} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \mp ik \right) \mathbf{e}^{r+1} \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \frac{i\sqrt{2n(n+1)}}{r} \mathbf{e}^{r,0} \\ -P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \pm ik \right) \mathbf{e}^{r-1} \end{pmatrix} z_n(kr).$$

где  $z_n(kr)$  – сферическая функция Бесселя. Впервые такое решение получено в [39]. С некоторыми дополнениями и коррекциями решение с решением некоторых задач и обозначением преимуществ представлено в [58, 59].

Решение, удовлетворяющее условию излучения, включает в себя сферическую функцию Ханкеля второго рода. Дифференциальный оператор в скобках обозначим  $D_{\pm}$

$$D_{\pm} = \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \pm ik \right) z_n(kr). \quad (2.65)$$

Для вывода выражения в ДЗ необходимо подействовать дифференциальным оператором  $D_{\pm}$  на асимптотическое выражение функции Ханкеля второго рода. Асимптотические выражения сферических функций для большого аргумента [83]:

$$h_n^{(2)}(kr) \underset{kr \rightarrow \infty}{=} \frac{e^{-ikr}}{kr} i^{n+1}; \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \pm ik \right) h_n^{(2)}(kr) \underset{kr \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} 0; \\ 2i^n \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{cases} \quad (2.66)$$

В итоге получаем выражение для векторных сферических гармоник в ДЗ



$$\mathbf{F}_+ = 2i^n \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \mathbf{e}^{+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im\varphi}; \mathbf{F}_- = -2i^n \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} e^{-im\varphi}. \quad (2.67)$$

Используя обратное преобразование, от векторов  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$ , можно перейти к традиционным векторам  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и получить выражения для электрических и магнитных мультиполей. Выражения для элементарных источников круговой поляризации при  $n=1$

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} P_{m,1}^1(\cos \vartheta) \left( -\frac{i}{(kr)^2} + \frac{2}{kr} + 2i \right) \mathbf{e}^{+1} \\ P_{m,0}^1(\cos \vartheta) 2i \left( \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right) \mathbf{e}^0 \\ P_{m,-1}^1(\cos \vartheta) \frac{i}{(kr)^2} \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{r} e^{-i\varphi}; \mathbf{F}_- = \begin{pmatrix} -P_{m,1}^1(\cos \vartheta) \frac{i}{(kr)^2} \mathbf{e}^{+1} \\ P_{m,0}^1(\cos \vartheta) 2i \left( \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right) \mathbf{e}^0 \\ -P_{m,-1}^1(\cos \vartheta) \left( -\frac{i}{(kr)^2} + \frac{2}{kr} + 2i \right) \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{r} e^{-i\varphi}. \quad (2.68)$$

$n=1, m=+1$  – элемент Гюйгенса с максимумом излучения вдоль оси  $Z$

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \vartheta}{2} \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{2i}{kr} + 2 \right) \mathbf{e}^{+1} \\ \sqrt{2} \sin \vartheta \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{i}{kr} \right) \mathbf{e}^0 \\ -\frac{1-\cos \vartheta}{2} \frac{1}{(kr)^2} \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{kr} e^{-i\varphi}. \quad (2.69)$$

$n=1, m=0$  – вибратор с максимумом излучения вдоль оси  $Z$

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{2i}{kr} + 2 \right) \mathbf{e}^{+1} \\ 2 \cos \vartheta \left( \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right) \mathbf{e}^0 \\ i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \frac{1}{(kr)^2} \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{kr}. \quad (2.70)$$

$n=1, m=-1$  – элемент Гюйгенса с максимумом излучения вдоль оси  $-Z$

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{1-\cos \vartheta}{2} \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{2i}{kr} + 2 \right) \mathbf{e}^{+1} \\ \sqrt{2} \sin \vartheta \left( -\frac{1}{(kr)^2} - \frac{i}{kr} \right) \mathbf{e}^0 \\ \frac{1+\cos \vartheta}{2} \frac{1}{(kr)^2} \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{kr} e^{i\varphi}. \quad (2.71)$$

### 2.5.3. Определение коэффициентов разложения в ряд

Произвольную векторную функцию, удовлетворяющую уравнениям Максвелла, можно представить в виде ряда по сферическим гармоникам векторов Р-З:

$$\mathbf{F}_{\pm}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_n \sum_{m=-n}^n C_{m\pm}^n \mathbf{F}_{m\pm}^n. \quad (2.72)$$

Коэффициенты разложения можно определить несколькими способами в зависимости от поверхности, на которой задаются источники – по касательным составляющие исходного поля на сфере или полю на произвольной поверхности. Полный вывод выражений для обоих случаев приведен в Приложении Г.

В первом случае выражение для коэффициентов разложения на сфере

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{16\pi} \iint_{S_2} (F_{+1} F_{m,+1}^{n*} - F_{-1} F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (2.73)$$

где составляющие сферических гармоник  $F_{m,\pm 1}^{n*}$  определяются согласно (2.64).

В случае определения коэффициентов по полю на произвольной поверхности (например, отражающая поверхность рефлектора) в выражение также входят нормальные составляющие поля [84, 85]

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{8\pi i} \oint_{S_1} (\mathbf{J}, \mathbf{F}_{m\pm}^{n*}) ds. \quad (2.74)$$

Такой метод расчета поля, при котором коэффициенты разложения рассчитываются непосредственно исходя из токов на поверхности излучения, назван Вудом методом согласования с источником излучения [86, 87]. Поверхность, по которой определяются коэффициенты, называется согласующей поверхностью. Метод имеет очевидное преимущество по сравнению с общим разложением на сфере – это возможность напрямую рассчитывать поле, зная токи на поверхности источников, например, рефлекторов в зеркальных и лучеводных системах. Количество учитываемых гармоник в ряде при этом минимально.

Стоит отметить, что ряд сходится в области, внешней по отношению к сфере минимального радиуса, содержащей все источники излучения. Это связано со свойством излучения сферических гармоник. Задача расчета поля в области, внешней по отношению к сфере минимального радиуса, содержащей все источники излучения – внешняя задача. В этом случае в качестве радиальных функций для расчета коэффициентов применяются сферические функции Бесселя, а в искомое разложение входят сферические функции Ханкеля второго рода.

В решении обратной задачи – расчет поля в области, внутренней по отношению к сфере минимального радиуса, содержащей все источники излучения – применяется ряд гармоник, в котором в качестве радиальных функций для расчета коэффициентов применяются сферические

функции Ханкеля второго рода. Такая задача является внутренней. Ряд при этом сходится внутри сферы максимального радиуса, не содержащей источника излучения. Отдельного обсуждения требует выбор необходимого числа членов ряда для его сходимости.

#### 2.5.4. Критерий оценки сходимости – выбора количества членов ряда

Рассчитав коэффициенты разложения поля в ряд и суммируя члены ряда, в определенный момент с увеличением индекса  $n$  ряд начинает расходиться из-за неограниченного увеличения радиальной функции – функции Ханкеля. Это связано с излучением реактивных полей – явлением сверхнаправленности, и вызвано свойствами диаграмм направленности антенн. На практике необходимо оценивать реальные излучаемые поля с какой-то степенью точности. Для этого необходимо ввести критерий ограничения ряда. Общепринятый критерий выбора числа членов ряда, принятый, например, в работах [88, 89]:

- для внешней задачи

$$N = kr_{\min}, \quad (2.75)$$

где  $r_{\min}$  – радиус сферы минимального радиуса, охватывающей все источники.

- для внутренней задачи

$$N = 1.5kr_{\max}, \quad (2.76)$$

где  $r_{\max}$  – радиус сферы максимального радиуса, не содержащей источника излучения.

Иногда к этим выражениям добавляется еще некоторое число членов ряда  $n_1$ , зависящее от необходимой точности и от расположения точек источника относительно центра координат. В книге [87] сформулирован достаточно полный критерий оценки необходимой точности: ряд следует ограничить, если оба последних его члена хотя бы в  $10^{-5}$  раз меньше последней суммы всех составляющих поля. В качестве оцениваемой характеристики берется мощность гармоники:

$$P_m^n = |C_m^n|^2. \quad (2.77)$$

Таким образом, выбор количества членов ряда  $N$ , при котором ряд следует ограничить, записывается следующим образом

$$K_N = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n P_m^n}{\sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=-n}^n P_m^n}; \quad K_{N-1} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=-n}^n P_m^n}{\sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=-n}^n P_m^n}; \quad \begin{cases} K_N < 10^{-5} \\ K_{N-1} < 10^{-5} \end{cases} \quad (2.78)$$

Для вычисления разложения на сфере достаточно применить критерий (2.75), при этом  $r_{\min}$  – радиус сферы разложения. В [90] приведены оценки сходимости для решаемых задач, в целом подтверждающих правильность выбранного критерия, что позволяет взять его за основу для последующих расчетов.

## 2.6 Метод параболического уравнения

В данном разделе будет показано, что решение уравнений Максвелла в свободном пространстве в спиральных координатах сводит векторную задачу к системе двух параболических уравнений, решаемых традиционными способами – преобразованием Фурье. Полный вывод всех выражений представлен в Приложении Д. Итак, ищем решение уравнения Максвелла для вектора Римана-Зильберштейна правой круговой поляризации в виде волны, бегущей в направлении оси  $Z$  с неизвестной «векторной амплитудой». Для декартовых компонент векторной амплитуды получим уравнение:

$$\text{rot } \mathbf{F}_+ - kn\mathbf{F}_+ = 0; \quad (2.79)$$

Расписывая и преобразуя систему в циклических координатах, приходим к системе, в которой продольная составляющая выражается через поперечные:

$$\begin{cases} F_0 = \frac{i}{kn\sqrt{2}} \left( -\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) F_{+1} + \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) F_{-1} \right); \\ \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} -F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix} + ikn \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2ikn} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) & \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.80)$$

Совершим преобразование Фурье по пространственным переменным

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \iint \mathbf{F}(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \Phi(\mathbf{F}(x, y)), \\ \mathbf{F}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \iint \tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta = \Phi^{-1}(\tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta)), \\ \|\mathbf{F}(x, y)\|_{L_2} &= \|\tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta)\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Это позволяет свести систему (2.81) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее полное решение:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{+1}(\xi, \eta, z) &= e^{-z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0), \\ \tilde{F}_{-1}(\xi, \eta, z) &= \frac{-i\rho^2 e^{-2i\varphi}}{2k\sqrt{\rho^2 - k^2} + i(\rho^2 - 2k^2)} e^{z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0), \\ \tilde{F}_0^+(\xi, \eta, z) &= \frac{i\rho e^{-i\varphi}}{k\sqrt{2}} \left( ie^{-z\sqrt{\rho^2 - k^2}} - \frac{\rho^2}{2k\sqrt{\rho^2 - k^2} + i(\rho^2 - 2k^2)} e^{z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \right) \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0). \end{aligned} \quad (2.82)$$

где  $\tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0)$  – преобразование Фурье исходного распределения поля в апертуре. Это точное решение задачи определения поля в пространстве по заданной главной составляющей в апертуре.

Для получения значений решения от координат  $x$ ,  $y$  достаточно совершить обратное преобразование Фурье. В формуле (2.82) использованы прямолинейные циклические координаты. Для решения задач с осесимметричной геометрией (симметричное по  $\varphi$  распределение поля) можно перейти к цилиндрическим циклическим координатам и решать задачу с помощью преобразования Ханкеля.

Пример решения задачи излучения апертуры различными методами – методом ФО, методом собственных функций и методом ПУ приведен в Приложении Е.

## 2.7 Выводы

В данной главе получает развитие теория векторов Р-З. Выводятся общие выражения и тождества электромагнитного поля, представленного векторами, такие как лемма Лоренца, теорема эквивалентности, формула Стрэттона-Чу. Выводятся векторные циклические и спиральные гармоники, являющиеся собственными функциями уравнений Максвелла в соответствующих системах координат. Разработан алгоритм быстрого вычисления сферических функций с применением рекуррентных соотношений и соотношений симметрии. Для метода разложения поля в ряд по собственным волнам в спиральном базисе получены соотношения для расчета коэффициентов непосредственно по составляющим поля на поверхности источника. Это позволяет упростить процедуру расчета полей цепочки рассеивающих поверхностей, например, зеркальных антенн и лучеводов.

Для задач рассеяния на проводящих поверхностях и излучения в свободном пространстве число вычислений интегралов в разложении уменьшается вдвое по сравнению с традиционным разложением на ТЕ и ТМ волны за счет независимости векторов – в расчете можно учитывать лишь поле одного вектора. В наборе векторных сферических гармоник векторов Р-З исключена избыточность за счет отсутствия первой постоянной гармоники, не являющейся диаграммой направленности реальной антенны. Разложение осуществляется непосредственно по сферическим гармоникам, заданным в явном виде, без необходимости введения скалярных гармоник, проведения математических операций дифференцирования над ними и т.д.

Таким образом, преимущества применения векторов Римана-Зильберштейна основаны на двух свойствах:

- 1) независимость векторов в однородном пространстве;
- 2) простое, симметричное и физически ясное разложение векторов Р-З в ряд по векторным сферическим гармоникам в спиральном базисе.

Все вышеперечисленное имеет большой нераскрытый потенциал для задач вычислительной электродинамики. Разработанная теория и методы в последующих главах применяются для высокоточного и эффективного решения задач векторного анализа электромагнитных полей в антеннах и лучеводах.

### Глава 3. Расчет электромагнитных полей апертурных антенн и лучеводах

В третьей главе приведено подробное описание расчета электромагнитных полей некоторых важных задач – излучение зеркальных антенн и распространение полей в лучеводах с учетом кожуха лучевода. Основные задачи, решаемые в рамках работ над главой:

- 1) написание и отработка расчетных алгоритмов в среде MATLAB;
- 2) верификация полученных результатов сравнением с экспериментом;
- 3) сравнение эффективности расчета полей разными методами, обоснование преимуществ применения векторов Р-3 по сравнению с классическим методом описания поля;
- 4) создание метода расчета полей в лучеводах с учетом распространения в кожухе лучевода и отклонения поверхностей зеркал от теоретических.

Излучаемые и рассеиваемые поля рассчитываются численно в терминах векторов Р-3 с помощью двух основных методов – метод ФО и метод собственных функций. Результаты также сравниваются и верифицируются результатами численного моделирования с помощью САПР ANSYS Electromagnetics Suite и Altair FEKO с применением метода конечных элементов, метода интегральных уравнений, метода ФО, а также гибридных методов. Результаты расчета характеристик двухзеркальной антенны подтверждаются экспериментально измерением диаграмм направленности зеркальной антенны. Решение тестовой задачи – излучение поля из апертуры, с сравнением решения разными методами приведено в Приложении 5.

#### 3.1 Характеристики антенн, выраженные через векторы Р-3

При использовании аппарата векторов Р-3 удобно описывать через векторы характеристики антенн, таких как диаграмма направленности по основным поляризациям, коэффициент эллиптичности. Описание векторов в спиральных координатах

$$\mathbf{F}_+ = \begin{pmatrix} F_{+,0} \mathbf{e}^{r+1} \\ F_{+,0} \mathbf{e}^0 \\ F_{+,-1} \mathbf{e}^{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} (F_{\vartheta+} + iF_{\varphi+}) \mathbf{e}^{r+1} \\ F_{r+} \mathbf{e}^0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (F_{\vartheta+} - iF_{\varphi+}) \mathbf{e}^{r-1} \end{pmatrix}; \mathbf{F}_- = \begin{pmatrix} F_{-,0} \mathbf{e}^{r+1} \\ F_{-,0} \mathbf{e}^0 \\ F_{-,-1} \mathbf{e}^{r-1} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

#### Вектор Пойнтинга

Используя определение вектора Пойнтинга, а также правило векторного произведения в спиральных координатах получаем выражение для полезной переносимой сферической волной мощность, выраженной через спиральные компоненты

$$P_{\pm,0} = P_{\pm,r} = \pm \frac{1}{2} \cdot \left( |F_{\pm,+1}|^2 - |F_{\pm,-1}|^2 \right) \quad (3.2)$$

В дальней зоне

$$P_{\pm,0} = P_{\pm,r} = \frac{1}{2} \cdot |F_{\pm,\pm 1}|^2 \quad (3.3)$$

Диаграмма направленности

Комплексная векторная диаграмма направленности антенны

$$\mathbf{F}(\vartheta, \varphi) = F(\vartheta, \varphi) \mathbf{p}(\vartheta, \varphi) e^{j\Phi(\vartheta, \varphi)} \quad (3.4)$$

где  $F(\vartheta, \varphi)$  – амплитудная диаграмма направленности (ДН),  $\mathbf{p}(\vartheta, \varphi)$  – поляризационная диаграмма направленности,  $\Phi(\vartheta, \varphi)$  – фазовая диаграмма направленности. Распишем выражения для амплитудной диаграммы направленности.

- ДН по круговой поляризации

$$F(\vartheta, \varphi)_{LHCP} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (E_\vartheta - jE_\varphi) \right| = \frac{\sqrt{z}}{2} |(F_{+,-1} + F_{-,-1})| = \frac{\sqrt{z}}{2} |F_{-,-1}|$$

$$F(\vartheta, \varphi)_{RHCP} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (E_\vartheta + jE_\varphi) \right| = \frac{\sqrt{z}}{2} |F_{+,+1}| \quad (3.5)$$

- ДН по линейной поляризации

$$F(\vartheta, \varphi)_X = |E_X| = \sqrt{z} (F_{+X} + F_{-X}) = \sqrt{\frac{z}{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi (F_{-,-1} - F_{+,+1}) - i \sin \varphi (F_{-,-1} + F_{+,+1}))$$

$$F(\vartheta, \varphi)_Y = |E_Y| = \sqrt{z} (F_{+Y} + F_{-Y}) = \sqrt{\frac{z}{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi (F_{-,-1} - F_{+,+1}) + i \cos \varphi (F_{-,-1} + F_{+,+1})) \quad (3.6)$$

- ДН по основной и кроссполяризационной составляющим в соответствии с третьим определением Людвига [16]

$$F(\vartheta, \varphi)_{L3X} = |E_\vartheta \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi| = \sqrt{\frac{z}{2}} |(-F_{+,+1} e^{i\varphi} + F_{-,-1} e^{-i\varphi})|$$

$$F(\vartheta, \varphi)_{L3Y} = |E_\vartheta \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi| = \sqrt{\frac{z}{2}} |(F_{+,+1} e^{i\varphi} + F_{-,-1} e^{-i\varphi})| \quad (3.7)$$

Коэффициент эллиптичности просто выражается через спиральные компоненты векторов

$$K = \frac{|E_{II}| - |E_{LI}|}{|E_{II}| + |E_{LI}|}, \begin{cases} E_{II} = E_\vartheta + jE_\varphi \\ E_{LI} = E_\vartheta - jE_\varphi \end{cases} \Rightarrow K = \frac{|F_{+,+1}| - |F_{-,-1}|}{|F_{+,+1}| + |F_{-,-1}|} \quad (3.8)$$

Описание поляризационной и фазовой диаграмм направленности принципиально не отличается от их описания через векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Отметим лишь одну особенность, связанную с возможностью применения свойства независимости. Как известно, в (3.4) векторный сомножитель  $\mathbf{p}(\vartheta, \varphi)$  представляет собой единичный вектор поляризации с двумя компонентами – основной и кроссполяризационной, ориентированными по направлениям базисных ортов

системы координат в случае линейной поляризации. Ортогональность составляющих вектора поляризации следует понимать в смысле независимости переноса мощности излучения каждой из них, что соответствует представлению поля в терминах векторов Р-З. С учетом обозначений вектор поляризации представляется в следующем виде:

$$\mathbf{p}(\vartheta, \varphi) = \alpha(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_{z1} + \sqrt{1 - \alpha^2} e^{i\psi(\vartheta, \varphi)} \mathbf{e}_n \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{e}_{z1}$  – базисный единичный вектор главной поляризации;  $\alpha(\vartheta, \varphi)$  – вещественная положительная функция;  $\mathbf{e}_n$  – базисный единичный вектор паразитной поляризации;  $\psi(\vartheta, \varphi)$  – фазовый сдвиг между составляющими. Рассмотрим 2 основных типа поляризаций и далее приведем обоснование декларируемых выводов.

1. Круговая поляризация. Применение свойства независимости векторов Р-З в этом случае очевидно – если необходимо определить характеристики антенны по основной поляризации, расчет проводится для одного вектора (с учетом изменения направления вращения при отражении от металлической поверхности).

2. Линейная поляризация. Как известно, линейная поляризация есть комбинация двух круговых с одинаковыми амплитудами. Проводя расчет для одного вектора и приравнявая амплитуды векторов  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$ , можно получить результирующее поле по основной линейной поляризации. В разложении на сферические волны это будет эквивалентно инвертированию коэффициентов относительно  $m=0$  со знаком минус. Пример такой задачи с облучателем – пирамидальным рупором рассмотрен в [60].

Кроссполяризационная составляющая излучения зеркальных антенн и лучеводов определяется характеристиками облучателя и самой геометрией оптической системы. Как правило, в зеркальных антеннах и лучеводах стремятся минимизировать уровень кроссполяризации облучателя и приблизить его поляризационные характеристики к поляризационно-чистому облучателю – элементу Гюйгенса, а также проектировать систему так, чтобы минимизировать кроссполяризацию, возникающую при отражении. Таким образом, в большинстве практических случаев достаточно проводить анализ поля в зеркальной и лучеводной системах только по основной составляющей, что позволяет вести расчет одного вектора Р-З, а полей облучателя по обеим ортогональным поляризациям. Если все же необходимо определить уровень излучения кроссполяризации всей системы, можно провести отдельный расчет только побочной составляющей. При этом для определения полного поля любой поляризации в цепочке рассеивающих поверхностей на каждом шаге достаточно проводить расчет разницы векторов ( $\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-$ ) для определения тока на каждом последующем зеркале, что следует из граничных условий.



Рассмотрим пример – излучение зеркальной антенны с облучателем элементарным электрическим диполем. Токи круговых поляризаций определяются как  $\mathbf{J}_{\pm} = \pm[\mathbf{n}, \mathbf{F}_{\pm} - \mathbf{F}]$ , они равны по амплитуде и противоположны по знаку. На рис. 3.1 изображены диаграммы направленности антенны диаметром  $4\lambda$  для двух облучателей – элементарный диполь, и система двух диполей с токами  $\mathbf{j}_1 = \mathbf{e}_y$ ;  $\mathbf{j}_2 = 0.5e^{i\pi/2}\mathbf{e}_x$ , излучающая поле эллиптической поляризации. Расчеты проведены методом ФО в FEKO и методом ФО для векторов P-3 по формуле (9) с расчетом для одного и двух векторов. На рис. 3.1 (а) изображены расчетные ДН линейной поляризации в соответствии с (3.6), для одного вектора ДН определена приравниванием амплитуд векторов; на рис. 3.1 (б) – ДН поля двух круговых поляризаций.

В обоих случаях для определения ДН по основной составляющей достаточно проводить расчет одного вектора, что упрощает задачу и позволяет экономить расчетное время, как видно из таблицы 3.1 сравнения расчетного времени. В таблице большее расчетное время FEKO связано не с преимуществом расчета векторами P-3, а с особенностями самих расчетных алгоритмов.

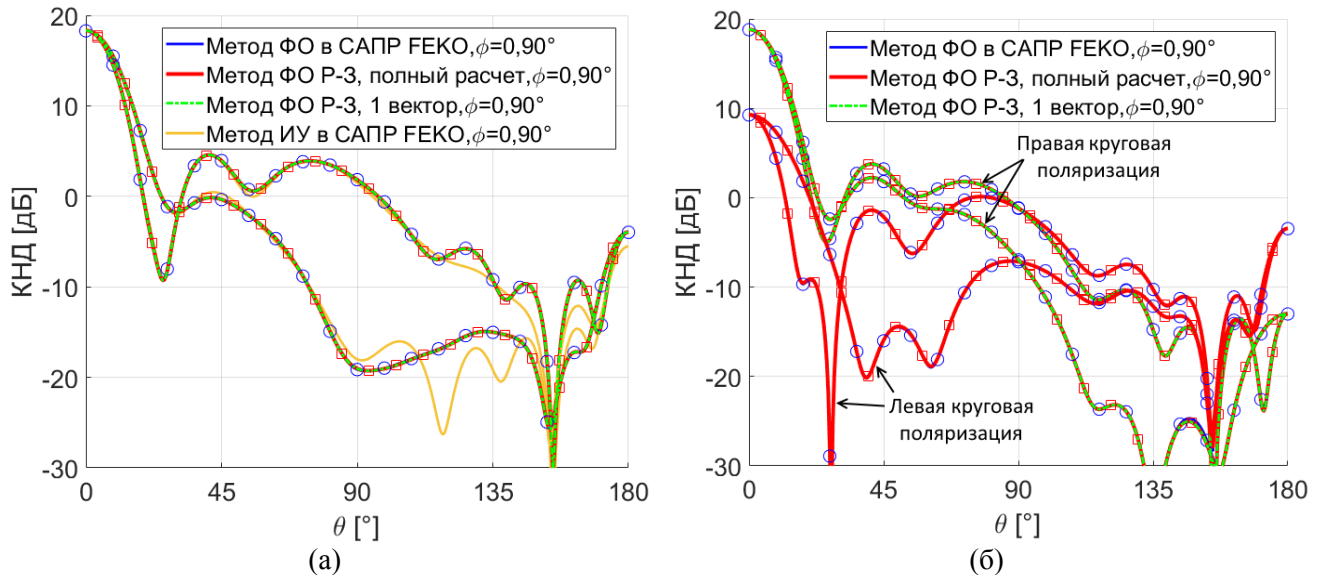


Рис. 3.1. Диаграммы направленности зеркальной антенны диаметром  $D=4\lambda$ ,  $F/D=0.357$ , с элементарным облучателем. Линейная поляризация (а); эллиптическая поляризация (б).

Таблица 3.1. Время расчета зеркальной антенны с элементарным облучателем.

Диаметр зеркала	FEKO, метод ФО	Метод ФО для P-3 (полный), метод ФО для вekt. <b>E</b> и <b>H</b>	Векторы P-3, метод ФО (1 вектор)
$4\lambda$	4.2с	1.4с	1.2с
$10\lambda$	13.7с	3.5с	2.7с
$20\lambda$	49.8	8.5с	6с
$40\lambda$	206с	35с	23.7с
$230\lambda$	3952с	386с	252с

### 3.2 Расчет характеристик двухзеркальной антенны

В данном разделе приведен классический пример задачи анализа антенной системы – расчет и оценка эффективности двухзеркальной 9-метровой антенны Кассегрена, работающей одновременно в С и Ku-диапазонах частот. В [74, 90] приведены примеры расчета однозеркальной и двухзеркальной антенны и оценки КИП с учетом основных составляющих. В данном разделе подробно описывается алгоритм, уточняется методика оценки КИП, оценивается расчетное время, результаты расчета сравниваются с экспериментом [91]. Цель данного расчета – разработка и отладка расчетных алгоритмов, оценка возможности решения практических задач с применением одного вектора Р-3 и уточнение оценки коэффициента  $K_{\text{СКО}}$  – получение методики численного расчета характеристик антенн с учетом неидеальностей зеркал, применимой в дальнейшем к расчету лучевода и определения требований к производству.

Полученные в рамках решения задачи алгоритмы внедрены и активно применяются в процессе разработки зеркальных антенн АО «ОКБ МЭИ» в тех случаях, когда на этапе проектирования необходимо оценивать эффективность больших зеркальных антенн и, при необходимости, скорректировать параметры системы. Основные параметры двухзеркальной антенны, изображенной на рис. 3.2, сведены в таблицу 3.2.

Таблица 3.2. Основные параметры двухзеркальной антенны.

Параметр	Значение
Двухзеркальная система	Оптическая схема – двухзеркальная Кассегрена, диаметр главного зеркала $D=9\text{м}$ , диаметр контррефлектора $d=1\text{м}$ , $F/D=0.357$ , расстояние между фокусами $1.556\text{м}$
Частоты	С-диапазон: $f=3.8\text{ГГц}$ ; Ku-диапазон: $f=11.7\text{ГГц}$
Поляризация	С-диапазон: круговая; Ku-диапазон: линейная
СКО	Рефлектор: $0.7\text{мм}$ , контррефлектор: $0.25\text{мм}$

В качестве облучателя применяется трехсекционный рупор с изломом образующей с симметричной диаграммой направленности, излучающий в С-диапазоне левую круговую поляризацию, в Ku-диапазоне линейную поляризацию (рис. 3.2 (б)). Ku-диапазон возбуждается непосредственно волноводной секцией в основании рупора, для возбуждения С-диапазона применяются специальные секции с щелями в стенках рупора. Часть облучателя, состоящая из ломанного профиля, была рассчитана и оптимизирована в составе двухзеркальной антенны с применением стандартной программы, разработанной Коганом Б.Л. в АО «ОКБ МЭИ». Целиком облучатель был рассчитан и оптимизирован с помощью программ трехмерного электродинамического моделирования с расчетом численными методами.

При создании математической модели используются некоторые допущения, отличающие модель от реальной задачи, и являющиеся источниками погрешности. Основные из них:

- поверхности зеркал и рупора – идеальный металл, омические потери рассчитываются по граничным условиям Леонтовича-Щукина;
- поверхностный ток рассчитывается в приближении физической оптики;
- не учитываются вторичные переотражения;
- не учитываются конструктивные элементы рупора – стыки секций, секции возбуждения, герметизирующая пленка, элементы защиты от птиц (будут показаны далее);
- учет затенения поверхности зеркала контррефлектором и опорами осуществляется в геометрооптическом приближении.

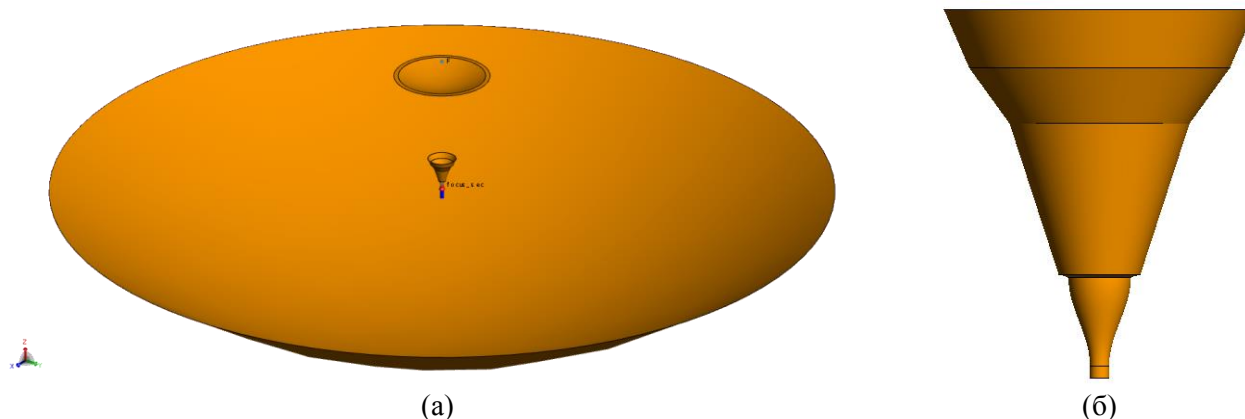


Рис. 3.2. К расчету двухзеркальной антенны. Модель антенны с облучателем в САПР (а); модель облучателя (б).

Искажения, возникающие из-за наличия конструктивных элементов рупорного облучателя, являются одним из факторов, приводящим к отличию измеренных характеристик от расчетных. Последнее приближение – учет затенения в ГО приближении, также является источником погрешности. Более строгий метод учета затенения описан, например, в [92] и включает вычисление затенения и рассеяния в приближении ФО. Существуют методы оптимизации конструкции опор, как показано в [93]. Как показывает практика, геометрическая оптика дает довольно точный результат оценки учета затенения, особенно на высоких частотах, в связи с чем в рамках приведенного анализа ее применение допустимо.

### 3.2.1. Векторный расчет

Весь процесс расчета можно условно разделить на 3 этапа – расчет полей облучателя, расчет полей контррефлектора и расчет полей рефлектора.

Для решения электродинамической задачи необходимо задание сторонних токов – исходного поля, и граничных условий. Задача возбуждения рупора в рамках работы не рассматривается, так как нам интересно излучение и распространение волн в свободном пространстве и рассеяние на проводящих поверхностях. В связи с этим рупор рассчитывается строгими численными методами в программе трехмерного электродинамического моделирования (Altair FEKO), его ближнее поле сохраняется в файл для дальнейшей обработки.

Отметим, что применение векторов Р-З за счет их независимости позволяет получить более простое описание поля, например, излучаемое гофрированным рупором. Задание исходного поля рупора для возбуждения токов рефлекторов возможно заданием значений поля на сфере (численно, экспериментально) или поля в апертуре. Основные шаги расчета:

- 1) Расчет поля рупора.
  - 1.1. Расчет поля на сфере в ФЕКО, перевод в спиральные координаты;
  - 1.2. расчет коэффициентов разложения поля рупора на сфере.
- 2) Расчет наведенных токов на поверхности контррефлектора.
  - 2.1. Суммирование ряда векторных сферических гармоник по полученным коэффициентам - расчет поля на контррефлекторе;
  - 2.2. перевод составляющих поля в декартовы координаты;
  - 2.3. применение ГУ (расчет поверхностных токов в декартовых координатах).
- 3) Расчет полей контррефлектора.
  - 3.1. Смещение центра координат в вершину контррефлектора;
  - 3.2. расчет коэффициентов разложения поля контррефлектора.
- 4) Расчет токов на основном зеркале.
  - 4.1. Суммирование ряда гармоник на зеркале от контррефлектора с центром координат в вершине контррефлектора, перевод в декартовы координаты;
  - 4.2. суммирование ряда гармоник от рупора с центром координат в фазовом центре рупора, перевод в декартовы координаты;
  - 4.3. суммирование полученных полей, применение ГУ и расчет поверхностных токов в декартовых координатах.
- 5) Расчет полей рефлектора.
  - 5.1. Смещение центра координат в вершину рефлектора;
  - 5.2. расчет коэффициентов разложения поля рефлектора.
- б) Расчет поля в ДЗ.
  - 6.1. Суммирование ряда гармоник в ДЗ от рефлектора;
  - 6.2. суммирование ряда гармоник в ДЗ от контррефлектора с центром координат в вершине контррефлектора, умножение на множитель  $e^{ik(F-(c-a))\cos\theta}$ ;
  - 6.3. суммирование ряда гармоник в ДЗ от рупора с центром координат в вершине рупора, умножение на множитель  $e^{ik(F-2c)\cos\theta}$ ;
  - 6.4. суммирование полученных полей.

Блок-схемы расчетных алгоритмов в среде MATLAB изображены на рис. 3.3. На рис. 3.3 (а) – блок-схема расчета разложения в ряд поля источника, на рис. 3.3 (б) – вычисление поверхностного тока и коэффициентов разложения по полю контррефлектора. Для расчета полей

рефлектора к последнему циклу также добавляются циклы по сферическим гармоникам рупора и контррефлектора. Такие схемы универсальны и распространяются на решение других задач.

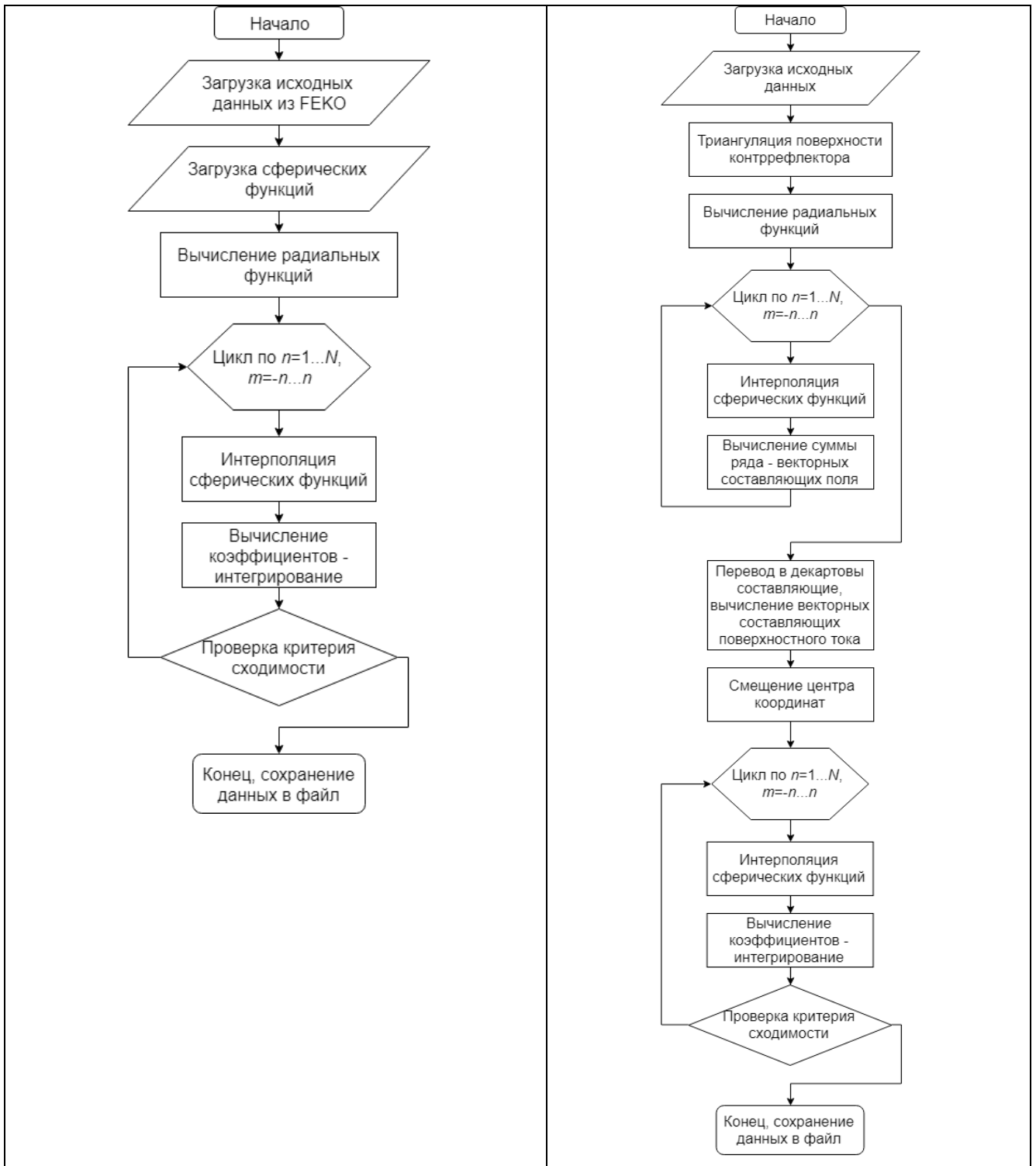


Рис. 3.3. Блок-схемы расчетных алгоритмов. Расчет разложения поля рупора в ряд (а); расчет поверхностного тока и разложения методом МСИ (б).

С целью верификации результатов проводится расчет двухзеркальной системы в FEKO, для которого также применяются некоторые допущения. В связи с невозможностью точного повторения расчета, связанного с тем, что FEKO плохо работает с возбуждением источниками ближнего поля, для расчета полей рассеяния на контррефлекторе применяется метод ИУ (метод

MLFMM) с сохранением дальнего поля, для расчета полей рефлектора применяется метод ФО с возбуждением сохраненных полей источником дальнего поля.

Результаты каждого шага расчета представлены ниже.

### 1) Расчет поля рупора

Результаты расчетов ближнего поля в ФЕКО представлены на рис. 3.4. Для дальнейшей обработки и пересчета полей необходимо извлечь из программы полученные результаты – векторные составляющие поля на сфере, и далее разложить поле в ряд по тангенциальным составляющим на сфере. Сходимость ряда показана на рис. 3.5. Отметим, что в качестве исходного поля можно брать составляющие поля в апертуре и рассчитывать разложение методом согласования с источником, что позволяет несколько уменьшить объем задачи, однако ухудшает точность за счет неполного учета токов затекания на внешнюю поверхность рупора.

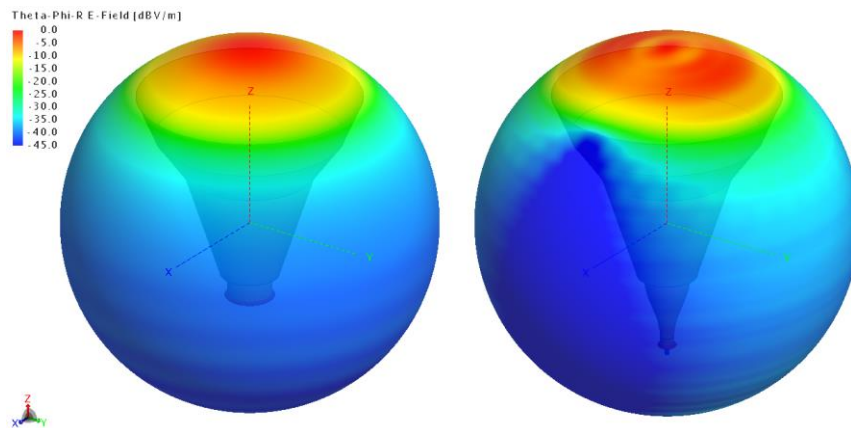


Рис. 3.4. Модуль ближнего поля рупора на сфере в С и Ku-диапазонах.

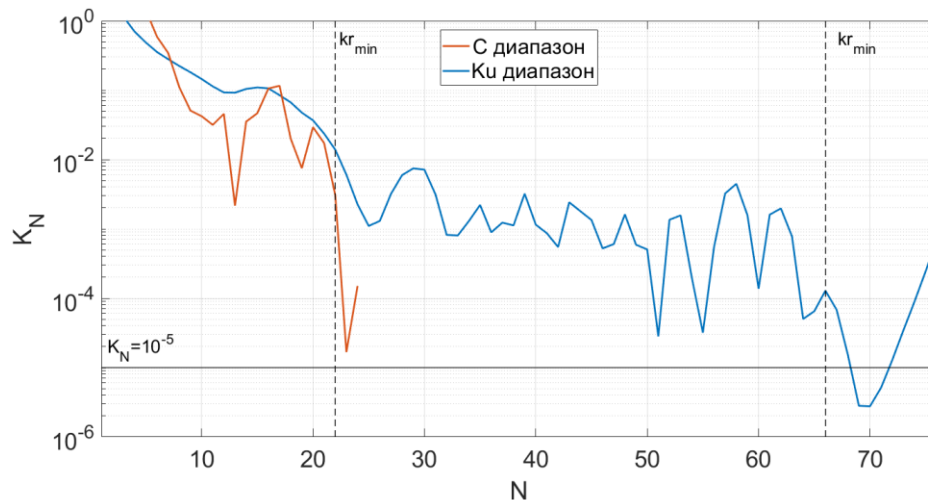


Рис. 3.5. Оценка сходимости ряда в разложении поля рупора на сфере.

Для проверки правильности разложения проведено сравнение результатов расчетов диаграмм направленности, полученных суммированием ряда гармоник, с ДН, полученными методом ИУ в ФЕКО. В С-диапазоне ДН по круговым поляризациям получают непосредственно из векторов Р-З в соответствии с (3.5), в Ku-диапазоне ДН по основной и кросс поляризации определяются в соответствии с третьим определением Людвига (3.7) (рис. 3.6).

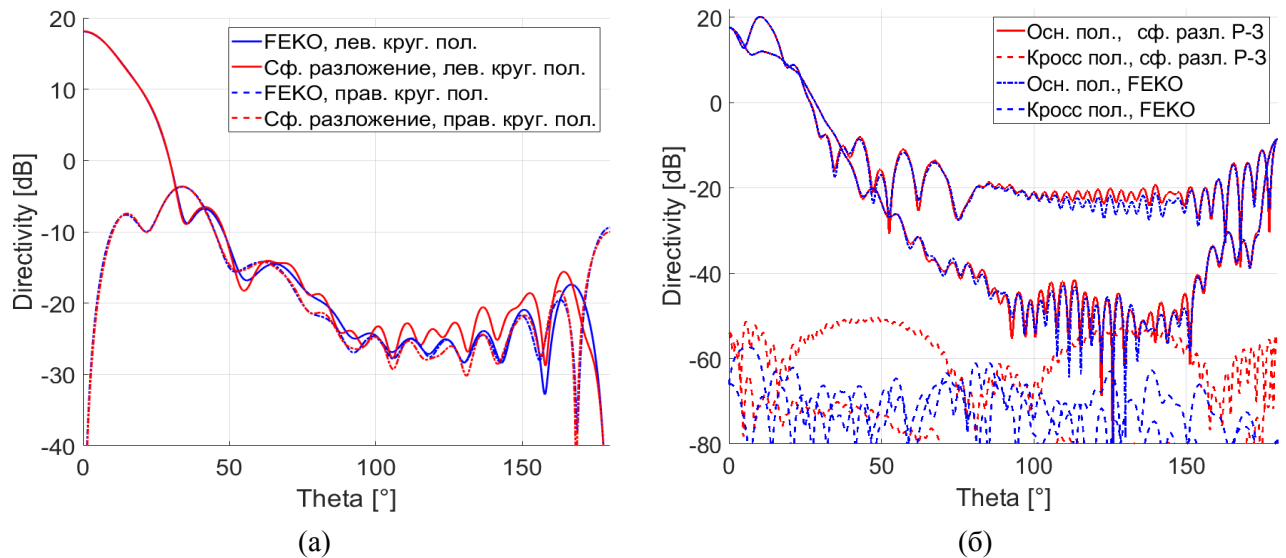


Рис. 3.6. Расчетные ДН рупора в двух плоскостях по основной и кроссполаризационной составляющим, полученные численными методами в FEKO и методом разложения поля в ряд. ДН по круговым поляризациям в С-диапазоне (а); ДН по линейным поляризациям в Ку-диапазоне (б).

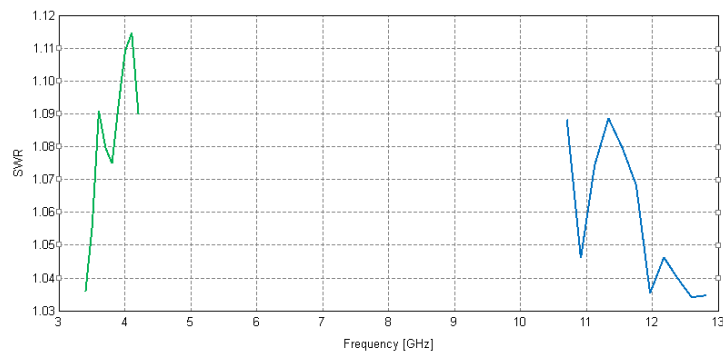


Рис. 3.7. Расчетный КСВН рупора.

## 2) Расчет наведенных токов на поверхности контррефлектора

Как было показано в разделе 3.1, в тех случаях, когда отсутствует необходимость определения кроссполаризационной составляющей, можно проводить все расчеты только для одного вектора, соответствующего основной составляющей. При этом в оценке характеристик антенны будут автоматически учтены потери на кроссполаризацию.

По полученным коэффициентам рассчитываются составляющие поля и поверхностного тока на поверхности контррефлектора. На рис. 3.8 показаны амплитуды спиральных составляющих тока одной круговой поляризации, так как в соответствии с ГУ амплитуды векторных составляющих токов ортогональных поляризаций равны.

При падении основной составляющей левой круговой поляризации  $F_{-,1}$  возбуждаются составляющие тока  $J_{-,1}$  и  $J_{+,1}$ , поля которых имеют противоположное направление распространения.  $J_{-,1}$  является компонентой падающей волны,  $J_{+,1}$  – отраженной от поверхности рефлектора волны, распространяющейся в сторону увеличения координаты  $r$ . Таким образом, энергия волны левой круговой поляризации переходит в энергию волны правой круговой поляризации. При падении независимых двух волн круговых поляризаций происходит «обмен» энергиями волн.

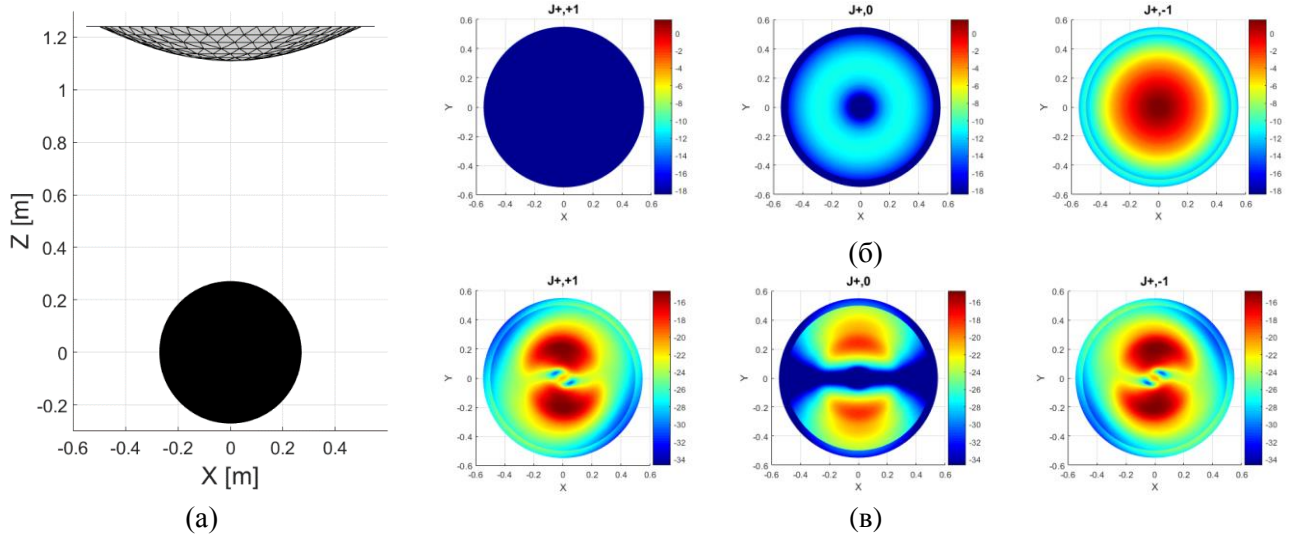


Рис. 3.8. Расчет токов на поверхности рефлектора. Геометрия задачи (а); спиральные составляющие тока в С-диапазоне (б); в Ку-диапазоне (в).

### 3) Расчет полей контррефлектора

Смещаем центр координат, рассчитываем коэффициенты разложения в ряд по токам на поверхности контррефлектора. Геометрия задачи и сходимость ряда изображена на рис. 3.9 (а).

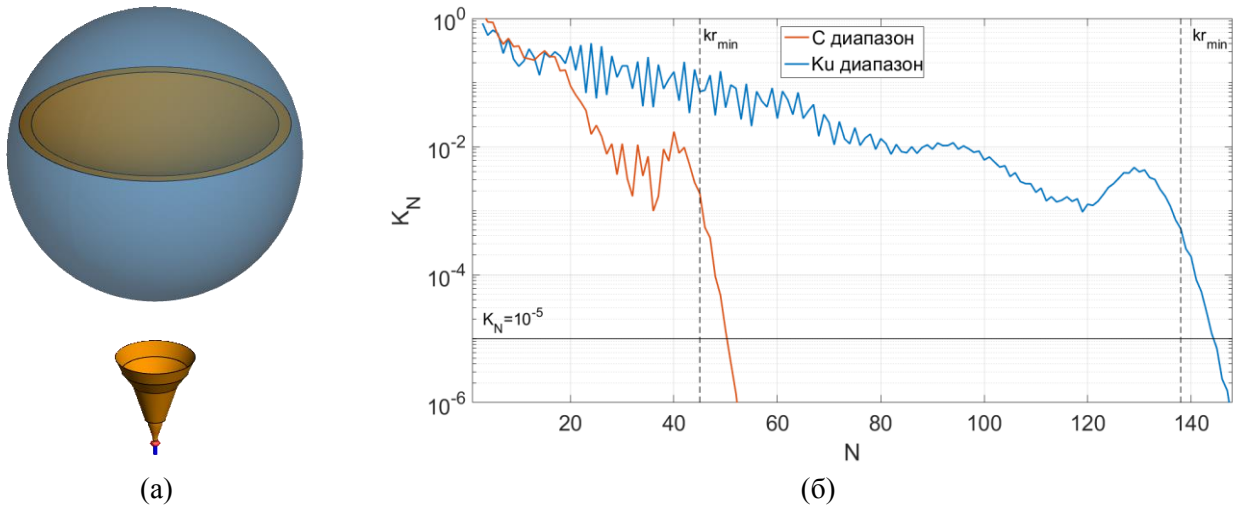


Рис. 3.9. Определения поля контррефлектора. Геометрия задачи (а); Оценка сходимости ряда в разложении поля контррефлектора (б).

Результаты расчета векторных составляющих на сфере в ближней зоне методом ИУ в ФЕКО, по формуле Стрэттона-Чу и методом собственных функций с определением токов в приближении ФО для векторов Р-З с расчетом лишь одного вектора представлены на рис. 3.10. За пределами переднего излучения (отраженное поле от контррефлектора при  $\theta=180^\circ$ ) имеется расхождение результатов, вызванное неучтенным вторым вектором Р-З. Однако далее будет показано, что это отличие несущественно в дальней зоне.



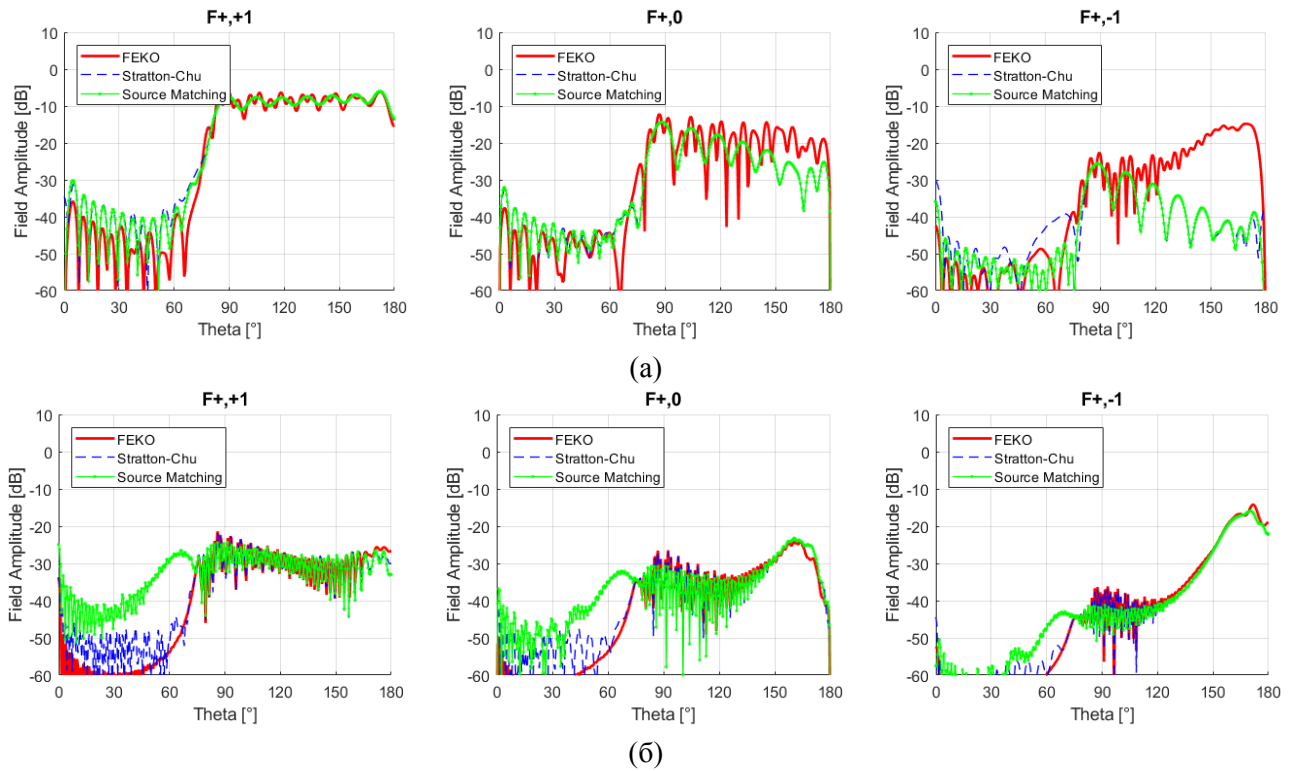


Рис. 3.10. Векторные составляющие на сфере  $7.6\lambda$  в БЗ. Представлены расчеты методом ИУ в FEKO (красные линии), по формуле Страттона-Чу (синие линии), методом собственных функций (зеленые линии). С-диапазон (а); Ku-диапазон (б).

#### 4) Расчет токов на основном зеркале

Получив последовательно коэффициенты разложения полей облучателя и контррефлектора, можно определить поверхностные составляющие тока главного зеркала.

Поле на поверхности рефлектора рассчитывается как сумма полей от токов контррефлектора и поля рупора в своих системах координат (рис. 3.11)

$$\mathbf{F}_{\pm \text{пов. рефл}} = \mathbf{F}_{\pm \text{контррефл}} + \mathbf{F}_{\pm \text{рун}} \quad (3.10)$$

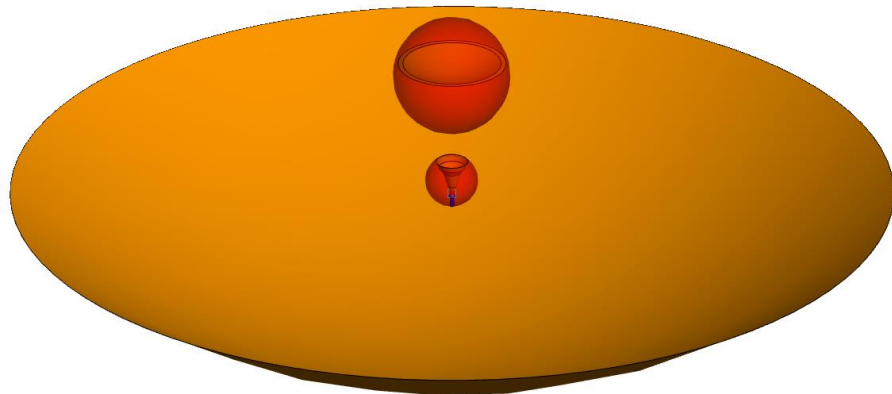


Рис. 3.11. Геометрия задачи расчета суммарного поля двухзеркальной антенны.

Из распределений составляющих поверхностного тока (рис. 3.12) видно, что края рефлектора облучаются по уровню минус 13 – минус 18 дБ.

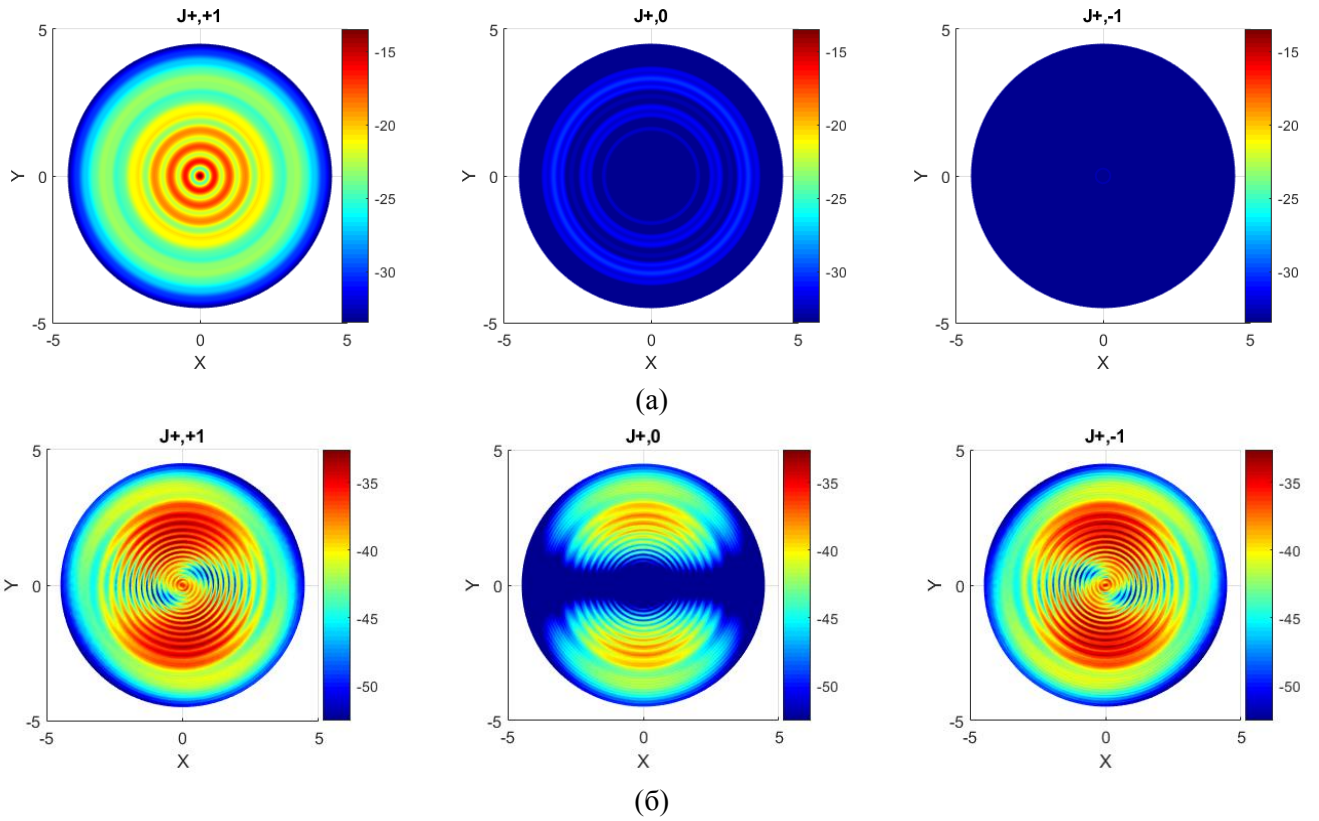


Рис. 3.12. Векторные составляющие тока рефлектора. С-диапазон (а); Ku-диапазон (б).

### 5) Расчет полей рефлектора

Смещаем центр координат, рассчитываем коэффициенты. Суммарное поле рассчитывается как сумма полей от токов рефлектора и поля рупора в соответствующих системах координат

$$\mathbf{F}_{\pm\Sigma} = \mathbf{F}_{\pm\text{рефл}} + \mathbf{F}_{\pm\text{контррефл}} + \mathbf{F}_{\pm\text{руп}} \quad (3.11)$$

В дальней зоне при сложении полей необходимо ввести дополнительный фазовый множитель, учитывающий разность хода лучей источников из разных точек (центры координат в сферических разложениях):

$$\mathbf{F}_{\pm\Sigma} = \mathbf{F}_{\pm\text{рефл}} + \mathbf{F}_{\pm\text{контррефл}} e^{ik(F-(c-a))\cos(\theta)} + \mathbf{F}_{\pm\text{руп}} e^{ik(F-2c)\cos(\theta)} \quad (3.12)$$

Результирующие расчетные ДН приведены на рис. 3.13. Представлены расчеты методом ФО в FEKO, ФО и методом собственных функций для векторов Р-3. Пунктирными линиями обозначены диаграммы с учетом одного вектора Р-3. Имеется небольшое отличие в боковых лепестках, однако в целом результаты близки.

Результаты расчета характеристик антенны – коэффициента усиления и КИП разными методами сведены в таблицу 3.3. В соответствии с описанным в главе 1 подходом к оценке составляющих КИП, в приведенном расчете учтены составляющие – апертурный КИП; коэффициент, определяющий долю мощности, попадающую на облучаемое зеркало; коэффициент, определяющий дифракционные потери; коэффициент кроссполяризации.

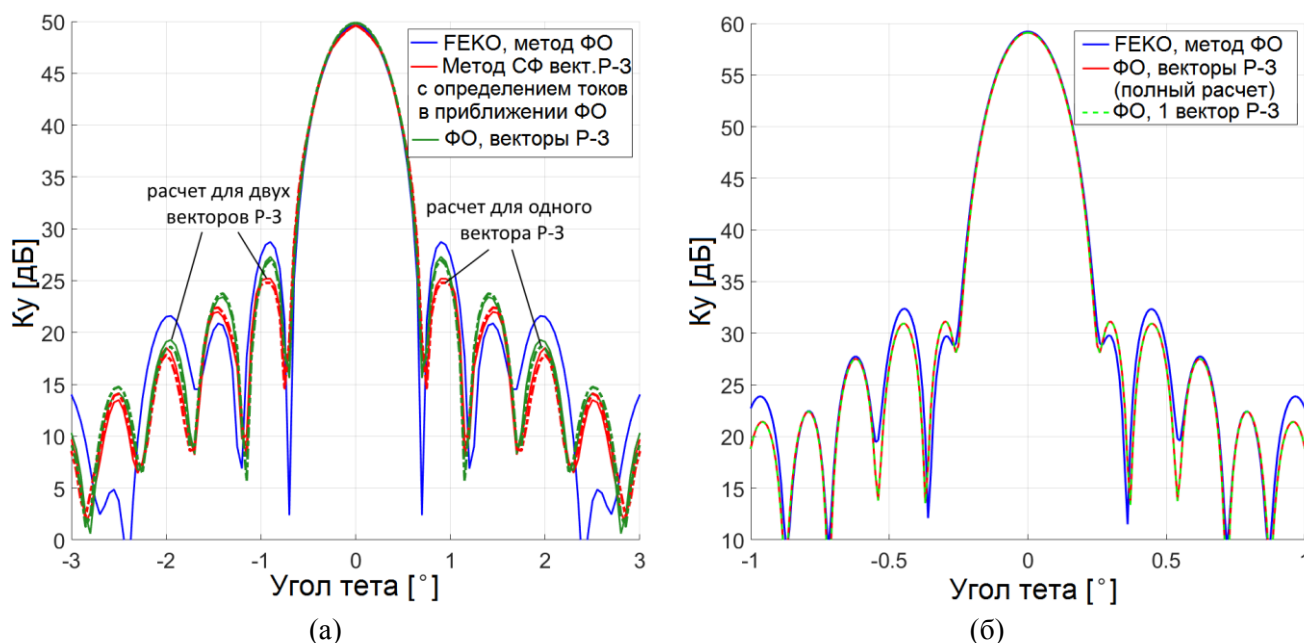


Рис. 3.13. Сравнение расчетных ДН антенны. С-диапазон, расчет в FEKO (синий цвет), расчет методом собственных функций векторов P-3 (красный цвет) и методом ФО для векторов P-3 (зеленый цвет) (а); Ku-диапазон, расчет в FEKO (синий) и расчет методом ФО – полный расчет двух векторов P-3 (красный цвет) и расчет с учетом 1 вектора P-3 (зеленый цвет) (б).

Таким образом, в таблице не учтены лишь затенение апертуры главного рефлектора конструкциями вторичной системы, СКО профилей зеркал и омические потери. Эти составляющие КИП учитываются далее.

Таблица 3.3. Результаты расчета характеристик антенны разными методами.

Метод \ Параметр	С-диапазон				Ku-диапазон			
	Полный расчет		Расчет 1 вектора		Полный расчет		Расчет 1 вектора	
	$K_u$	КИП	$K_u$	КИП	$K_u$	КИП	$K_u$	КИП
FEKO, метод ИУ + метод ФО	49.619	0.7132	-	-	59.204	0.6837	-	-
Векторы P-3, метод СФ с определением токов в ФО пригл.	49.606	0.7110	49.622	0.7137	-	-	-	-

Анализируя таблицу, отметим, что расчеты методом ФО в FEKO и МСФ для векторов P-3 практически совпадают.

Также с целью оценки вычислительной эффективности разработанных алгоритмов было проведено сравнение расчетного времени для всех случаев – расчет в FEKO, расчет методом МСФ и ФО для одного/двух векторов P-3 (таблица 3.4). Сравнение с FEKO является условным, так как провести расчеты идентичными методами и с одинаковыми допущениями в FEKO и с применением разработанных алгоритмов не представляется возможным. Однако, опираясь на разницу в расчетном времени, можно сделать вывод о применимости того или иного подхода для решения определенных задач. Невозможность строгого сравнения вызвана следующими факторами:

- различные алгоритмы матричных вычислений (например, в ФЕКО реализован метод MLFMM, являющийся математическим алгоритмом, значительно ускоряющим расчеты для метода ИУ);
- для векторов P-3 основное время занимает интерполяция сферических функций. Это вызвано тем, что по разработанному алгоритму функции рассчитываются на равномерной сетке и сохраняются в файл, далее их необходимо интерполировать для получения значений в точках с требуемыми  $\theta$ ;
- сложность работы ФЕКО с источниками ближнего поля (например, возбуждение сферическим источником ближнего поля с числом точек  $361 \times 361$  занимает 3-4 дня).

Таблица 3.4. Сравнение расчетного времени анализа двухзеркальной антенны.

Метод		ФЕКО	Расчет для двух векторов	Расчет для одного вектора
Общее расчетное время	C-диапазон	695с	803с	433с
	Ku-диапазон	2580с	6768с	4076с

Главный вывод из такого сравнения – возможность экономии расчетного времени и ресурсов в случае расчета для одного вектора P-3, что позволяет для более сложных задач повысить эффективность расчета, то есть экономить время и проводить комплексный расчет с учетом факторов, приближающих модель к реальной. В дальнейшем возможно оптимизировать процесс расчета сферических функций более эффективной интерполяцией или интеграцией вычисления сферических функций в сам алгоритм. Методы вычислительной электродинамики векторов P-3 можно интегрировать в существующие САПР, обладающие мощными вычислительными инструментами. При анализе сложных рассеивающих структур, таких как многозеркальные лучеводы, гибкость полученного алгоритма и уменьшение расчетного времени с возбуждением источниками ближнего поля позволило провести векторный расчет для задачи, расчет которой в ФЕКО требует огромные ресурсы, а в других САПР невозможен.

### 3.2.2. Оценка составляющих КИП и влияния неидеальностей зеркал

В соответствии с описанной в Главе 1 методикой можно расчетным способом оценить составляющие коэффициента использования поверхности. Полный КИП определяется выражением  $K_{\Sigma} = K_{an} K_{пер} K_{диф} K_{кросс} K_{зам} K_{ном} K_{СКО}$ . Составляющие  $K_{an}$ ,  $K_{пер}$ ,  $K_{диф}$ ,  $K_{кросс}$  определяются векторным расчетом и учтены в вышеприведенной оценке. Чем точнее применяемый метод расчета – тем точнее будет оценка. Составляющая  $K_{ном}$  включает в себя диссипативные потери на поверхностях зеркал и потери в облучающей системе, которые в свою очередь включают потери в ВЧ-тракте от облучателя до МШУ и потери в рупоре (омические и рассогласование), а также потери в металле на зеркалах. Потери в облучающей системе определяются экспериментально. Расчет омических потерь на металлических зеркалах осуществляется с

помощью граничных условий Леонтовича-Щукина – путем определения тангенциальной составляющей магнитного поля и интегрирования по поверхности металла

$$P_{nom} = \frac{Z_{мет}}{2Z_0} \int_S |H_\tau|^2 ds; \quad Z_{мет} = \sqrt{\frac{2\pi f \mu_0}{2\sigma_{мет}}} (1+i). \quad (3.13)$$

Коэффициент снижения эффективности за счёт затенения апертуры главного зеркала контррефлектором, верхним опорным узлом, опорами и, возможно, облучателем в геометрооптическом приближении может быть вычислен по формуле:

$$K_{зат} = \left( 1 - \frac{S_{оп} + S_{контр}}{S_{ап}} \right)^2, \quad (3.14)$$

где  $S_{оп}$  – площадь затенения опорами вторичной системы,  $S_{контр}$  – площадь апертуры контррефлектора,  $S_{ап}$  – геометрическая площадь апертуры главного зеркала. Более общий (не геометрооптический) случай оценки затенения апертуры зеркальной антенны рассмотрен в [92]. При расчете характеристик 32-метровой антенны в главе 4 учет затенения контррефлектором производится путем «вырезания» из поверхности рефлектора области, соответствующее проекции контррефлектора. Такой подход, как показала практика, дает достаточно точный результат. Таким же образом возможно учитывать затенение опорами контррефлектора.

Теперь подробно остановимся на потерях из-за отличия профиля главного зеркала от теоретического. Как правило, снижение максимума коэффициента усиления оцениваются по известной формуле Рузе [94, 95, 96]:

$$K_{СКО} = \exp\left(-\left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda}\right)^2\right), \quad (3.15)$$

в которой  $\sigma$  – суммарное среднеквадратическое отклонение (СКО) профилей зеркал антенны от теоретических. Обычно суммарное СКО учитывает погрешности профилей зеркал, возникающие на этапах изготовления, монтажа и в процессе эксплуатации, под действием веса, ветра и изменения температурного режима. Для инженерной оценки СКО двухзеркальной антенны часто применяют формулу  $\sigma = \sqrt{\sigma_{рефл}^2 + \sigma_{контр}^2}$ , где  $\sigma_{рефл}$  и  $\sigma_{контр}$  – СКО профилей контррефлектора и главного зеркала соответственно.

Такой подход оценки вклада СКО профилей зеркал в КИП основан на вычислении фазовых искажений в апертуре зеркала в геометрооптическом приближении. Учитывая случайное изменение длины пути прохождения излучаемой мощности к раскрыву, получают приближенное среднеквадратичное значение случайной фазовой ошибки в раскрыве. Общее выражение для усредненного  $K_u$  из теоретической модели, полученной Рузе

$$\langle G(\vartheta, \varphi) \rangle = G_0(\vartheta, \varphi) e^{-\sigma^2} + \left( \frac{4\pi l}{\lambda} \right)^2 e^{-\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}}{n \cdot n!} e^{-(2\pi l \sin \vartheta / \lambda)^2 / n}, \quad (3.16)$$

где  $2l$  – расстояние корреляции. С учетом корреляции  $K_{CKO}$

$$K_{CKO} = \exp \left( - \left( \frac{4\pi \sigma_{CKO}}{\lambda} \right)^2 \right) \left( 1 + \frac{1}{K_{an}} \left( \frac{4l}{D} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} \left( \frac{4\pi \sigma_{CKO}}{\lambda} \right)^{2n} \right) \quad (3.17)$$

Для поверхностей с гауссовым законом распределения можно ввести гауссову либо экспоненциальную функцию корреляции

$$C(\rho) = e^{-\rho^2/l^2}; \quad C(\rho) = e^{-\rho/l}. \quad (3.18)$$

Из выражения (3.17) для достаточно гладких рефлекторов получается связь между СКО фазовых искажений и СКО поверхности зеркала  $\sigma = 4\pi \sigma_{\text{рефл}} / \lambda$ , и для малых интервалов корреляции получается выражение (3.15).

Не смотря на наличие такого простого и широко применяемого способа оценки, в процессе разработки и измерения характеристик зеркальных антенн возникла задача уточнения формулы (3.15). Необходимость такого анализа вызвана следующими причинами:

- 1) традиционное несоответствие реальных измеренных значений КИП значениям, полученным по формуле Рузе, и отсутствие других более точных способов оценки;
- 2) отсутствие обоснованных методов оценки влияния СКО контррефлектора двухзеркальной антенны и зеркал лучевода на их характеристики.

Наиболее полное исследование влияния случайных отклонений профилей рефлекторов на параметры зеркальных антенн приведено в [97]. Автор моделирует поверхность со случайным гауссовым законом распределения с заданными СКО и радиусом корреляции. На идеальный профиль параболоида накладывается искаженная поверхность, имеющая гауссов закон распределения. Статистическая обработка ведется методом Монте-Карло. Для расчета диаграмм направленности искаженных профилей автор применяет методы физической и геометрической оптики, и сравнивает полученные результаты с классической теорией на основе теории Рузе. Полученные автором результаты:

- с увеличением СКО уменьшается максимальный КНД антенны по основной поляризации, уровень боковых лепестков и кроссполяризация увеличиваются;
- ширина диаграммы направленности не имеет однозначных признаков деградации – ДН может как расширяться, так и сужаться;
- в целом, расчеты по классической теории Рузе дают большую деградацию ДН антенн по сравнению с расчетом по методике создания модели искаженной поверхности рефлектора и расчета методом ФО.

Главный недостаток этой работы заключается в том, что расчет проводился для однозеркальной антенны. В рамках работы над диссертацией была также создана программа моделирования отклонений профилей зеркал от теоретических на основе разработанных ранее алгоритмов векторного расчета полей с применением векторов Р-З. Это было сделано с целью решения следующих задач:

1) Оценка реального вклада искажений профилей рефлекторов в эффективность разрабатываемых зеркальных антенн. Внедрение метода оценки КИП в инженерный процесс разработки новых антенн АО «ОКБ МЭИ».

2) Создание алгоритма оценки функционирования изготовленных образцов антенн с профилями, измеренными геодезическими методами. Становится возможным «загрузить» измеренное облако точек в программу, подобрать параболоид наилучшего приближения и оценить диаграммы направленности.

3) Оценка вклада случайных отклонений профилей зеркал лучевода в эффективность больших зеркальных антенн ДКС, определение требований к точностям радиоотражающих поверхностей зеркал (приведено в главе 4).

Решение третьей задачи оценки влияния СКО зеркал лучевода в известной литературе не описывалось. Применяемый в данной работе подход схож с тем, что использовал автор в [97]. Однако применяется более строгий метод расчета поля – разложение в ряд по сферическим волнам, и для двухзеркальных антенн учитываются отклонения профилей как рефлектора, так и контррефлектора от теоретических.

Для решения первой и третьей задач необходимо создавать модель радиоотражающей поверхности рефлектора с искажениями профиля, подчиняющимся гауссову закону распределения с заданной функцией корреляции. В качестве исходных параметров задаются исходная поверхность, СКО нормального закона распределения, вид закона корреляции (гауссов или экспоненциальный) и радиус корреляции. Для этой задачи в среде MATLAB разработана специальная программа, моделирующая триангулированную поверхность с гауссовым законом распределения и определенной функцией корреляции. Далее, получив искаженный профиль с заданными параметрами, проводится расчет поверхностного тока в приближении ФО, определение коэффициентов разложения в ряд методом согласования с источником или расчет необходимого поля напрямую с помощью интеграла Кирхгофа.

Серия таких расчетов была проведена для исследуемой 9-метровой двухзеркальной антенны. В связи с отсутствием данных (облака точек) измеренной поверхности исследуемой антенны нам необходимо задать исходные данные для статистического анализа. С целью максимального приближения модели к реальности необходимо определить вид функции корреляции и радиус корреляции, наиболее полно учитывающих особенности искаженной

геометрии зеркал. Это является сложной задачей, так как искажение поверхности зеркала влияет множество факторов – технология изготовления, шаг дискретизации (разбиение на щиты), пространственное положение, юстировка, ветровые и тепловые нагрузки. Были проанализированы данные нескольких измерений геометрий антенн. На рис. 3.14 представлены картограммы отклонений геометрии поверхности от теоретических для 24-метровой двухзеркальной антенны Кассегрена. Можно констатировать, что радиус корреляции соизмерим с размером щита зеркала и, как правило, значительно превышает длину волны. Исходя из этого в математической модели выбирался радиус и закон корреляции.

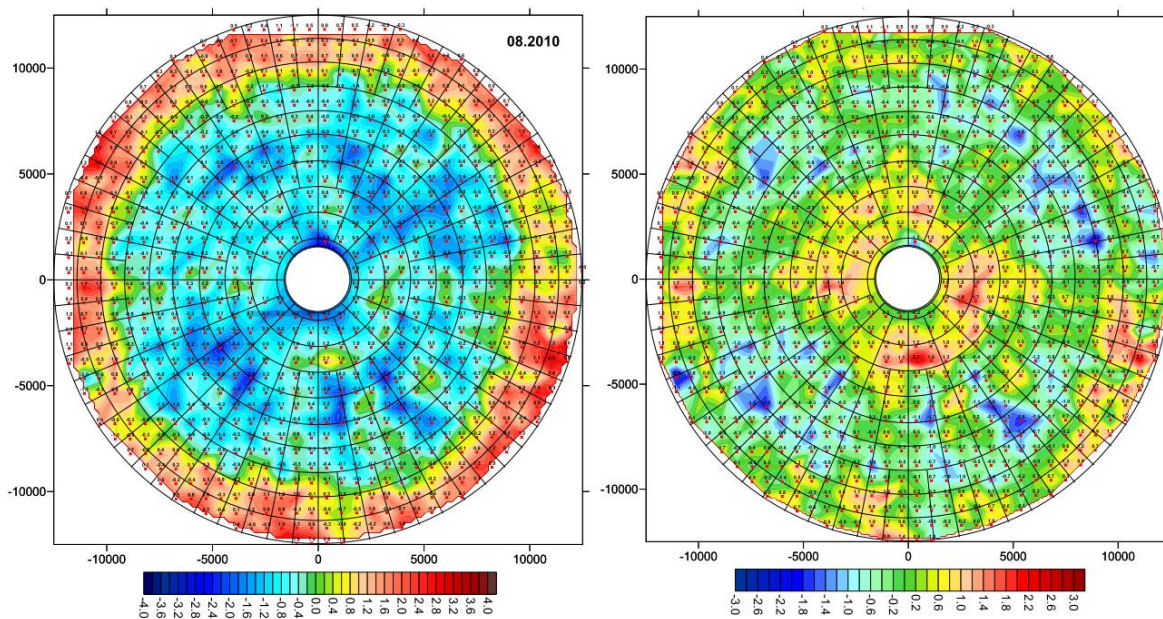


Рис. 3.14. Картограммы отклонений измеренной формы поверхности. Отклонения от проектного параболоида (а); отклонения от параболоида наилучшего приближения (б).

Модели искаженных зеркал изображены на рис. 3.15. Было исследовано влияние СКО главного зеркала и контррефлектора на характеристики антенны по отдельности, а также случаи наличия неидеальностей одновременно как рефлектора, так и контррефлектора. Для этого проведена серия расчетов диаграмм направленности антенны с искаженными поверхностями. Обработка результатов проводилась методом Монте-Карло, в среднем проводилось 5-7 расчетов и результаты усреднялись. Из полученных результатов можно сделать выводы:

- в целом характер формулы Рузе справедлив, однако для длиннофокусных антенн абсолютные значения  $K_{СКО}$  в расчете по формуле оказываются заниженными, то есть в расчете по традиционно применяемой формуле Рузе деградация характеристик существеннее по сравнению с более строгим методом расчета;
- выводы, полученные в работе [97] в части деградации характеристик антенн – ширины ДН, кроссполяризации, уровня боковых лепестков – подтвердились;
- радиус корреляции случайного закона влияет на результат – чем радиус меньше, тем более существенна деградация параметров.



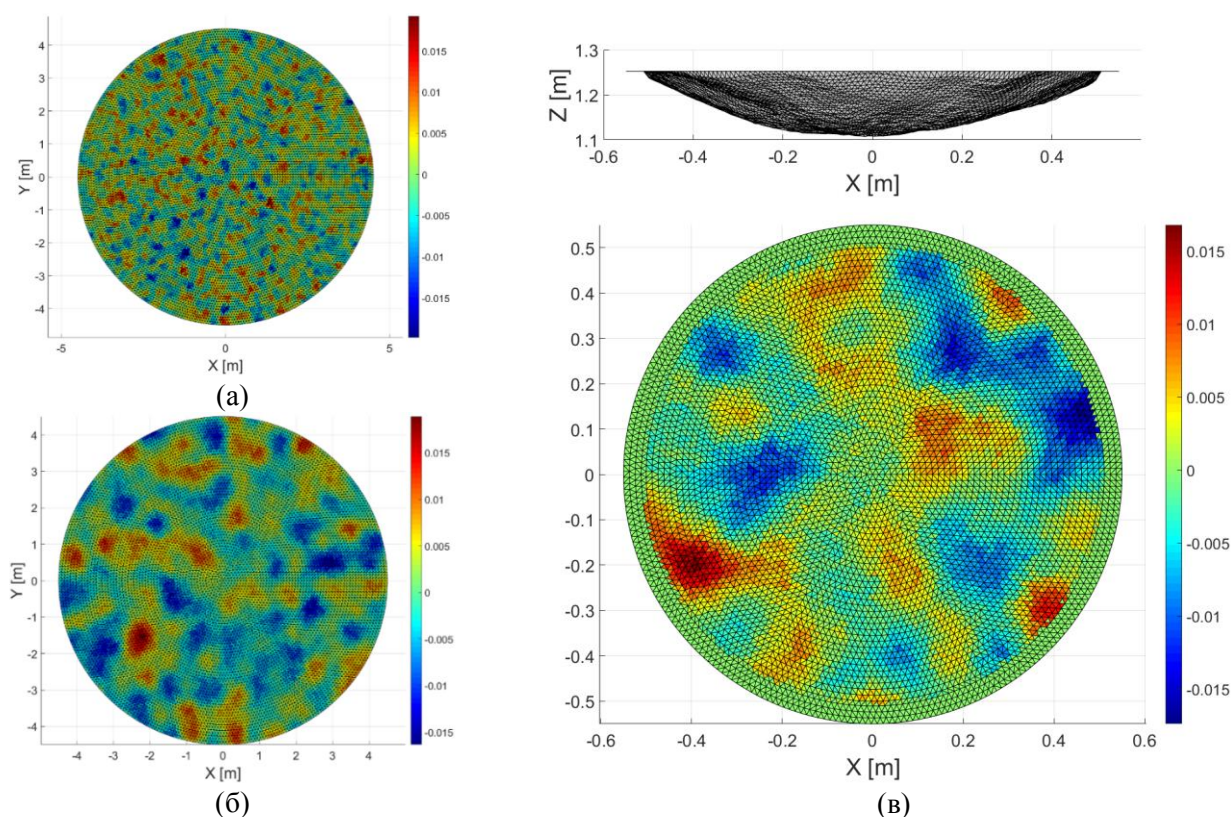


Рис. 3.15. Искаженные поверхности рефлектора и контррефлектора. Картограмма поверхности рефлектора, радиус корреляции  $r \sim 0.02\text{м}$  (а);  $r \sim 1\text{м}$  (б); искаженная поверхность и картограмма контррефлектора (в).

Наиболее важный с практической точки зрения случай – расчет при наличии отклонений поверхностей рефлектора и контррефлектора от теоретических. На рис. 3.16 (а) изображена зависимость  $K_{СКО}$  от СКО рефлектора и контррефлектора, полученная путем усреднений данных 5 расчетов для каждого случая. Диаграмма уровней зависимости  $K_{СКО}$  от СКО рефлектора и контррефлектора изображена на рис. 3.16 (б). Формула Рузе предсказывает значительно более существенную деградацию характеристик по сравнению с нашим методом. Отметим, что при заданном искажении поверхности контррефлектора можно подобрать такую поверхность рефлектора, которая бы компенсировала искажения в результирующем поле. Начиная с некоторого значения  $\sigma_{контр}$  (примерно соответствующее  $\lambda/20$ ) снижение КИП заметно усиливается при дальнейшем увеличении СКО. Для инженерной оценки нижней границы снижения эффективности приемлемый результат дает формула

$$K_{СКО} = \exp\left(-\left(\frac{3.5\pi}{\lambda}\right)^2 (\sigma_{рефл}^2 + \sigma_{контр}^2)\right). \quad (3.19)$$

Эта формула применяется в дальнейших расчетах, описанных в работе, а также при проектировании антенн в АО «ОКБ МЭИ».

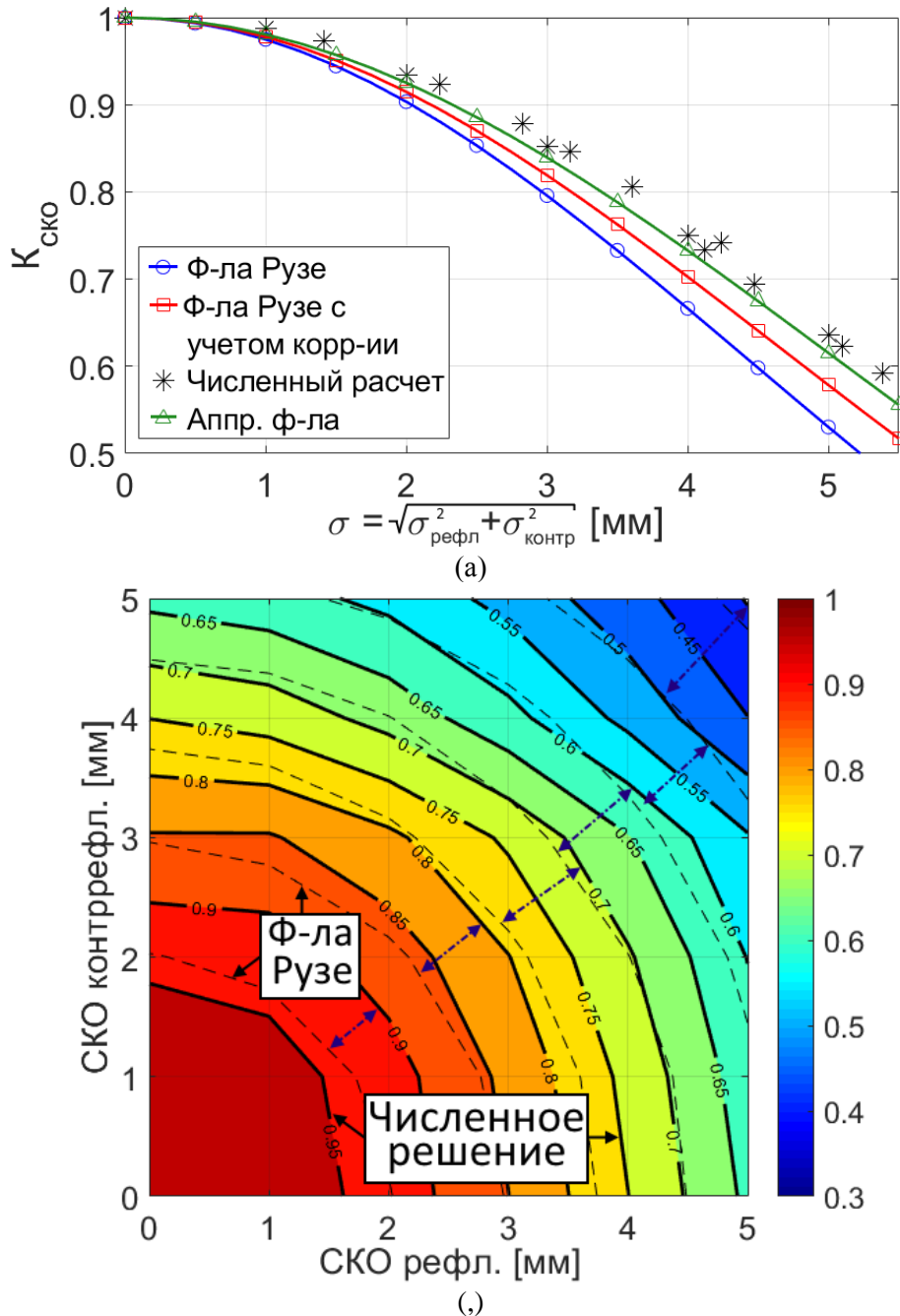


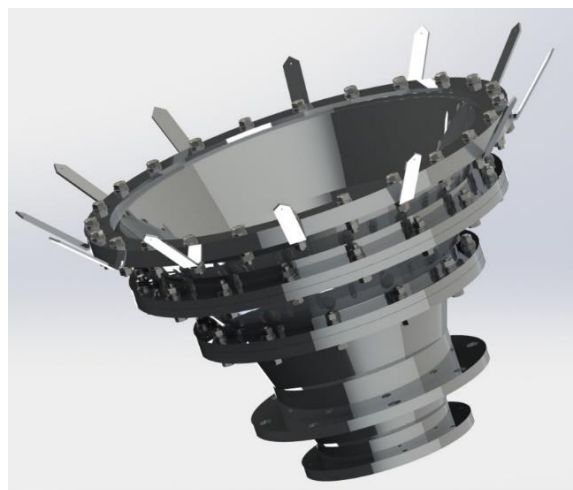
Рис. 3.16. Семейство кривых зависимости  $K_{\text{СКО}}$  от СКО рефлектора и контррефлектора. Сравнение кривых, полученных по формуле Рузе без учета корреляции, по формуле Рузе с заданным расстоянием корреляции, численным расчетом, и по введенной аппроксимационной формуле (а); линии уровня зависимости  $K_{\text{СКО}}$  от СКО рефлектора и контррефлектора (б).

### 3.2.3. Эксперимент

Двухзеркальная антенна, описанная в данном разделе, была сконструирована и изготовлена. Антенна и облучатель – двухчастотный рупор изображены на рис. 3.17. Были измерены характеристики антенны – шумовая добротность, кроссполяризационная развязка и диаграммы направленности антенны на рабочих частотах в двух плоскостях. Все измерения проводились по стандартной методике, заключающейся в измерении характеристик антенны в ДЗ в приемном режиме по космическим источникам с известной плотностью потока мощности излучения.



(а)



(б)

Рис. 3.17. Эксперимент. Антенна в сборе (а); 3D модель облучателя (б).

Существует несколько способов оценки  $K_u$  в дальней зоне. Первый – по измеренной ДН. В нашем случае измерение ДН во всем секторе углов не представляется возможным из-за ограниченного динамического диапазона малошумящего усилителя и ограниченных возможностей опорно-поворотного устройства (измерения проводятся в двух плоскостях – азимутальной и угломестной). В связи с этим применяется методика, рекомендованная национальным стандартом США [98], основанная на вычислении значения  $K_u$  по измеренной ширине ДН по уровню минус 3дБ и минус 10дБ в двух плоскостях. Это предполагает наличие маски диаграммы, ограничивающей УБЛ и заднее излучение. Метод имеет существенную погрешность, однако он является наиболее простым и широко применяется на практике. При этом расчеты косвенно подтверждаются измеренной с высокой точностью добротностью с известной шумовой температурой малошумящего усилителя.

Другие способы – измерение  $K_u$  методом трех антенн, в том числе методом расфокусировки, и измерения и измерение шумовой температуры с получением  $K_u$  из добротности – являются более точными, но в нашем случае не представляются возможными. На рис. 3.18 показаны измеренные с помощью анализатора спектра ДН по круговой (С-диапазон) и линейной (Ku-диапазон) поляризациям.

На рис. 3.19 изображены расчетные и измеренные диаграммы по круговой (С-диапазон) и линейной (Ku-диапазон) поляризациям. В С-диапазоне имеется отличие в ширине ДН и уровне боковых лепестков, что очевидно говорит о более равномерном амплитудном распределении в апертуре зеркала. Это может быть вызвано погрешностью определения и установки фазового центра рупора в фокус и отличием реальных ДН рупора от расчетных (в расчете рупора не учитываются секции возбуждения и конструктивные элементы – стыки секций рупора, штыри защиты от птиц на рис. 3.17 (б), герметизирующие вставки и т.д).

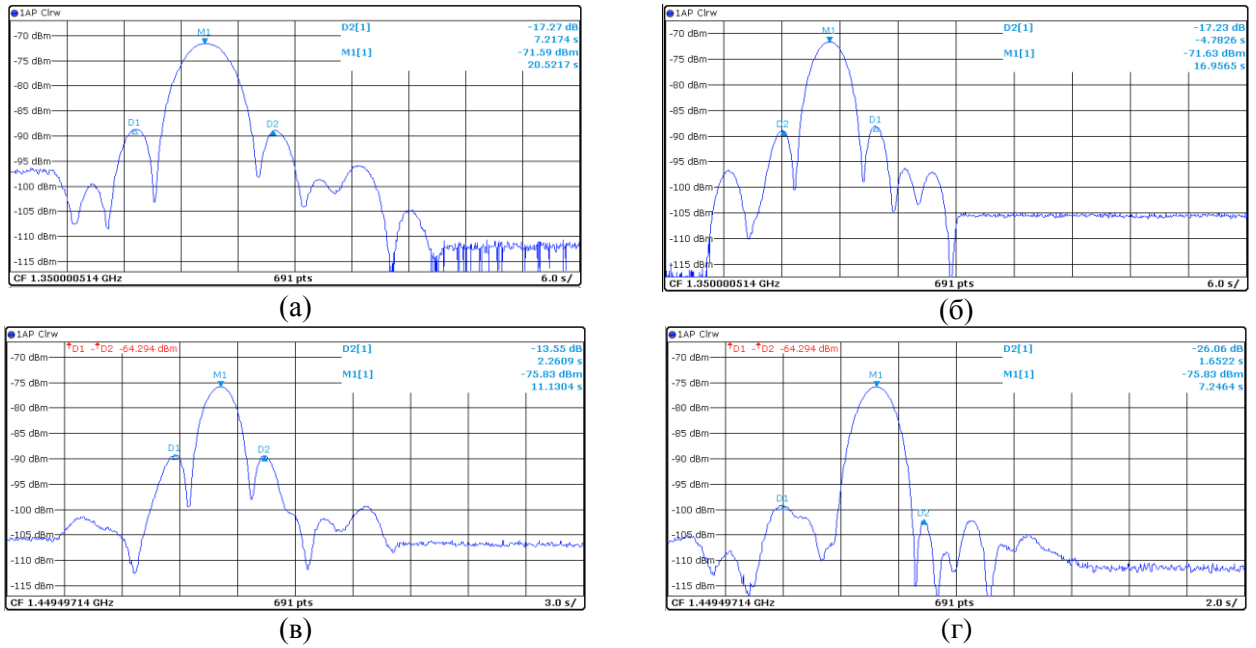


Рис. 3.18. Измеренные с помощью анализатора спектра ДН. С-диапазон, азимут (а); С-диапазон, УМ (б); Ku-диапазон, азимут (в); Ku-диапазон, УМ (г).

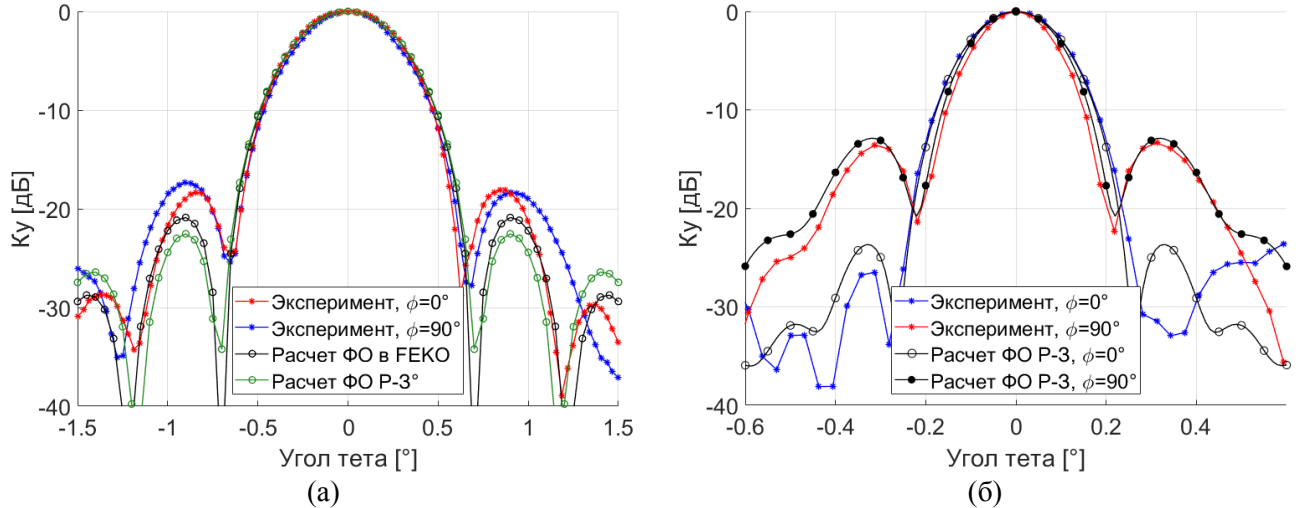


Рис. 3.19. Сравнение расчетных и экспериментальных ДН. С-диапазон (а); Ku-диапазон (б).

Результаты оценки КИП антенной системы сведены в таблицу 3.5. В расчетной оценке составляющие  $K_{ан}$ ,  $K_{пер}$ ,  $K_{диф}$ ,  $K_{кросс}$ ,  $K_{СКО}$ , а также омические потери на алюминиевых зеркалах получены с применением векторов Р-3. Коэффициент  $K_{зат}$  рассчитывается в геометрическом приближении. Потери в облучающей системе являются реальными измеренными потерями в тракте и складываются из реальных измеренных потерь на прохождение и отражение. Заложенный конструкцией и измеренный интегральный СКО рефлектора составляет 0.7мм, контррефлектора 0.25мм, коэффициент  $K_{СКО}$  рассчитан с применением полученной ранее методики. Анализируя данные в таблице, в целом можно отметить довольно неплохую сходимость расчетных и экспериментальных данных даже с учетом большой погрешности эксперимента. Экспериментальный КИП оказался несколько выше теоретического возможно за счет большего реально получившегося апертурного КИП – более равномерного облучения поверхности зеркала. Безусловно, экспериментальная оценка является приближенной –

измеряется коэффициент направленного действия и в оценку добавляются неучтенные составляющие. Предполагается, что в КНД входят составляющие  $K_{ан}$ ,  $K_{пер}$ ,  $K_{диф}$ ,  $K_{кросс}$ , и дополнительно рассчитываются  $K_{СКО}$ ,  $K_{зат}$ ,  $K_{ном}$ . Однако в целом оценка КИП является второстепенной, так для заказчика системы связи важна добротность, измеряемая с высокой точностью, а для проверки расчета достаточно сходимости ДН.

Таблица 3.5. Расчетная и экспериментальная оценка составляющих КИП

Составляющая потерь	С-диапазон			Ku-диапазон		
	Расчет		Измерение	Расчет		Измерение
	Полный расчет	Расчет 1 вектора		Полный расчет	Расчет 1 вектора	
$K_{ан}, K_{пер}, K_{диф}, K_{кросс}$	0.796	0.799	0.794	0.766	0.767	0.695
$K_{СКО}$	0.991			0.916		
$K_{зат}$	0.97			0.97		
$K_{ном}$ - омические потери - СВЧ-тракт	0.99997 0.963			0.9998 0.964		
$K_{\Sigma}$	0.737	0.739	0.765	0.656	0.657	0.670

### 3.3 Расчет двухзеркального лучевода с учетом влияния кожуха

Антенны ДКС с лучеводами применяются в составе комплексов управления дальними КА. Для этого они должны работать в приеме-передающем режиме. В реально существующих системах всегда стоит задача передающего изоляции лучеводного тракта от окружающего пространства – технических помещений, бетонных конструкций, элементов опорно-поворотного устройства. Это связано с тем, что мощность передатчика и распространяющихся в лучеводе полей может составлять десятки киловатт. Самое простое и экономически целесообразное решение для экранирования поля – применение металлических труб стандартных производимых в промышленности диаметров. При этом такой кожух неизбежно оказывает влияние на распространяющееся поле – возникают искажения:

- 1) нарушение симметрии поля;
- 2) возникновение кроссполаризационной составляющей;
- 3) омические потери мощности, ухудшающие шумовые характеристики.

Эти искажения необходимо оценивать и, по возможности, минимизировать. Влияние кожуха на шумовую температуру проанализировано в [5]. Для строгой оценки всех искажений кожух можно рассматривать как круглый волновод большого диаметра. В этом случае задача сводится к хорошо изученной задаче распространения волн в круглом волноводе.

Таким образом, с целью оценки потерь, к которым приводят кожухи, и определения требований к ним (диаметр, материал) с целью минимизации искажений необходимо проведение расчета распространяющихся в лучеводе полей с учетом кожуха. Единственное известное в литературе решение такой задачи описано в [6]. В данном разделе будет получено решение задачи распространения волн в волноводе в терминах векторов Р-З для гладкого и

гофрированного волновода и возбуждение волновода, а также проведен расчет лучевой конфигурации, представленной в статье, и приведено сравнение результатов. Расчет двухзеркального лучевода в свободном пространстве с применением векторов Р-З описан в [85].

### 3.3.1. Распространение и возбуждение волн в волноводе в терминах векторов Р-З

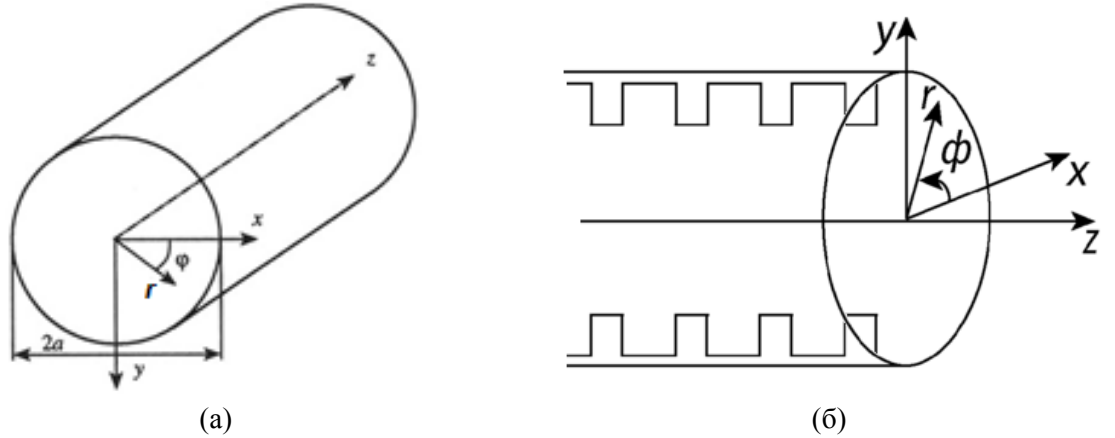


Рис. 3.20. Круглые волноводы. Гладкий (а); гофрированный (б).

Решение задачи распространения волн в цилиндрических координатах для векторов Римана-Зильберштейна было приведено ранее. Решение для гладкого волновода (рис. 3.20 (а)) в наиболее общем виде представлено в [99]. Оттуда же взяты выражения для коэффициентов затухания далее. От стандартных выражений для ТЕ (Н) и ТМ (Е) волн для удобства и сохранения единства работы осуществляется переход к векторам Р-З. Дисперсионное уравнение

$$J_m(ga)J'_m(ga) = 0 \Rightarrow \begin{cases} TE \text{ волны: } J_m(ga) = 0; & c_+ = -c_- = c_{mn}^e; & k_{mn}^e = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\chi_{mn}^e}{a}\right)^2}, \\ TM \text{ волны: } J'_m(ga) = 0; & c_- = c_+ = c_{mn}^M; & k_{mn}^M = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\chi_{mn}^M}{a}\right)^2}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Выражение для собственных ТЕ-волн и ТМ-волн

$$\begin{pmatrix} F_{+1\pm}^{TE} \\ F_{0\pm}^{TE} \\ F_{-1\pm}^{TE} \end{pmatrix} = \pm \frac{iac_{mn}^e}{\sqrt{2}\chi_{mn}^e} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} (\pm k + k_{mn}^e) \left( J_{m-1} \left( \chi_{mn}^e \frac{r}{a} \right) \right) \\ J_m \left( \chi_{mn}^e \frac{r}{a} \right) \\ -e^{-i\varphi} (\pm k - k_{mn}^e) \left( J_{m+1} \left( \chi_{mn}^e \frac{r}{a} \right) \right) \end{pmatrix} e^{-i(m\varphi + k_{mn}z)}. \quad (3.21)$$

$$\begin{pmatrix} F_{+1\pm}^{TM} \\ F_{0\pm}^{TM} \\ F_{-1\pm}^{TM} \end{pmatrix} = \frac{iac_{mn}^M}{\sqrt{2}\chi_{mn}^M} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} (\pm k + k_{mn}^e) J_{m-1} \left( \chi_{mn}^M \frac{r}{a} \right) \\ J_m \left( \chi_{mn}^M \frac{r}{a} \right) \\ -e^{-i\varphi} (\pm k - k_{mn}^e) J_{m+1} \left( \chi_{mn}^M \frac{r}{a} \right) \end{pmatrix} e^{-i(m\varphi + k_{mn}z)}. \quad (3.22)$$

Рассмотрим теперь гофрированный волновод (рис. 3.20 (б)). Пользуемся выражениями (2.63). Запишем граничные условия при  $z=0$  для составляющих векторов  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$ .

$$F_{\varphi+}|_{\rho=a} = F_{\varphi-}|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow f(k_{mn}) = (k_{mn} \pm k)J_{m+1}(k_{\perp mn}a) + (k_{mn} \mp k)J_{m-1}(k_{\perp mn}a). \quad (3.23)$$

Получили дисперсионное уравнение относительно поперечного волнового числа. Оно просто решается численными методами. Выражение для полей в спиральных координатах

$$\begin{cases} F_{\pm,+1} = -C_{m\pm} \frac{i}{\sqrt{2}k_{\perp mn}} (k_{mn} \pm k) J_{m+1}(k_{\perp mn}r) e^{i((m+1)\varphi - k_{mn}z)} \\ F_{\pm,0} = C_{m\pm} J_m(k_{\perp mn}r) e^{i(m\varphi - k_{mn}z)} \\ F_{\pm,-1} = -C_{m\pm} \frac{i}{\sqrt{2}k_{\perp mn}} (k_{mn} \mp k) J_{m-1}(k_{\perp mn}r) e^{i((m-1)\varphi - k_{mn}z)} \end{cases} \quad (3.24)$$

Мощность, переносимая волнами правой и левой круговой поляризации

$$P_{mn+,z} = \frac{1}{2} (F_{+,-1} F_{+,-1}^* - F_{+,+1} F_{+,+1}^*) = \frac{|C_{m+}|^2}{8k_{\perp mn}^2} \left( (k_{mn} - k)^2 J_{m-1}^2(k_{\perp mn}r) - (k_{mn} + k)^2 J_{m+1}^2(k_{\perp mn}r) \right), \quad (3.25)$$

$$P_{mn-,z} = \frac{|C_{m-}|^2}{8k_{\perp mn}^2} \left( (k_{mn} + k)^2 J_{m-1}^2(k_{\perp mn}r) - (k_{mn} - k)^2 J_{m+1}^2(k_{\perp mn}r) \right).$$

Осталось получить выражения для коэффициентов возбуждения. В реальных лучеводах удобно в качестве исходного поля в кожухе задавать либо поле на поверхности зеркала, либо поле во входном сечении кожуха (рис. 3.21). Общее решение уравнений Максвелла

$$\mathbf{F}_{\pm} = \sum_s (C_s \mathbf{F}_{\pm,s} + C_{-s} \mathbf{F}_{\pm,-s}), \quad (3.26)$$

где собственная волна с индексом  $s$  (совокупность индексов  $n$  и  $m$ ) распространяется вдоль оси  $Z$ , волна с индексом  $-s$  распространяется в обратном направлении. Применим лемму Лоренца

$$\iint_S ([\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2^*], \mathbf{n}) ds = \iiint_V \{ (\mathbf{j}_1, \mathbf{F}_2^*) - (\mathbf{j}_2^*, \mathbf{F}_1) \} dv. \quad (3.27)$$

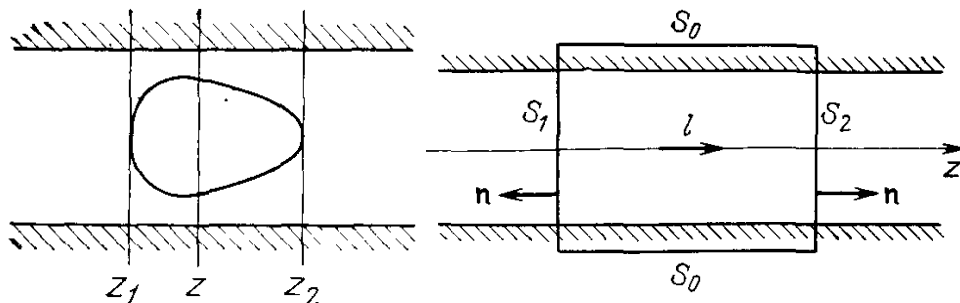


Рис. 3.21. К задаче возбуждения волновода.

В области без источников на рис. 3.21

$$\iint_{S_0+S_1+S_2} ([\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s^*], \mathbf{n}) ds = 0, \quad (3.28)$$

где  $\mathbf{F}_S, \mathbf{F}_{S'}$  – собственные волны в волноводе одной круговой поляризации. Интегралы по  $S_0$  равны нулю [100]. Тогда интеграл можно переписать

$$J_{S,S'} = \iint_{S_1+S_2} \left( [\mathbf{F}_S, \mathbf{F}_{S'}^*], \mathbf{n} \right) ds = \iint_{S_1} \left( [\mathbf{F}_S(0), \mathbf{F}_{S'}^*(0)], \mathbf{e}_z \right) ds + \\ + \iint_{S_2} \left( [\mathbf{F}_S(z), \mathbf{F}_{S'}^*(z)], -\mathbf{e}_z \right) ds = J_{S,S'}(0) - J_{S,S'}(0) e^{i(k_S - k_{S'})z} = 0. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что  $k_S = -k_{S'}$  и  $J_{S,S'} = 0$  при  $s \neq -s'$ . При этом интеграл по  $S_1+S_2$  не зависит от выбора сечения и из леммы Лоренца следует

$$\iint_{S_1} \left( [\mathbf{F}_S(0), \mathbf{F}_{S'}^*(0)], \mathbf{e}_z \right) ds = \iint_{S_2} \left( [\mathbf{F}_S(z), \mathbf{F}_{S'}^*(z)], \mathbf{e}_z \right) ds. \quad (3.30)$$

Условие ортогональности моды

$$\iint_S \left( [\mathbf{F}_S, \mathbf{F}_{S'}^*], \mathbf{e}_z \right) ds = 0 \text{ при } s \neq -s'. \quad (3.31)$$

Норма собственной волны

$$N_S = \iint_S \left( [\mathbf{F}_S, \mathbf{F}_{-S}^*], \mathbf{n} \right) ds. \quad (3.32)$$

Умножим исходный ряд векторно на комплексно-сопряженную волну и с учетом условия ортогональности получаем окончательное выражение для коэффициентов возбуждения

$$\iint_S \left( [\mathbf{F}, \mathbf{F}_S^*], \mathbf{n} \right) ds = C_S N_S \Rightarrow C_{\pm S} = \frac{1}{N_{\pm S}} \iint_S \left( [\mathbf{F}, \mathbf{F}_{\pm S}^*], \mathbf{n} \right) ds. \quad (3.33)$$

### 3.3.2. Расчет двухзеркального лучевода с учетом кожуха

Для исследования возникающих в процессе распространения в лучевом с кожухом искажений рассмотрим конфигурацию, приведённую в статье [6]. В ней рассматривается двухзеркальный лучевод из параболоидов из двух параболоидов с цилиндрическим кожухом (рис. 3.22). Авторы проводят расчеты методом ФО, а также экспериментальные измерения.

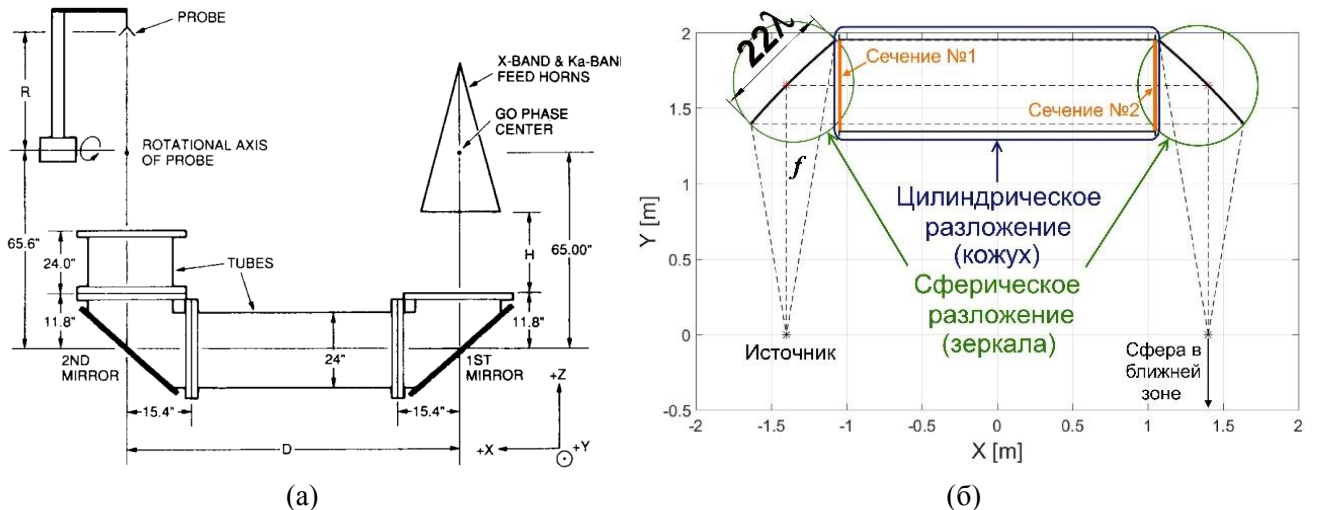


Рис. 3.22. Геометрия задачи. Геометрия из статьи (а); математическая расчетная модель (б).



Основные параметры созданной в текущей работе расчетной модели: частота  $f=8.45\text{ГГц}$ , фокусное расстояние  $F=0.826\text{м}$ , угол облучения зеркала  $2\theta_0=19^\circ$ ; линейная поляризация (вдоль оси  $X$ ); диаметр волновода  $17.2\lambda$ . Облучатель у авторов – гофрированный рупор с  $K_{y1}=29\text{дБ}$  и  $K_{y2}=22\text{дБ}$ , что соответствует уровню облучения края зеркала по уровню  $-24\text{дБ}$  и  $-4.8\text{дБ}$  соответственно. Отклонения от статьи:

- расстояние между зеркалами  $2.8\text{м}$  ( $79\lambda$ ) вместо  $3.53\text{м}$  ( $99.5\lambda$ );
- кожух волновода присутствует только на прямом участке между зеркалами;
- идеальный облучатель вместо рупора (далее будет рассчитано с реальным рупором).

Первое и второе допущение вызваны тем, что с целью верификации результатов помимо векторов Р-З проводится расчет в САПР, где волновод большей длины рассчитать имеющимися вычислительными ресурсами невозможно. Задача возбуждения волновода заданным распределением поля с расчетом коэффициентов возбуждения собственных мод в ФЕКО не решается, в связи с чем применяется метод ИУ. Последнее допущение также вызвано тем, что в САПР решение задачи анализа большого гофрированного рупора с зеркалами не представляется возможным. Поэтому в качестве облучателя применяется элемент Гюйгенса правой круговой поляризации с соответствующей амплитудной ДН. Далее будет проведён расчет с полем реального рупорного облучателя для подтверждения адекватности модели.

Методы расчета – метод ИУ в САПР Altair FEKO и для векторов векторов Р-З метод собственных функций в спиральных координатах (на зеркалах) и в циклических координатах (в волноводе). Расчетные случаи: 1 – без учета кожуха – зеркала в свободном пространстве; 2 – расчет с учетом кожуха из гладкого металла; 3 – с учетом кожуха гофрированной структуры с целью оценки возможности компенсации искажений. Расчет проводится на стандартном ПК следующей конфигурации: 32Гб ОЗУ, 2 процессора Intel Xeon E5-2620 (15 Мб кэш, до 2.5ГГц, 12 потоков), видеокарта Nvidia GeForce 210, 360 Gb SSD.

На рис. 3.23 изображены расчётные модели в ФЕКО и результаты расчета поверхностного тока методом ИУ. Методом собственных функций с применением векторов Римана-Зильберштейна задача, как и ранее, решается в несколько шагов. Сначала вычисляются составляющие поверхностного тока на первом зеркале, вычисляются коэффициенты разложения поля в ряд по токам. Далее по полученным коэффициентам вычисляется распределение поля в первом сечении (апертуре) кожуха (рис. 3.22 (б)), определяются коэффициенты собственных волн в волноводе. Рассчитывается поле во втором сечении, поверхностный ток на втором зеркале и разложение поля в ряд по токам на втором зеркале, исходя из которого определяется искомое поле, в том числе на сфере в ближней зоне. На рис. 3.24 кратко резюмированы результаты расчетов – коэффициенты возбуждения собственных волн в гладком и гофрированном волноводах, векторные составляющие поля в первом и втором сечениях.

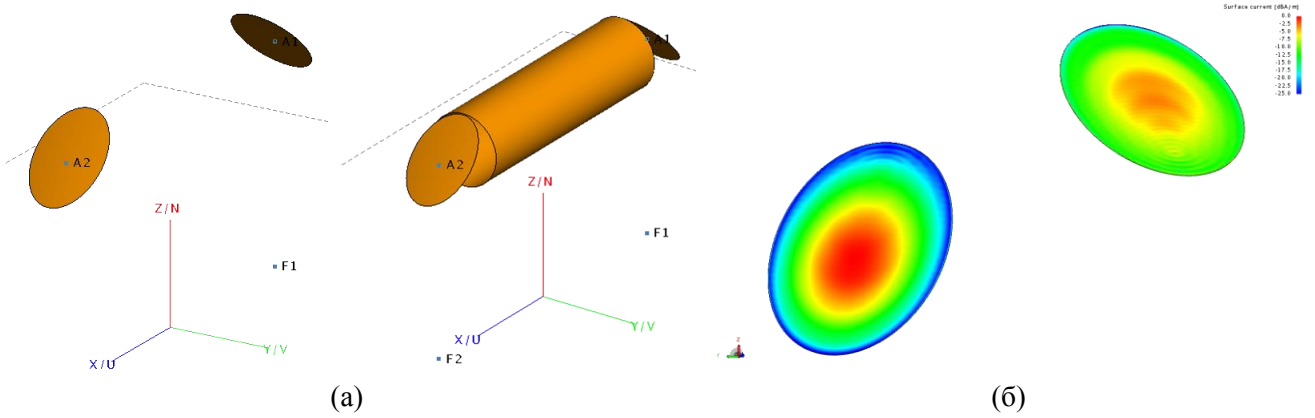


Рис. 3.23. Расчет в FEKO. Геометрия задачи без волновода и с волноводом (а); поверхностный ток (б).

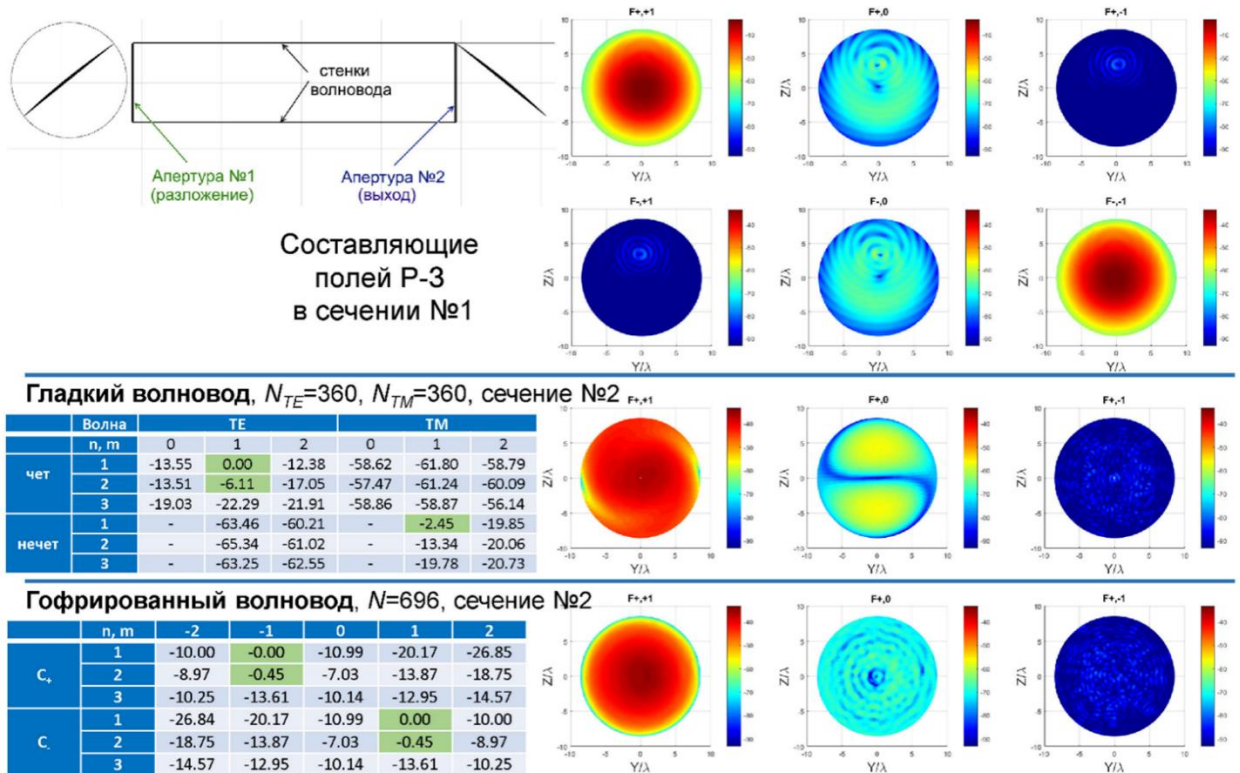


Рис. 3.24. Результаты расчета распространяющихся полей в лучевом с кожухом. Сверху – геометрия задачи и векторные циклические составляющие поля в первой апертуре. Ниже – коэффициенты возбуждения собственных волн в гладком и гофрированном волноводах (зеленым указаны основные моды), и векторные циклические составляющие поля во второй апертуре для обоих случаев.

Как и в статье, было рассчитано распределение поля по основной и кросс поляризационной составляющим на сфере в ближней зоне. Результаты представлены на рис. 3.25. Проанализируем получившиеся результаты. Во-первых, отметим ключевое расхождение с данными из статьи – и в FEKO, и в расчете с векторами P-3 получается, что кожух лучевода сужает поле – направляет пучок лучей. В упомянутой статье авторы пришли к противоположным результатам – у них поле с учетом кожуха получалось шире. Результат, получившийся в текущем расчете, видится более логичным. Далее, отметим симметрию поля – рассматриваемый лучевод удовлетворяет условиям Мизусавы, поэтому вносимые искажения минимальны. Они сводятся к расширению пучка и увеличению кроссполяризации. Влияние этих эффектов уменьшается с ростом частоты – по мере приближения к геометрическим условиям.

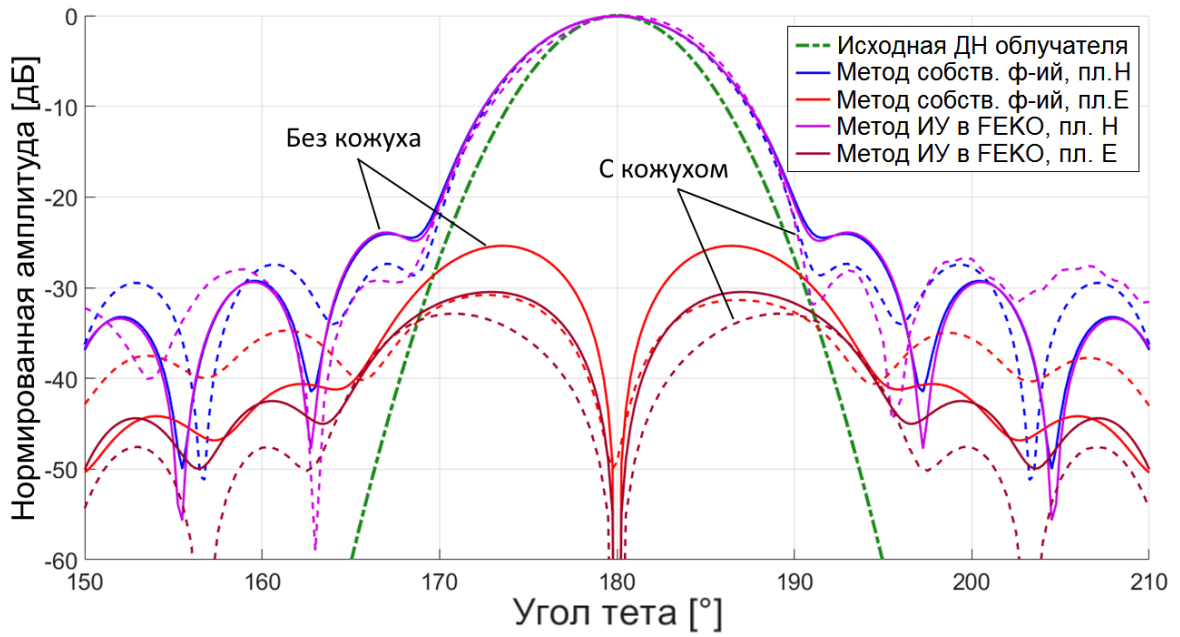


Рис. 3.25. Результаты расчета поля в БЗ по основной и кросс поляризации составляющим в ФЕКО (фиолетовые и бордовые кривые) и методом собственных функций (красные и синие кривые). Сплошные линии – без учета кожуха, пунктирные – с учетом кожуха.

Кроссполяризация в сечении в БЗ на рис. 3.25 несколько снижается, однако в целом ее мощность возрастает за счет возникновения продольной составляющей поля в кожухе.

На рис. 3.26 представлена оценка сходимости ряда. Наилучшая сходимость разложения на втором зеркале в случае гофрированного кожуха, что вызвано хорошей симметрией поля по  $\phi$ . В таблицу 3.6 сведены результаты сравнения характеристик лучевода.

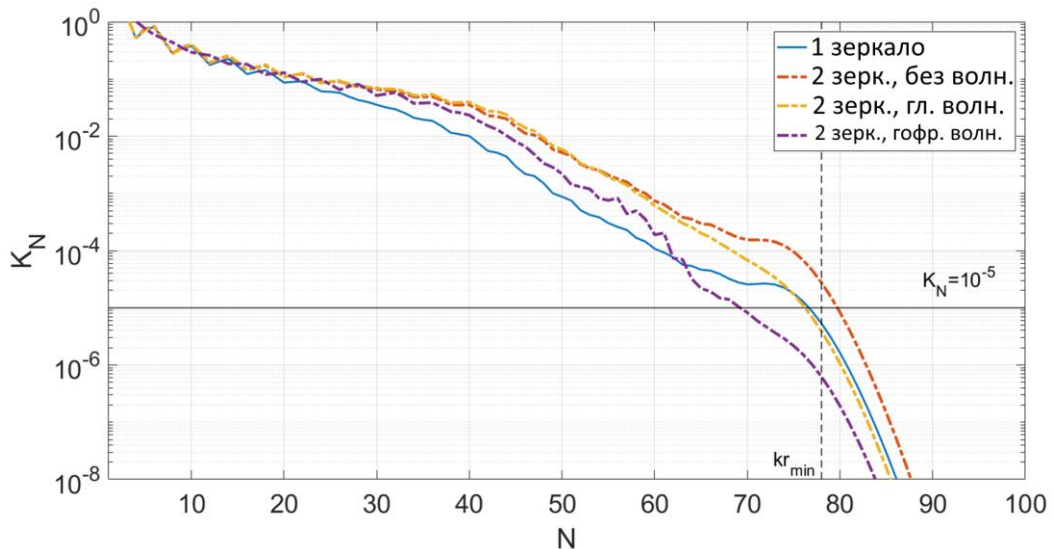


Рис. 3.26. Оценка сходимости разложений.

Таблица 3.6. Сравнение потерь и кроссполяризации в двухзеркальном лучеводе,  $K_{\text{У}}=29\text{дБ}$ .

	Потери основной составляющей, дБ			Кроссполяризация, дБ			Омические потери, дБ (алюминий)
	Без кожуха	Гладкий кожух	Гофрированный кожух	Без кожуха	Гладкий кожух	Гофрированный кожух	
Сечение №1	-0.039			-24.31			Без кожуха: -0.00091 С кожухом: -0.0033
Сечение №2	-0.227	-0.152	-0.04	-25.09	-15.33	-24.25	
Полусфера $r=2f$ в БЗ	-0.61	-0.49	-0.34	-22.19	-18.07	-24.03	

Также был проведен расчет лучевода с облучателем с меньшим коэффициентом усиления. В этом случае искажения поля значительно существеннее (рис. 3.27, таблица 3.7) – кожух существенно сужает пучок, резко возрастают омические потери и кроссполяризация.

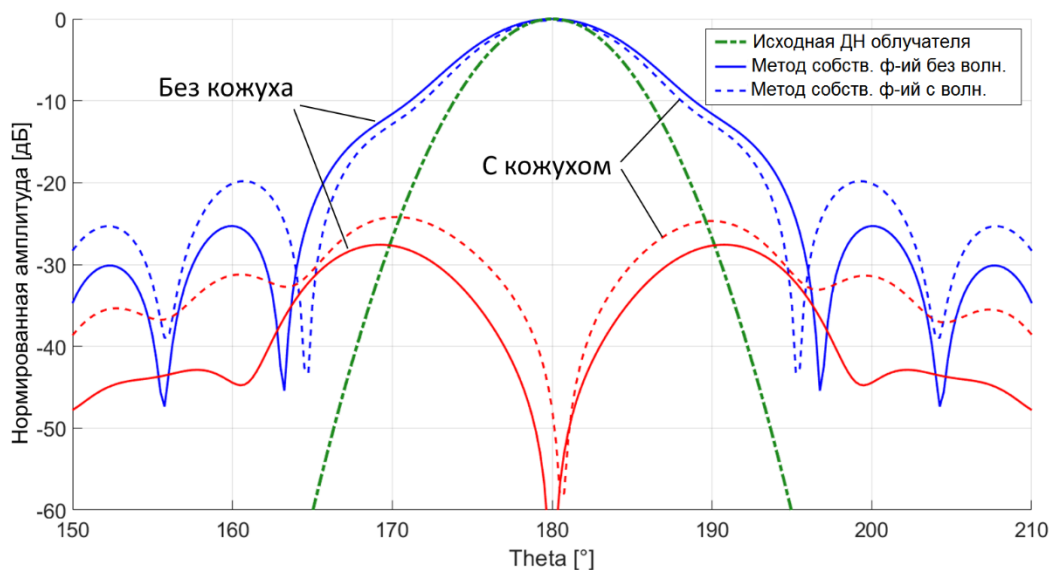


Рис. 3.27. Результаты расчета поля в БЗ по основной и кросс поляризаационной составляющим для облучателя с меньшим  $K_u$  в ФЕКО (фиолетовые и бордовые кривые) и методом собственных функций (красные и синие кривые). Сплошные линии – без учета кожуха, пунктирные – с учетом кожуха.

Таблица 3.7. Сравнение потерь и кроссполяризации,  $K_u=22$ дБ.

	Потери основной составляющей, дБ			Кроссполяризация, дБ			Омические потери, дБ (алюминий)
	Без кожуха	Гладкий кожух	Гофрированный кожух	Без кожуха	Гладкий кожух	Гофрированный кожух	
Сечение №1	-1.95			-22.45			Без кожуха: -0.00064 С кожухом: -0.027
Сечение №2	-2.45	-2.16	-1.96	-24.29	-14.59	-21.88	
Полусфера $r=2f$ в БЗ	-2.83	-2.83	-2.27	-21.04	-14.85	-21.3	

Отметим, что в случае многомодового волновода потери более правильно рассчитывать с учётом взаимодействия мод, как описано в [7]. Однако погрешность упрощенной оценки невелика, как следует из результатов в [7]. Кроссполяризационные искажения поля можно минимизировать путем применения гофрированных кожухов. Очевидно, что применение таких труб-волноводов во всем лучеводе экономически нецелесообразно, в связи с чем возможен компромисс – создание поляризационных фильтров на основе гофрированных секций. Такой подход требует дополнительных исследований. Исходя из полученных результатов, рекомендации к кожухам с целью минимизации искажений:

- 1) необходим выбор диаметров, длин и расположения кожухов (желательно, чтобы уровень поля на стенках был менее минус 30дБ);
- 2) из-за появления продольной составляющей поля возрастает кроссполяризация, которую можно минимизировать за счет применения гофрированных участков кожухов.

Как и в прошлом разделе, была проведена оценка расчетного времени (таблица 3.8).

Решить задачу возбуждения собственных волн в волноводе заданным распределением поля в ФЕКО не представляется возможным, поэтому решение осуществлялось методом интегральных уравнений. Безусловно, такое решение не является показательным с точки зрения расчетных ресурсов. Однако даже в случае двухзеркального лучевода без кожуха применение собственных функций векторов Р-3 имеет выигрыш во времени по сравнению с ФЕКО при идентичных результатах, и расчетное время может быть еще уменьшено при учете 1 вектора.

Таблица 3.8. Сравнение расчетного времени.

	Векторы Р-3 (MATLAB)	ИУ ФЕКО
<u>Лучевод без волновода</u>	<u>1033с</u>	<u>1158с</u>
• разложение на 1ом зеркале	209с	
• разложение на 2ом зеркале	207с	
• вычисление ближнего поля	515с	
<u>Лучевод с волноводом</u>	<u>5052с</u>	<u>22469с</u>
• разложение на 1ом зеркале	204с	
• разложение в кожухах	683с	
• разложение на 2ом зеркале	648с	
• вычисление ближнего поля	917с	

### 3.3.3. Расчет с учетом отклонений поверхностей зеркал от теоретических

Перейдем теперь к рассмотрению влияния неидеальностей поверхностей зеркал лучевода на его характеристики. Эффективность и потери оцениваются в соответствии с введенным ранее определением – как мощность прошедшего поля в заданном секторе углов на сфере в ближней зоне, методика создания расчетной модели с искаженными профилями зеркал лучевода такая же, как и в предыдущем случае двухзеркальной антенны – строится и накладывается на исходную модель гауссовой поверхности с заданным СКО, функцией и радиусом корреляции.

Была проведена серия расчетов для разных значений СКО поверхностей зеркал. При этом в каждом расчетном случае СКО для обоих зеркал одинаково, но гауссова поверхность строится для каждого зеркала своя. На рис. 3.28 (а) изображены искаженные поверхности зеркал и картограммы случайных отклонений поверхностей от теоретических. На рис. 3.28 (б) показаны значения составляющей эффективности лучевода  $K_{СКО}$  при разных СКО зеркал. Для определенных комбинаций эффективность получается больше 100%, что говорит о том, что полезная мощность на выходе лучевода с искаженными зеркалами превышает мощность на выходе идеального лучевода. Это связано с тем, что лучевод проектируется в приближении геометрической оптики, и при определенных комбинациях искажений зеркал потери за счет дифракции оказываются меньше, чем для лучевода из идеальных зеркал, т.е. лучевод лучше «фокусирует» поле.

Исходя из получившихся результатов, можно сделать главный вывод – об определении требований к СКО изготавливаемых зеркал лучевода. Если задать допустимый уровень снижения эффективности двухзеркального лучевода в 5%, то требуемое значение СКО будет  $\sigma < \lambda/80 - \lambda/100$ .

При этом чем больше зеркал в цепочке, тем более неоднозначной будет картина, и тем более жесткие требования к изготовлению должны предъявляться. На графике 3.28 (б) также приведена кривая, полученная по формуле Рузе, не применимая для лучевода, однако добавленная для сравнения. В этом случае формула дает значения, близкие к средним. Для оценки нижней границы снижения эффективности может применяться эмпирическая формула

$$K_{CKO} = \exp\left(-\left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda}\right)^{1.5}\right) \quad (3.34)$$

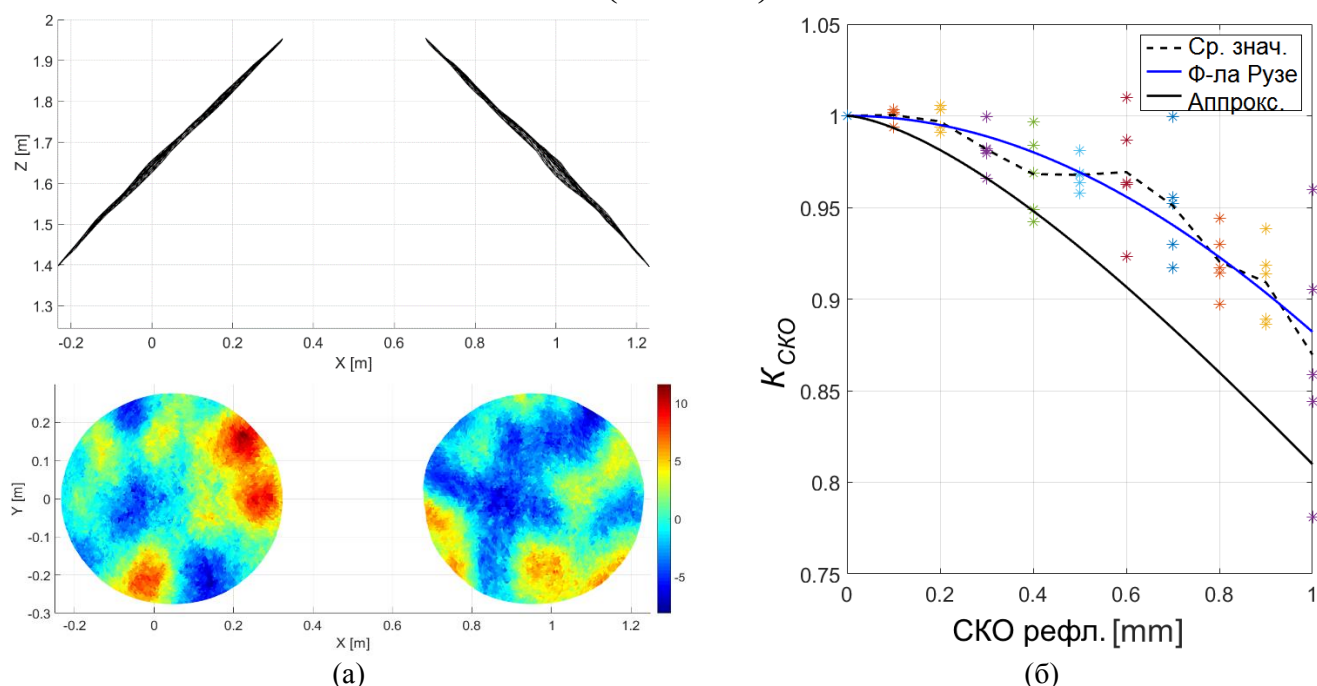


Рис. 3.28. К расчету влияния неидеальностей поверхностей зеркал лучевода. Модель искаженных поверхностей и картограммы их отклонений (а); зависимость  $K_{CKO}$  от  $SKO$  зеркал лучевода (б). Точки на графике соответствуют разным расчетным случаям, пунктирная линия – усредненные значения, сплошная синяя линия – формула Рузе, сплошная черная линия – введенная аппроксимационная формула.

На рис. 3.29 приведены графики зависимостей потерь основной поляризационной составляющей и уровня кроссполяризационной составляющей от  $SKO$  зеркал. Отметим также большой разброс и неоднозначность картины. В такой оценке учтены составляющие эффективности  $K_{\text{диф}}$ ,  $K_{\text{пер}}$ ,  $K_{\text{кросс}}$ ,  $K_{CKO}$ . Общий вывод из расчета – двухзеркальный лучевод из параболоидов более чувствителен к случайным отклонениям профилей зеркал от теоретических, чем осесимметричные двухзеркальные антенны, и искажения зеркал могут привести к существенной деградации характеристик. Вывод можно также распространить на двухзеркальные офсетные антенны.

### 3.3.4. Расчет лучевода с рупорным облучателем

Предыдущие расчеты лучевода проводились с применением идеализированного облучателя – точечного источника с поляризационной диаграммой, соответствующей элементу Гюйгенса круговой поляризации, и заданной определенным образом амплитудной ДН.

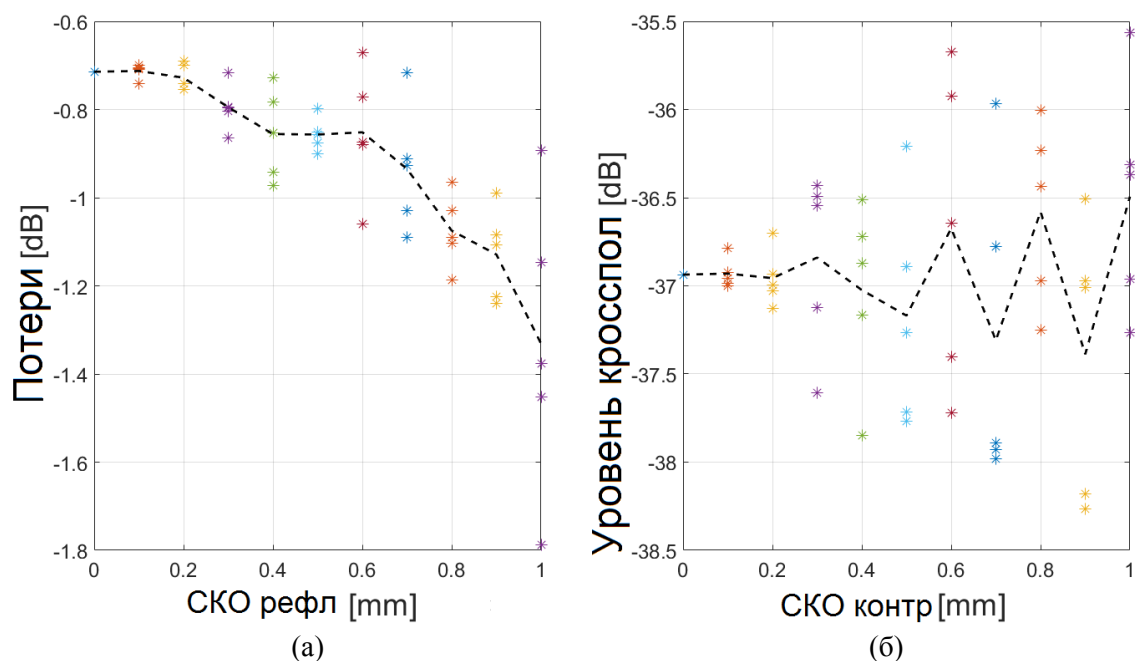


Рис. 3.29. К расчету влияния неидеальностей поверхностей зеркал на характеристики лучевода. Зависимость потерь по основной поляризационной составляющей (а); зависимость мощности кроссполяризационной составляющей от СКО зеркал (б). Точки на графике соответствуют разным расчетным случаям, пунктирная линия – усредненная кривая.

Такой способ полезен для оценки теоретически достижимых характеристик зеркальных антенн и лучеводов. Однако при переходе к практической реализации необходимо анализировать систему с учетом реального облучателя, максимально стремясь при этом приблизить его характеристики к идеальному. В антеннах ДКС в качестве облучателей как правило применяются гофрированные рупоры. Такие рупоры сложны в изготовлении, но обладают симметричной ДН, низким уровнем кроссполяризации, широкополосны и позволяют получить высокий  $K_u$  [101].

В связи с тем, что рупор с шириной диаграммы направленности  $2 \times 9.5^\circ$  по уровню минус 24дБ получается слишком больших размеров для точного расчета в САПР, для оценки берется рупор, разработанный для 32-метровой антенны, и конфигурация лучевода с углом облучения  $2 \times 14^\circ$  и фокусным расстоянием  $f=1.75\text{м}$ . Характеристики рупора приведены далее в разделе 4.4. Задача расчета рупора в совокупности с зеркалом в САПР без применения суперкомпьютера, по-видимому, не решаема. В FEKO возможно в качестве источника задавать сохраненное в файл ближнее поле, однако сам рупор рассчитать имеющимися средствами невозможно, и возбуждение таким источником работает крайне медленно. В HFSS реализованы методы интегральных уравнений и физической оптики, но для такой задачи его применение также проблематично. Таким образом, для имеющихся вычислительных ресурсов применение совокупности возможностей САПР с разработанными ранее методами безальтернативно.

Определив коэффициенты разложения поля рупора в ряд по сферическим волнам, с применением разработанных алгоритмов рассчитываются поля в лучеводе. Результаты расчетов отраженного от второго зеркала поля в ближней и дальней зонах показаны на рис. 3.30-3.31.

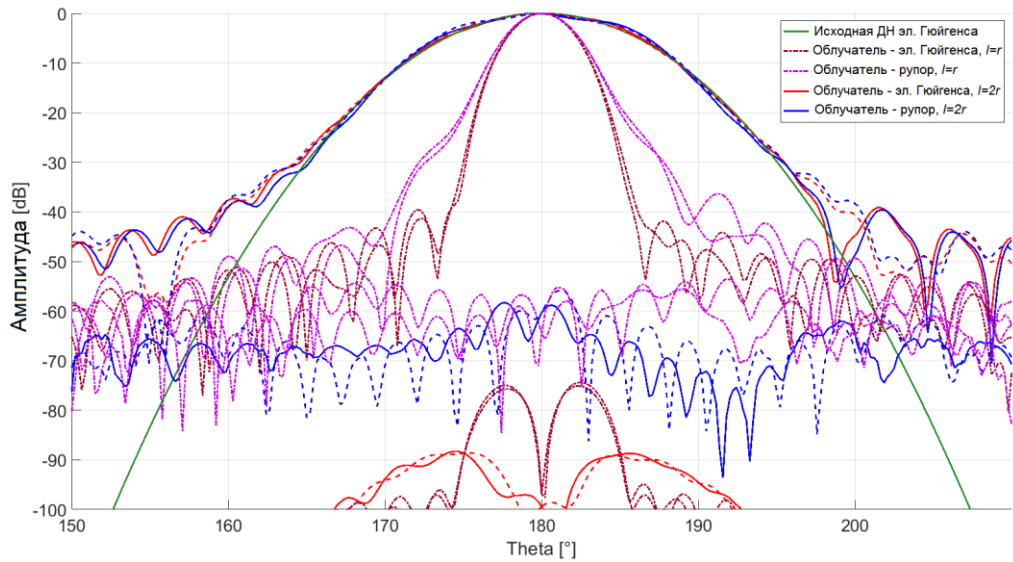


Рис. 3.30. Отраженное от второго зеркала поле на сфере в БЗ. Бордовые и фиолетовые кривые – поля при облучении идеальным источником и реальным рупором на расстоянии  $f$  от фокуса при  $\varphi=0^\circ$  и  $\varphi=90^\circ$ . Красные и синие кривые – поля при облучении идеальным источником и реальным рупором на расстоянии  $2f$  от фокуса при  $\varphi=0^\circ$  и  $\varphi=90^\circ$ . Зеленая кривая – облучающее поле идеального источника.

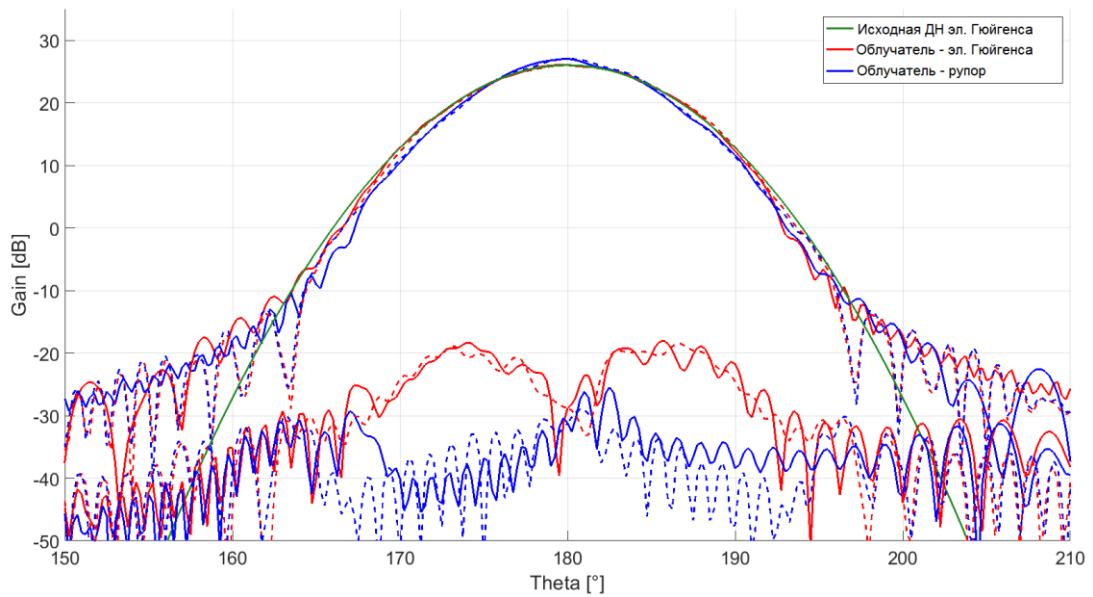


Рис. 3.31. Отраженное от второго зеркала поле на сфере в ДЗ. Красные и синие кривые – поля основной и кроссполяризации при облучении идеальным источником и реальным рупором при  $\varphi=0^\circ$  и  $\varphi=90^\circ$ . Зеленая кривая – облучающее поле идеального источника.

Из хорошей симметрии и низкого уровня кроссполяризации поля на выходе лучевода можно сделать важный вывод – при правильном подборе облучателя и методов расчета результаты расчетов полей лучевода для идеального облучателя и для реального рупора схожи. Это позволяет проводить эскизное проектирование с идеальным облучателем для заданного угла облучения, что существенно проще, чем расчет рупора под каждый конкретный угол и расчет лучевода с таким источником. При этом в лучеводе, удовлетворяющем геометрическим условиям сохранения симметрии поля и отсутствия кроссполяризации, при облучении реальным источником также поле также симметрично, кроссполяризация мала.



### 3.4 Выводы

В третьей главе представлено решение важных задач антенной техники с применением векторов Римана-Зильберштейна. Методы вычислительной электродинамики векторов Р-З, полученные в предыдущей главе, применяются для расчета электромагнитных полей и оценки эффективности зеркальных антенн и лучеводов. В рамках работы над главой:

- 1) написаны и отработаны расчетные алгоритмы в среде MATLAB;
- 2) верифицирована корректность получаемых результатов посредством сравнения с расчетами известных САПР и с экспериментом;
- 3) проведено сравнение эффективности расчета разными методами, на основании чего сделан вывод о возможности экономии расчетного времени с применением одного вектора Р-З;
- 4) разработаны методики учета отклонения поверхностей зеркал от теоретических и расчета полей в лучеводах с учетом распространения в кожухе.

На основании описанных исследований были получены результаты и сделаны выводы:

1) Решение практических задач рассеяния на проводящих телах можно проводить с применением лишь одного вектора Р-З с сохранением точности, что в совокупности с применением полученных ранее симметричных и простых выражений позволяет проводить расчет сложных многозеркальных систем без больших затрат вычислительных ресурсов.

2) Случайные отклонения зеркал двухзеркальной системы от теоретических приводят к меньшему снижению КИП по сравнению с оценкой по известной формуле Рузе. Двухзеркальный лучевод при этом более чувствителен к точности зеркал. Для инженерной оценки влияния СКО зеркал введены эмпирические формулы.

3) Введенный критерий оценки сходимости ряда обеспечивает хорошую точность, позволяя отбрасывать члены ряда малой мощности и сокращая расчетное время.

4) Кожух оказывает существенное влияние на распространяющиеся поля, степень которого зависит от его диаметра. Для минимизации влияния необходимо обеспечивать низкий уровень поля на стенках кожуха, а также возможно применение гофрированных участков.

5) Для качественной оценки функционирования лучевода можно применять идеализированную модель облучателя, которая при правильном проектировании облучателя с симметричной ДН и низким уровнем кроссполаризации близка к реальной.

Разработанные алгоритмы применяются в АО «ОКБ МЭИ» как отдельные программы электромагнитного анализа при создании антенных устройств, а также являются основой и применяются в дальнейшем для решения задачи анализа, расчета и оптимизации 32-метровой антенны дальней космической связи с многозеркальным лучеводом, разрабатываемой в рамках создания средств ДКС.

## **Глава 4. Проектирование и расчет лучевода 32-метровой антенны ДКС**

Заключительная глава посвящена проектированию, расчету и оптимизации 32-метровой антенны с лучеводным трактом. В главе описан разработанный метод построения двухзеркальных офсетных антенн и лучеводов, сохраняющих симметрию и отсутствие кроссполяризации исходного поля в геометрооптическом приближении, позволяющий проектировать лучевод с заданным коэффициентом трансформации угловой ширины пучка лучей. Формулируются исходные соображения при проектировании лучевода 32-метровой антенны, проведен векторный электродинамический расчет исходной конструкции с помощью разработанных методов. Далее произведена модификация лучевода с целью минимизации потерь, приведены результаты расчета с применением векторов Р-3 и сравнение с результатами электродинамического моделирования в САПР.

Проведены расчеты полей лучевода с учетом кожуха лучевода и отклонения поверхностей зеркал от теоретических. Описаны спроектированные частотно-селективная поверхность и рупорный облучатель, представлены результаты расчета полей и комплексной оценки эффективности для полной приближенной к реальной модели с учетом всех вышеперечисленных факторов. На основании результатов высокоточного расчета и сравнения с аналогами сделан вывод о преимуществах разработанной антенны.

### **4.1 Построение облучающей схемы 32-метровой антенны**

В рамках развития систем дальней космической связи с целью выполнения задачи освоения дальнего космоса, поставленной в Федеральной космической программе России на 2016-2025 годы, в АО «ОКБ МЭИ» проводятся работы по созданию большой высокоэффективной антенной системы. Был проведен анализ существующего парка антенн ДКС с зеркалами от 30 до 35м и задач, стоящих в части развития средств ДКС. Развитие технических средств ДКС в данный момент идет по пути в постепенной замены полноповоротных параболических антенн диаметром 64 метра (ТНА-1500) и 70 метров (П-2500) менее дорогостоящими, но эффективными антенными системами с меньшим диаметром зеркала (как правило, от 30 до 35 метров). Это связано с тем, что стоимость антенны пропорциональна диаметру главного зеркала в третьей степени (по оценке Б.А. Попереченко из ОКБ МЭИ, по некоторым другим данным – в степени 2.7 [102]). В связи с этим оказывается дешевле создавать антенные поля из антенн меньшего диаметра с применением корреляционной обработки сигналов, по крайней мере до тех пор, пока стоимость оборудования обработки невелика. Разрабатываемая антенная система должна обеспечить работу в X-диапазоне (7.1-7.25 ГГц передача, 8.4-8.5 ГГц прием) и Ka-диапазоне (31.8-32.3 ГГц передача, 34.2-34.7 ГГц прием) для приема и передачи информации с/на борт КА и обеспечивать высокую добротность системы.

По результатам анализа существующих антенн ДКС для разработки была выбрана двухзеркальная антенна с диаметром зеркала 32 метра с модифицированными профилями зеркал и лучеводным СВЧ-трактом. Преимущества концепции описаны в главе 1. Ряд таких антенн будут обеспечивать проведение фундаментальных научных исследований в дальнем космосе, в том числе по программам освоения Луны, программы «Спектр», «Экзомарс» и др.

Была проведена первоначальная проработка концепции построения антенны, в результате чего определены предварительные параметры антенны. Главный рефлектор – это осесимметричный параболоид диаметром 32 м с фокусным расстоянием 11.4 м, требуемое СКО профилей зеркала не более 0.3 мм. Первоначальный вариант конструкции антенны с лучеводом показан на рис. 4.1.

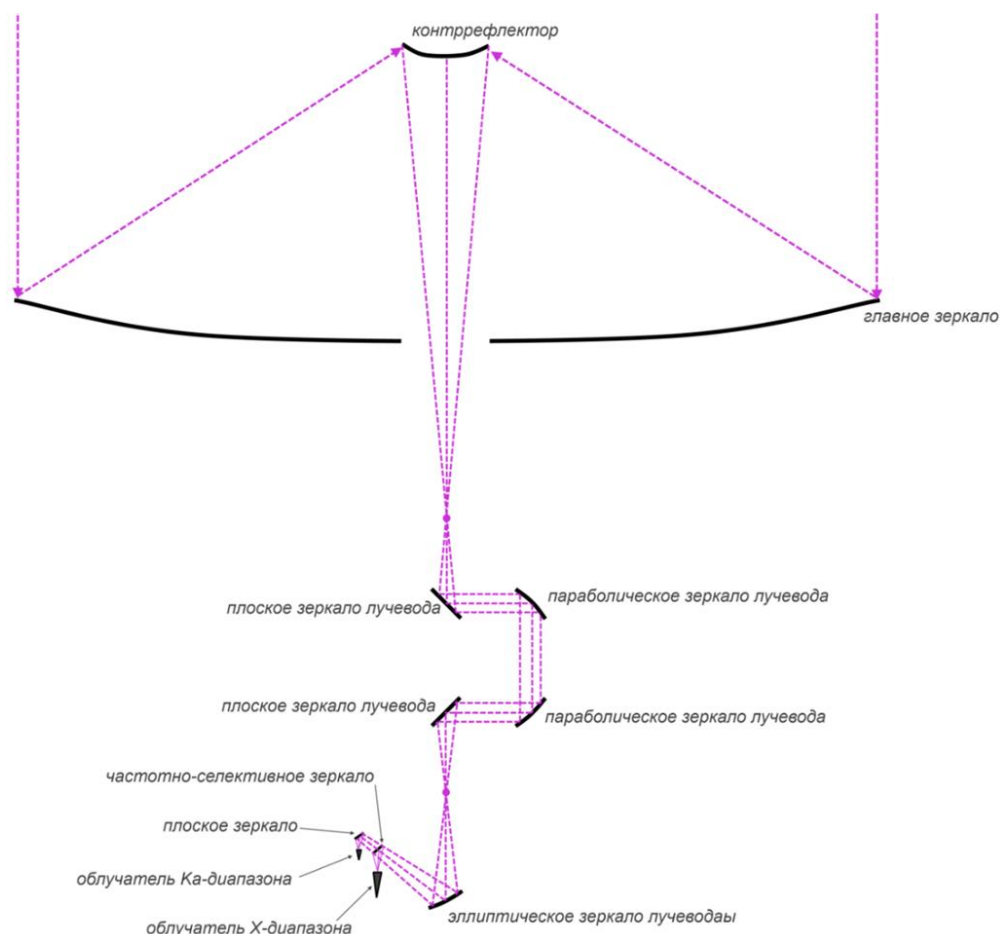


Рис. 4.1. Первоначальный вариант облучающей схемы 32-метровой антенны с лучеводом

Для повышения КИП главный рефлектор и контррефлектор больших антенн ДКС обычно формируют по методу модифицированных профилей зеркал (англ. dual reflector shaping), у которых профиль главного рефлектора несколько отличается от параболического, а профиль контррефлектора не является поверхностью второго порядка – эллипсоидом или гиперболоидом. Такой выбор делается с целью получения равномерного амплитудно-фазового распределения в апертуре, уменьшения затенения излучения контррефлектором и упрощения конструкции облучателя. Дело в том, что для эффективного облучения классической антенны с

параболическим рефлектором и эллиптическим или гиперболическим контррефлектором, диаграмма направленности облучателя должна быть столообразной формы с резким спаданием уровня облучения краев контррефлектора. В рассматриваемом варианте предполагается облучение контррефлектора с помощью рупора и лучевода, для которых распределение поля вдоль контррефлектора имеет гауссову форму (далекую от столообразной). При таком распределении выбор варианта с модифицированными профилями зеркал безальтернативен. Подробно методика расчета специального профиля рефлектора и контррефлектора описана, например, в [11]. В АО «ОКБ МЭИ» реализована программа расчета таких профилей, а также оптимизации облучателей для них.

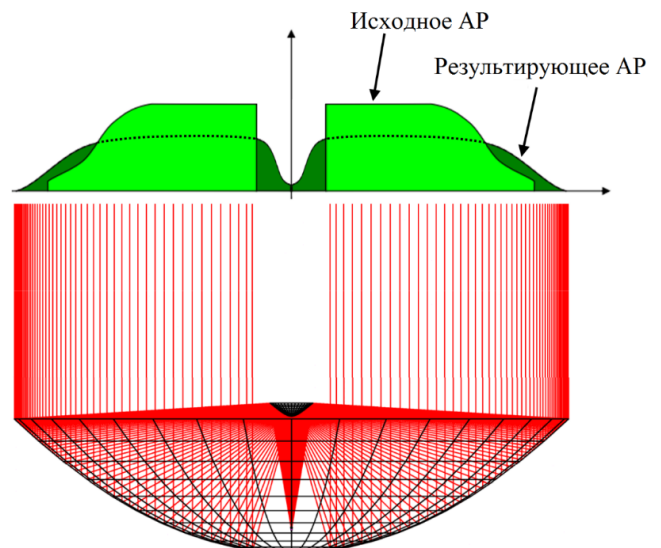


Рис. 4.2. Схематическое изображение хода лучей и амплитудного распределения поля в апертуре двухзеркальной антенны с стандартными и модифицированными профилями.

Далее обратимся к проектированию лучевода. В качестве исходной была взята известная геометрия лучевода, в которой верхняя часть, состоящая из двух вырезков из параболоидов и двух плоских зеркал, построена в соответствии с критерием Мизусавы. Нижняя часть лучевода состоит из эллиптического, частотно-селективного и плоского зеркал.

На схеме рис. 4.3  $F_1$  – вторичный фокус антенны, где в обычной конструкции располагается облучатель,  $F_2$  – нижний фокус, после прохождения лучевода,  $R_1$  – верхнее плоское зеркало, наклонённое под углом  $45^\circ$ ,  $R_2$  – верхнее параболическое зеркало,  $R_3$  – нижнее параболическое зеркало,  $R_4$  – нижнее плоское зеркало. Нижний фокус  $F_2$  – это фокус нижней параболы, отражённый в нижнем плоском зеркале. Оси параболических зеркал параллельны азимутальной оси (вертикальны), следовательно, ось «отражённой» параболы, проходящая через  $F_2$  – горизонтальна. Эллиптическое зеркало предназначено для переотражения луча из фокуса  $F_2$  в рупору облучателя. Желательно, чтобы при этом переотражении выполнялись условия компенсации кроссполяризации (симметричная диаграмма направленности рупора должна преобразовываться в симметричный гауссов пучок). Примерная геометрия лучей вблизи нижнего эллиптического зеркала приведена на рис. 4.3. На луче, идущем от эллиптического зеркала, размещается селективное зеркало, отражающее поле в рупор X-диапазона и пропускающее поле Ka-диапазона, и плоское зеркало, отражающее в рупор Ka-диапазона.

Недостаток такой схемы лучевода заключается в том, что при отражении от нижнего эллиптического зеркала распространяющаяся волна претерпевает искажения – появляется

кроссполяризационная составляющая и нарушается симметрия. В связи с этим в дальнейшем был разработана другая концепция нижнего лучевода на основе двух вырезов из поверхностей вращения второго порядка. Это дает возможность компенсировать искажения в геометрооптическом приближении.

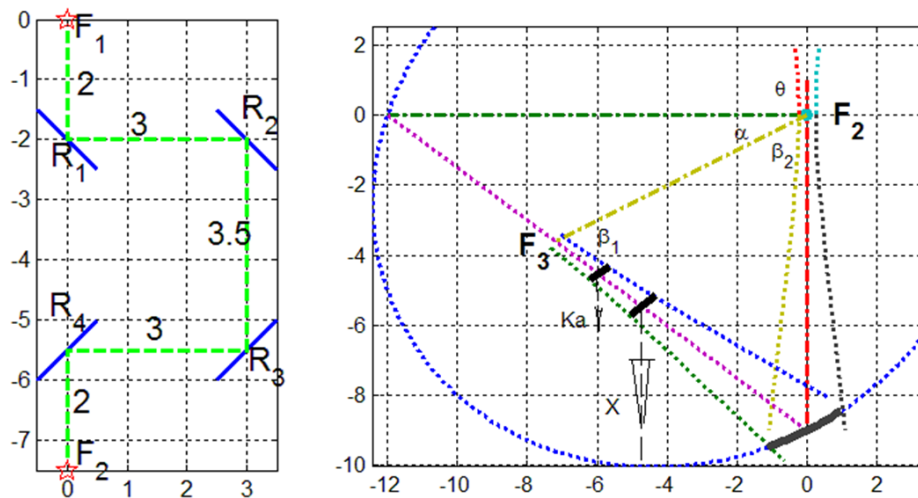


Рис. 4.3. Схема расположения параболических зеркал верхнего лучевода и распространение гауссовых пучков в нижнем лучеводе.

#### 4.2 Принципы построения двухзеркальных несимметричных антенн и лучеводов, сохраняющих свойства симметрии диаграммы направленности и отсутствия кроссполяризации. Электродинамический расчет лучевода 32-метровой антенны

Существуют несколько критериев построения конфигурации лучевода, сохраняющего свойства симметрии диаграммы направленности и отсутствия кроссполяризации входного пучка лучей. Все они получены в геометрооптическом приближении. Критерий Мизусавы имеет недостаток в том, что он также накладывает ограничение и делает невозможной трансформацию ширины пучка лучей. Критерий, полученный Драгоне, имеет сложное доказательство, и не универсален – отсутствует методика синтеза лучевода по заданной замкнутой конфигурации лучей, поэтому не применяется на практике. Для максимизации эффективности функционирования проектируемой антенны была разработана методика синтеза двухзеркального лучевода, сохраняющего свойства симметрии диаграммы направленности и отсутствия кроссполяризации входного пучка лучей.

##### 4.2.1. Геометрооптические условия сохранения свойства симметрии диаграммы направленности и отсутствия кроссполяризации.

Исходным пунктом методики служит геометрооптическое условие Драгоне, но предлагается иной подход к доказательству отсутствия кроссполяризации, основанный на определении Людвига [16] и на точном вычислении угла поляризационных искажений [103]. Одним из результатов является понимание того, в каком смысле формула Драгоне для коэффициента преобразования ширины пучка лучей распространяется на пучки произвольной

ширины. Далее будет показано, что условия Мизусавы выполняются при выполнении условий Драгоне в случае равенства угловых ширин пучков на входе и выходе. Предлагается новая методика синтеза двухзеркальных антенн и лучеводов с заданным коэффициентом трансформации ширины пучков, сохраняющих в выходном пучке лучей симметрию и отсутствие кроссполяризации входного пучка [104, 105, 106]. Там же приведены результаты анализа двухзеркальных лучеводов, построенных по разработанной методике, характеристики которых подтверждены расчётом численными методами с учётом дифракционных эффектов.

Согласно определению Людвиг [16], антенна линейной поляризации является *поляризационно-чистой*, если вектор электрического поля в её диаграмме направленности в сферической системе координат может быть описан формулой  $E = A(\vartheta, \varphi)(\cos\varphi e_\vartheta - \sin\varphi e_\varphi)$ , где  $A(\vartheta, \varphi)$  – скалярная функция, описывающая амплитудную диаграмму направленности. Векторы  $e_\vartheta, e_\varphi$  ортогональны оси такой антенны, которую будем называть *осью поляризации*. Антенна не будет поляризационно-чистой относительно оси другого направления.

Вуд [87] получил правило вычисления угла кроссполяризации в точке  $(\vartheta, \varphi)$  системы координат при повороте оси поляризации. Для вывода применяются некоторые формулы сферической геометрии, так как волновые фронты любой антенны в дальней зоне – сферические, а векторы электромагнитного поля касательны к этим сферам. На рис. 4.4 ось  $Z$  – первоначальное направление оси поляризации поляризационно-чистой антенны, а  $Z'$  – направление, отклонённое от первоначального положения на угол  $\vartheta_0$ . В произвольной точке  $M = (\vartheta, \varphi)$  вычисляем угол  $\varepsilon$  между вектором  $\mathbf{E}$  до поворота антенны и  $\mathbf{E}'$  после поворота.  $(\vartheta', \varphi')$  – координаты точки  $M$  в повернутой сферической системе с осью  $Z'$ . Угол  $\varepsilon$  в сферической геометрии называется *сферическим избытком*, который определяется выражением [103, 104]:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{cosec} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi \quad (4.1)$$

Кроме (4.1) для доказательства потребуется теорема о поляризационной структуре элемента Гюйгенса, отражённого от поверхности второго порядка. Эта теорема получена в [103], её доказательство в [104]:

*Пусть поляризационно-чистый источник помещён в один из фокусов  $F_1$  гиперboloида или эллипсоида, а его ось поляризации  $F_1M$  отклонена от фокальной оси  $F_1F_2$  рассматриваемой поверхности на некоторый угол. Тогда источник отражённого поля во втором фокусе  $F_2$  также идеально поляризован, а его ось поляризации  $F_2M'$  отклонена от фокальной оси на угол, определяемый направлением на виртуальную точку  $M'$  пересечения исходного луча с поверхностью.*

Итак, поляризационно-чистый источник после отражения от поверхности 2-го порядка остаётся поляризационно-чистым с легко определяемым направлением оси поляризации. Чтобы

в диаграмме такой антенны кроссполаризационные искажения отсутствовали, виртуальная точка  $M'$  пересечения центрального луча с гиперболой должна лежать на фокальной оси параболоида.

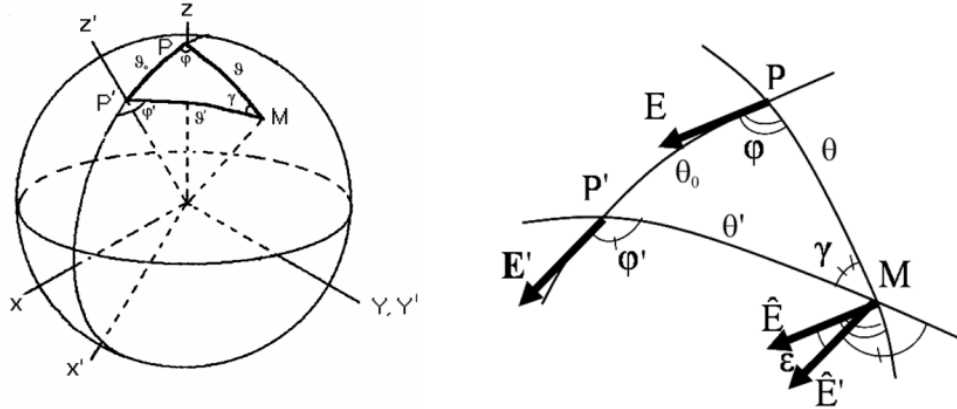


Рис. 4.4. К определению угла кроссполаризационных искажений – сферический треугольник.

Построение лучевода по заданной замкнутой траектории.

Покажем, что для двухзеркальной системы произвольная заданная замкнутая траектория лучей однозначно определяет геометрию системы. На рис. 4.5 показаны возможные замкнутые траектории лучей с 4-мя точками отражения. В траектории можно выделить реальные (например,  $A_1$  и  $A_2$ ) и виртуальные точки отражения ( $B_1$  и  $B_2$ ). Точка пересечения лучей  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  обозначена буквой  $F$  – это общий фокус поверхностей второго порядка. Содержащейся в геометрии полной траектории информации достаточно, чтобы единственным образом построить лучевод, то есть найти положение двух недостающих фокусов, эксцентриситеты и другие параметры зеркал. В двух фокусах, расположение которых предстоит определить, расположены фазовые центры источника и приёмной антенны – элементы Гюйгенса с осями, направленными вдоль входного и выходного лучей.

Рассмотрим конфигурацию лучевода, состоящую из двух эллипсоидов (Рис. 4.5 (а)). Фокус эллипса  $F_1$  должен лежать на стороне  $A_1B_1$ . В [104] приведен вывод соотношений для нахождения положения фокусов и эксцентриситетов

$$|F_1A_1| = (|B_1A_1| + |FB_1| - |FA_1|)/2; |F_2A_2| = (|B_2A_2| + |FB_2| - |FA_2|)/2$$

$$e_1 = c_1/a_1; e_2 = c_2/a_2 \quad (4.2)$$

При заданных фокусах, длинах больших осей и эксцентриситетов профили зеркал, проходящих через четырёхугольник  $B_1A_1A_2B_2$ , определены. Для эллипсоида и гиперboloида

$$|F_2A_2| = (|B_2A_2| + |FA_2| - |FB_2|)/2$$

$$e_2 = c_2/a_2 = |FF_2|/a_2 \quad (4.3)$$

Для нахождения положения фокусов, фокальных расстояний и вершин парабол, образующих зеркала лучеводов для представленных на рис. 4.5 (в) и (г) конфигураций, нужно использовать свойство параболы. Достаточно построить параболу по заданному направлению фокальной оси (на рис. 4.5 (д) – направление сторон  $AA_1$  и  $BB_1$ ) и положениям двух её точек ( $A$

и В), на линии которых находится фокус F. Точки А и В лежат на параболе, F – её фокус,  $f$  – фокальное расстояние. Известна длина хорды  $|AB|$ . Парабола – это геометрическое место точек, равноудалённых от фокуса F и директрисы d-d. Опустим перпендикуляр из точки В в точку Р на стороне AA<sub>1</sub>. При заданной траектории AA<sub>1</sub>V<sub>1</sub>B нам известны длины  $|AB|=l$  и  $|AP|=p$ . Тогда

$$|FB|=|Vd|=(l-p)/2; \quad |FQ|=p(l-p)/2l; \quad f=(l^2-p^2)/2l \quad (4.4)$$

Таким образом, информации о положении четырёх точек отражения входного и выходного лучей от поверхностей вращения второго порядка, соответствующих замкнутой траектории лучей, достаточно для однозначного определения геометрических параметров системы из двух зеркал, сохраняющих симметрию лучей, и не создающих кроссполяризационной составляющей при облучении поляризационно-чистым источником.

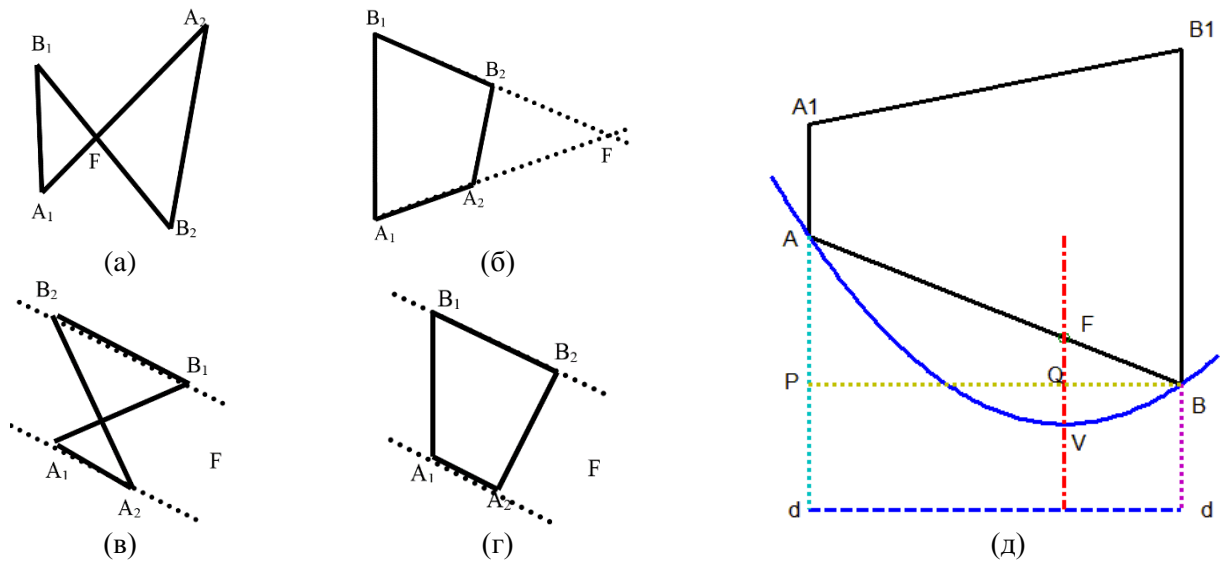


Рис. 4.5. Конфигурации лучевода. Два эллипсоида (а), эллипсоид и гиперboloид (б), два параболоида (в, г), геометрия для определения параметров параболоида (д).

Соотношение ширин входного и выходного пучков лучей и обратная теорема Мизусавы

Найдём соотношение, характеризующее связь угловых ширин входного и выходного пучков лучей. На рис. 4.6 показаны траектории лучей в лучеводе, образованном двумя эллипсоидами с общим фокусом. Кроме траектории центрального луча показан один отклонённый луч. Источник расположен в фокусе F<sub>1</sub>, приемная антенна – в фокусе F<sub>2</sub>. Реальная траектория центральных лучей F<sub>1</sub>A<sub>1</sub>FA<sub>2</sub>F<sub>2</sub> показана жирной линией, виртуальная F<sub>2</sub>B<sub>2</sub>FB<sub>1</sub>F<sub>1</sub> – пунктирной линией, лучи F<sub>1</sub>C<sub>1</sub>FC<sub>2</sub>F<sub>2</sub>, отклонённые от центрального, показаны тонкой сплошной линией. Реальные (центральные) лучи образуют с фокальными осями эллипсов углы β<sub>1</sub> в фокусе F<sub>1</sub>, β<sub>2</sub> в фокусе F – для первого эллипса, β<sub>3</sub> в фокусе F, β<sub>4</sub> в фокусе F<sub>2</sub> для второго эллипса. Виртуальные лучи образуют с фокальными осями углы β<sub>1</sub>', β<sub>2</sub>', β<sub>3</sub>', β<sub>4</sub>' соответственно. Углы, образованные центральными лучами с боковыми, отклонёнными от центральных, обозначим Δ<sub>1</sub>, Δ<sub>2</sub>, Δ<sub>3</sub>, Δ<sub>4</sub> соответственно.



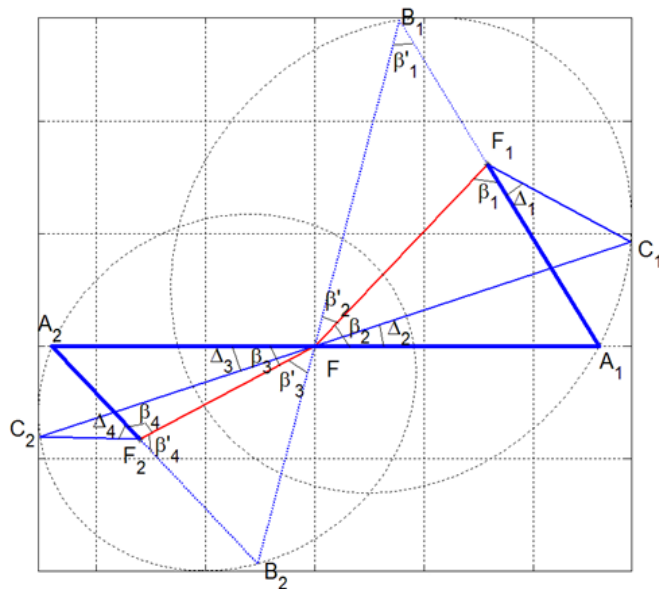


Рис. 4.6. Траектории лучей в лучевом, образованном двумя эллипсоидами с общим фокусом F.

Можно показать, что отношение тангенсов полуширин входного и выходного пучков, независимо от конкретной величины угловой ширины пучков, определяется выражением, в которое входят лишь углы, составленные центральными лучами и фокальными осями [104, 105]:

$$M = \operatorname{tg} \frac{\Delta_4}{2} / \operatorname{tg} \frac{\Delta_1}{2} = \frac{\sin \beta_2 \sin \beta_4}{\sin \beta_1 \sin \beta_3} \quad (4.5)$$

Если в лучевом, построенному по вышеуказанному критерию, угловые ширины входного и выходного пучков равны между собой, что равносильно  $M = 1$ , то выполняются условия Мизусавы [104].

#### 4.2.2. Антенна с модифицированным двухзеркальным нижним лучеводом.

В соответствии с приведенным выше критерием был построен лучевод с нижней частью, состоящей из двух параболических зеркал. Общая геометрия лучевода изображена на рис. 4.7.

Для проектирования необходимо задаться габаритными размерами лучевода и зеркальной системы. На этом этапе необходима предварительная конструкторская проработка здания, в котором будет располагаться лучевод – определение габаритов зеркал с каркасом, соответствующих минимальному затенению и оптимальному облучению, определение предельных размеров нижнего помещения, размеров лучеводных кожухов и т.д. Также на первом этапе была рассчитана геометрия двухзеркальной системы в геометрооптическом приближении, определены профили зеркал и углы облучения зеркала. В соответствии с этим расчетом половина угла облучения контррефлектора составляет  $5.18^\circ$ , уровень амплитуды поля на краю контррефлектора должен быть от -10 до -12дБ.

Для синтеза двухзеркального лучевода из двух парабол был разработан расчетный алгоритм. В качестве исходных данных мы задаем угол между осями парабол, необходимые ширины входного и выходного пучков лучей (ширину входного пучка и коэффициент

трансформации  $M$ ), а также  $r_0$  – расстояние от центра параболического зеркала до фокуса. Требуемая ширина выходного пучка лучей была рассчитана в предположении распространения гауссовых пучков от фокуса  $F_3$  до фокуса  $F_2$  с целью получения необходимого поля облучения контррефлектора (рис. 4.7). Также исходя из конструктивных соображений задается расстояние между центрами нижних параболических зеркал.

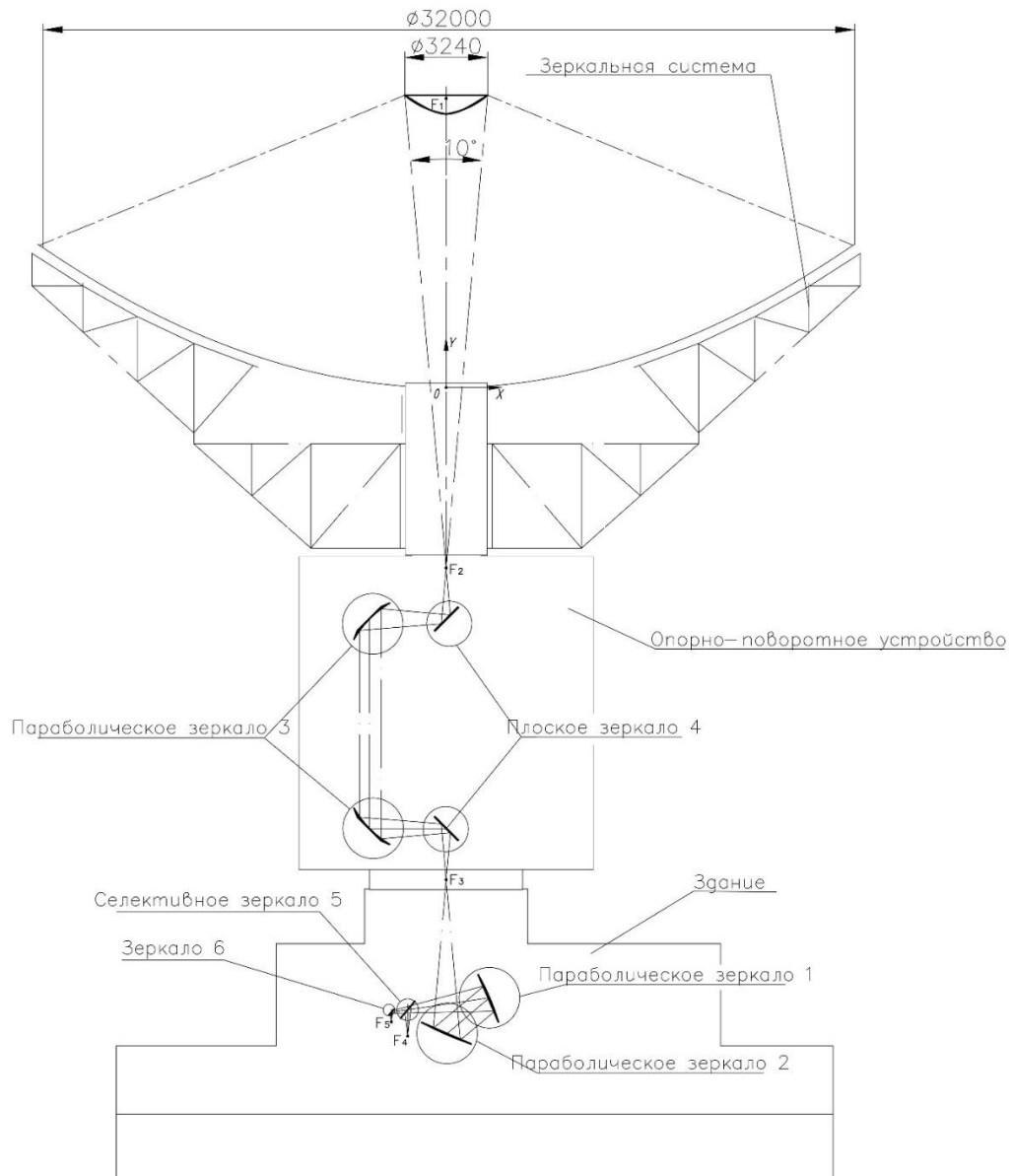


Рис. 4.7. Исходный расчетный вариант 32-метровой антенны.

Параметры зеркал:  $f$  – фокусное расстояние параболы;  $\theta_0$  – угол отклонения центрального луча от фокальной оси;  $d\theta$  – полураствор конуса падающих лучей;  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $h_{\max}$  – параметры эллипса, вырезаемого пучком лучей из параболоида.

Первое зеркало – ближайшее к рупору, последнее – перед контррефлектором. В расчетной модели не учитываются плоское и частотно-селективные зеркала, расположенные непосредственно над рупорами и перенаправляющие волну на первое параболическое зеркало.

Таблица 4.1. Параметры зеркал лучевода.

Номер зеркала	Тип	$f$ , м	$\theta_0$ , град	$d\theta$ , град	$a_0$ , м	$b_0$ , м	$h_{\max}$ , м
1	Параболическое	3.7869	33.1513	13.07	0.9877	0.9455	0.0565
2	Параболическое	5.0518	46.845	9.0012	1.0317	0.9456	0.0405
3	Плоское	-	45	-	0.65	0.44	-
4	Параболическое	2.5	90	9	1.1269	0.7919	0.0441
5	Параболическое	2.5	90	9	1.1269	0.7919	0.0441
6	Плоское	-	45	-	0.65	0.44	-

Таким образом, на начальном этапе был спроектирован облик двухзеркальной системы и лучевода, определены размеры зеркал в предположении распространения гауссовых пучков. Такое приближение, как будет показано далее, имеет довольно существенную погрешность определения угловой ширины пучков на низких частотах (X-диапазон), в связи с чем необходим более точный расчет, проводимый с помощью разработанных ранее методов и алгоритмов. В связи с тем, что ожидаемые дифракционные потери за счет распространения в лучеводе в Ка-диапазоне будут меньше (более строго выполняются приближения ГО и гауссовых пучков, что подтверждается результатами экспериментов в Ка-диапазоне, описанных в [10]), а задача расчета лучевода на высоких частотах чрезвычайно ресурсоемкая, анализ и оптимизация лучевода и зеркальной системы проводятся в X-диапазоне частот. В Ка-диапазоне при этом будет проведена расчетная оценка эффективности на основании экстраполяции данных, полученных в низкочастотном расчете. Ожидается, что основной вклад в снижение эффективности на высоких частотах будут вносить неточности изготовления – отклонения поверхностей зеркал от теоретических, зазоры между щитами рефлектора и погрешность юстировки зеркал. В Ка-диапазоне необходимо осуществлять юстировку лучевода и определять допуски на взаимное положение зеркал, для чего в АО «ОКБ МЭИ» разработана специальная методика.

В главе 1 было приведено общее описание лучеводных систем и методов, традиционно применяемых для анализа электромагнитных полей лучеводов. Как правило, проводят скалярный расчет одним из асимптотических методов или векторный расчет методом физической оптики, не учитывающие многих источников искажений. Применяемый для расчета спроектированного лучевода подход основан на применении представления электромагнитного поля векторами Р-З и метода разложения на сферические волны с расчетом коэффициентов разложения по токам на зеркалах и применением свойства независимости векторов. Расчетный алгоритм схож с алгоритмом расчета двухзеркальной антенны и двухзеркального лучевода, описанные в разделах 3.2-3.3, или, например, в [85]. В математической модели имеются следующие основные допущения:

- поверхностный ток рассчитывается в приближении физической оптики;
- поверхности зеркал и рупора – идеальный металл;
- не учитываются вторичные переотражения;

- расчет на начальном этапе ведется для зеркал в свободном пространстве.

На рис. 4.8 изображена модель лучевода, а также ход лучей в нижнем и верхнем участках лучевода (далее по тексту – нижний и верхний лучеводы).

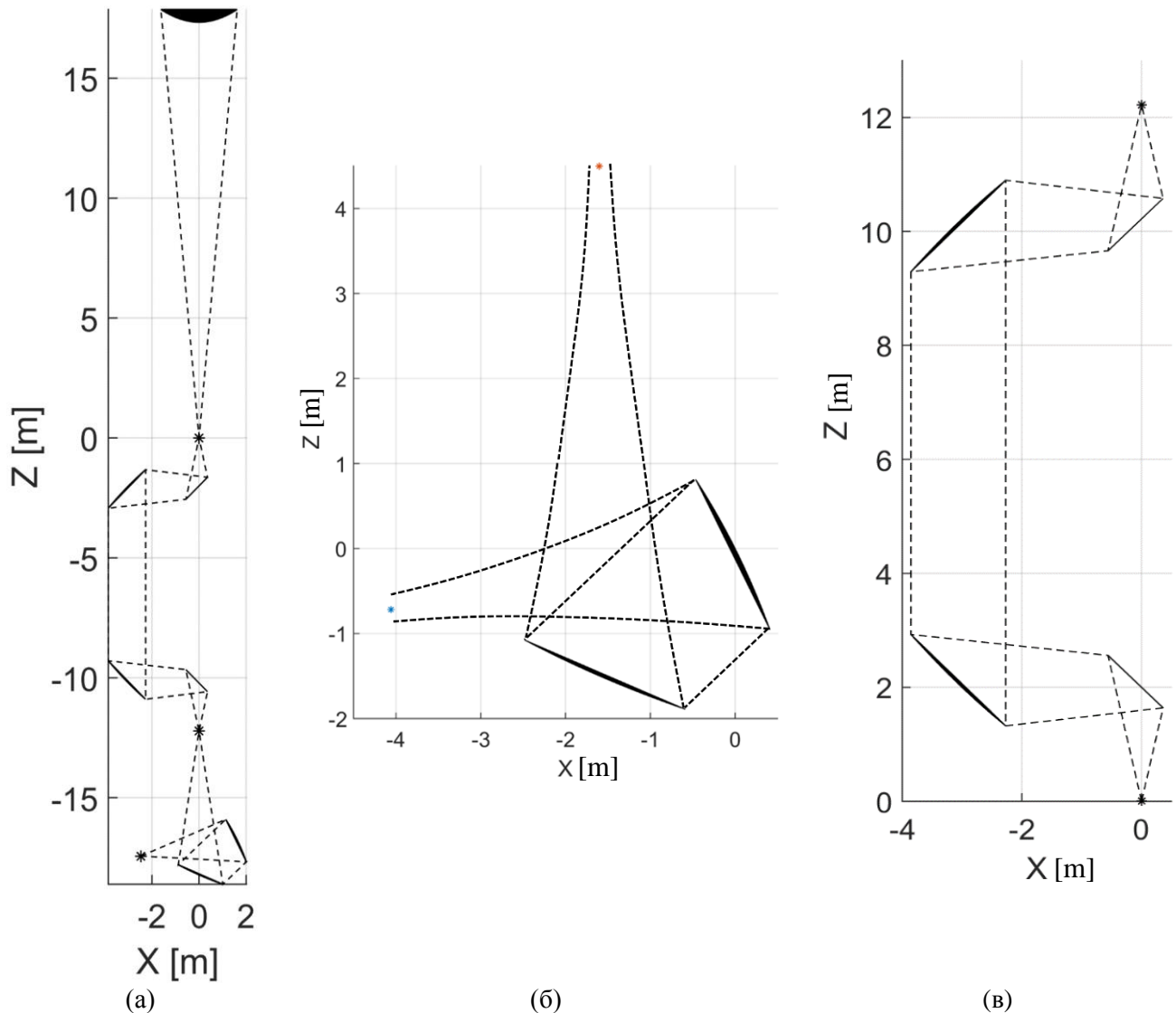


Рис. 4.8. Лучевод. Общий вид с ходом лучей (а); нижний лучевод с ходом гауссова пучка (б); верхний лучевод с ходом лучей (в).

Расчет проводится последовательно – вычисляются поля в лучевode от облучателя к контррефлектору методом собственных функций. В качестве облучателя так же, как и в разделе 3.3, применяется идеализированная модель – точечный источник с поляризационной диаграммой такой же, как у элемента Гюйгенса. В соответствии с результатами раздела 3.3, такая модель довольно точна при правильном подборе облучателя, однако в дальнейшем будет проведен расчет с реальным облучателем – гофрированным рупором. Отметим, что существующие антенны с лучеводами NASA и ESA рассчитывались в приемном режиме – проводился расчет полей зеркальной системы и лучевода при падении плоской волны на главное зеркало, и оценивалась мощность, проходящая в нижний фокус лучевода. Такой подход не учитывает характеристики облучателя и также вносит погрешность в расчет.

Спад амплитуды поля на краю первого зеркала лучевода выбирается равным от -20дБ до -26дБ, что является традиционным для лучеводов. Требования к характеристикам облучателя:

- симметричная во всех плоскостях амплитудная ДН заданной ширины;
- минимальный уровень кроссполаризационной составляющей.

Поле облучателя

$$E_{\vartheta}(\vartheta, \varphi) = \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right)^{159} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad E_{\varphi}(\vartheta, \varphi) = \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right)^{159} (-i \cos \varphi - \sin \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (4.6)$$

#### 4.2.3. Расчет лучевода в X-диапазоне.

Задав сторонние токи – диаграмму облучателя, и геометрию лучевода, можно переходить к расчету. Первый этап – расчет нижнего лучевода, который включает в себя расчет токов и разложений в ряд двух нижних зеркал. Для удобства расчета можно осуществлять поворот зеркал в пространстве и составляющих поля или токов по формулам

$$\begin{cases} J'_{x\pm} = J_{x\pm} \cos(\theta) + J_{z\pm} \sin(\theta) \\ J'_{y\pm} = J_{y\pm} \\ J'_{z\pm} = -J_{x\pm} \sin(\theta) + J_{z\pm} \cos(\theta) \end{cases} \quad (4.7)$$

Результаты расчета распределений основной и кроссполаризационной составляющих вектора Пойнтинга на выходе нижнего лучевода представлены на рис.4.9. Плотность потока мощности кроссполаризационной составляющей имеет уровень минус 50дБ от основной.

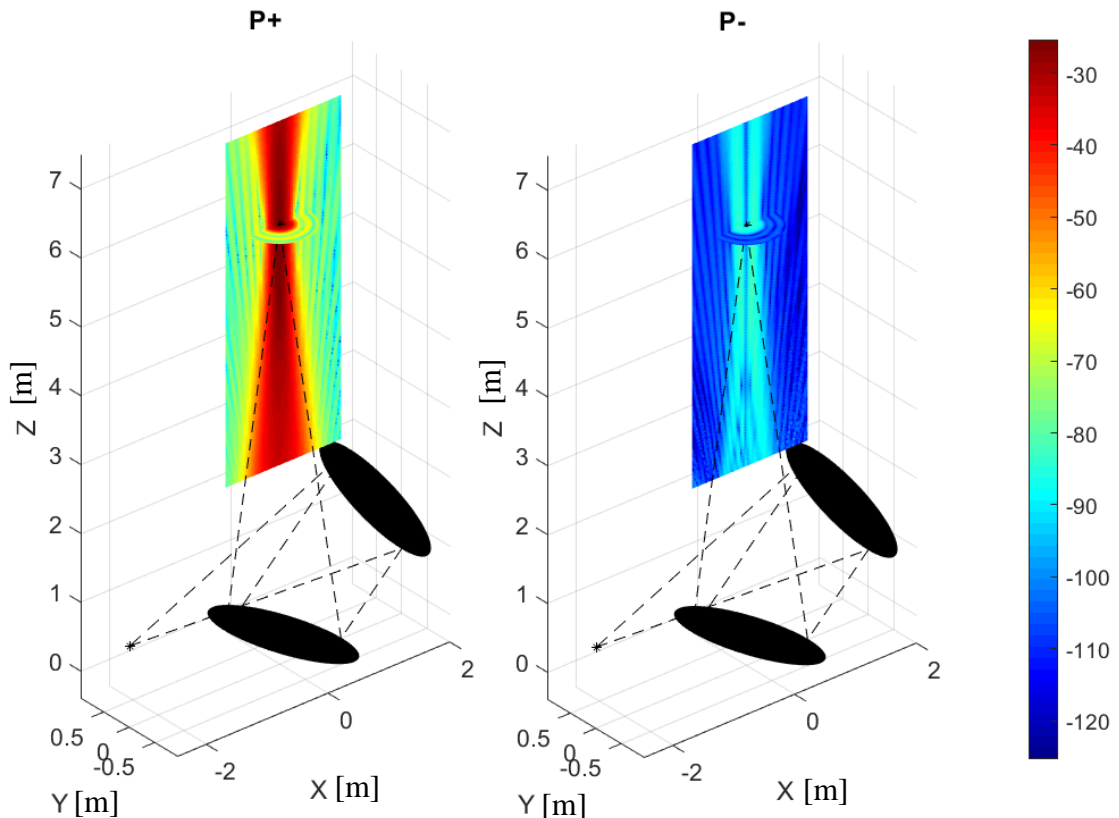


Рис. 4.9. Распределение модуля вектора Пойнтинга основной и кроссполаризационной составляющих в нижнем лучеводе в плоскости, перпендикулярной фокальной.

Далее переходим к расчету верхнего лучевода. На рис. 4.10 изображена геометрия верхнего четырехзеркального лучевода с «апертурами» зеркал – контрольными сечениями лучевода, в которых проводится анализ распределения поля.

На данном этапе отметим важное свойство применяемого подхода – возможность определить реальную ширину распространяющихся пучков лучей и уровень поля для оптимизации конструктивных элементов антенны. Например, задавшись уровнем поля на краю пучка минус 30дБ, можно определить необходимый конструктивный размер элементов – труб, перегородок, не приводящих к значительному ухудшению характеристик. Распределения составляющих поля в указанных сечениях приведен на рис. 4.11. Для минимизации влияния элементов конструкции их диаметр должен быть близок к 2м. Отметим также некоторую стабилизацию характеристик при распространении в участке с плоским фронтом от первого сечения ко второму, и снижение побочных составляющих поля.

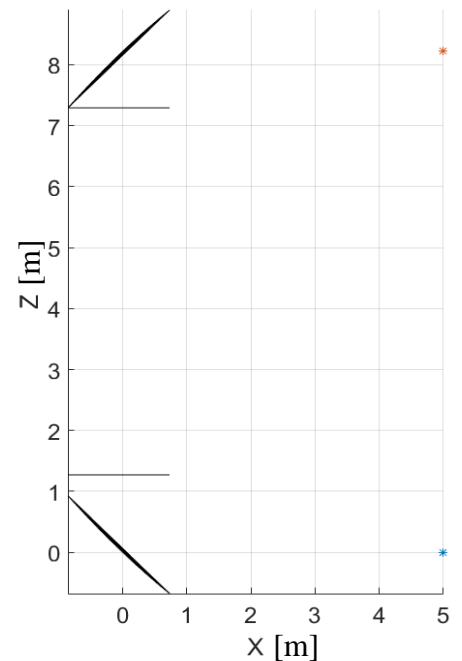


Рис. 4.10. Анализируемые сечения верхнего лучевода

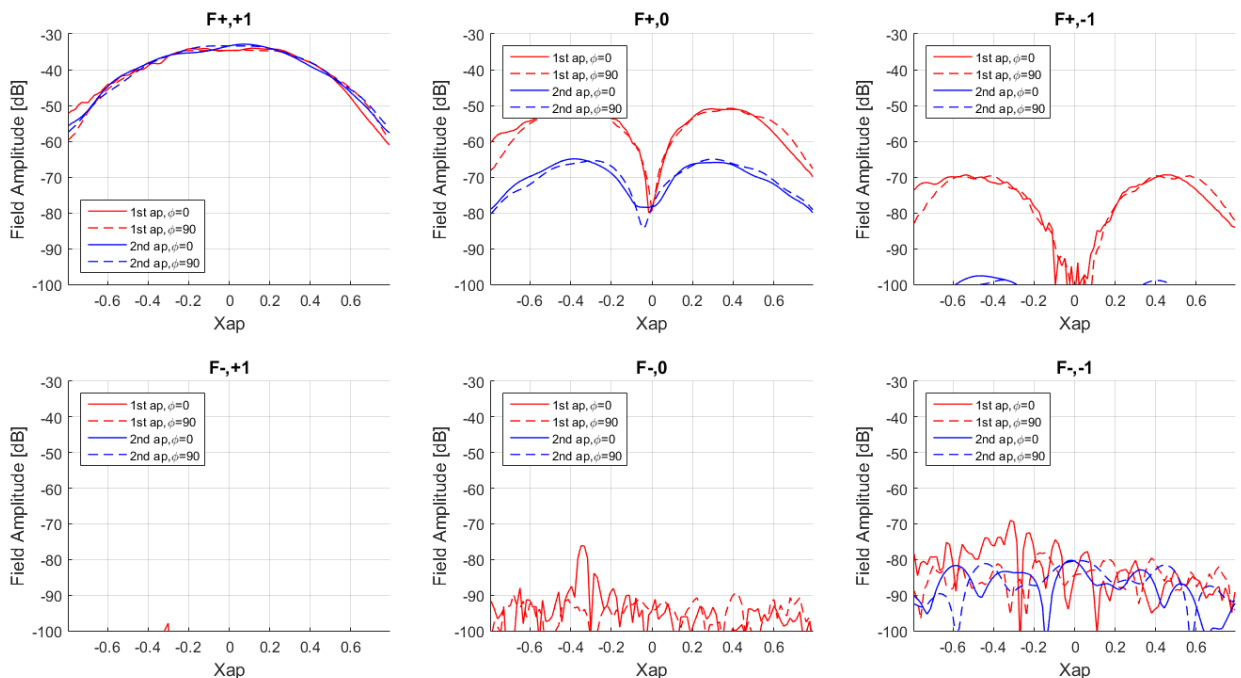


Рис. 4.11. Спиральные векторные составляющие поля в сечениях верхнего лучевода. Красные кривые – нижнее сечение, синие – верхнее сечение.

Далее определяется поле на наиболее важном участке – на выходе лучевода. Результаты расчета векторных спиральных составляющих поля на сфере, проходящей через края контррефлектора, приведены на рис. 4.12. Уровень облучения края контррефлектора составляет

порядка минус 6дБ от поля в максимуме. Несмотря на равномерное распределение фазы в пределах угла облучения и низкий уровень кроссполяризации, уровень такое облучения является слишком высоким, что приводит к значительным потерям за счет переливания. Результаты расчетов потерь на всех зеркалах и в контрольных сечениях лучевода сведены в таблицу 4.2.

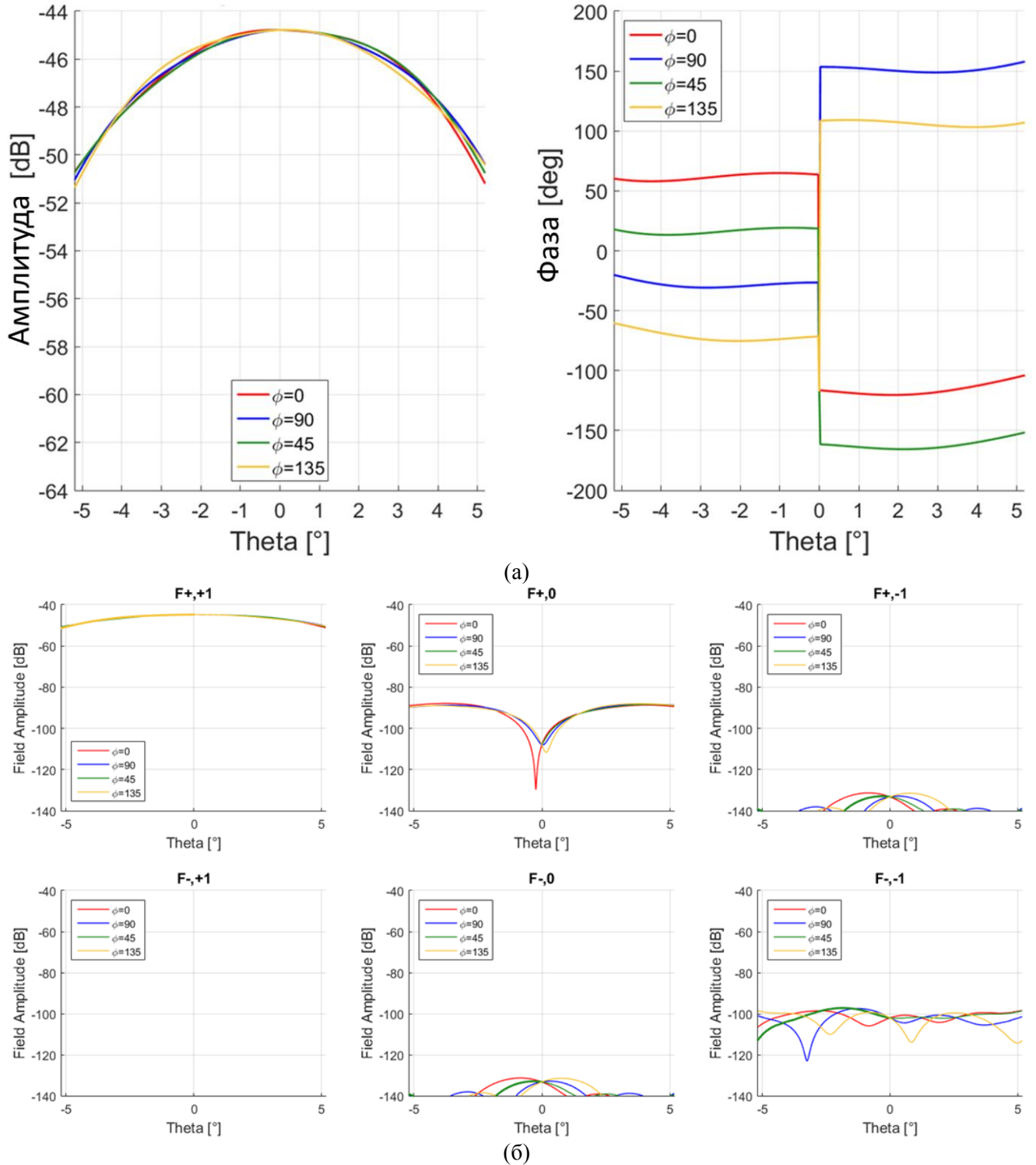


Рис. 4.12. Составляющие поля в апертурах. Спиральные векторные составляющие (а); амплитуда и фаза основной составляющей (б). Красные кривые – первая апертура, синие – вторая апертура.

Таблица 4.2. Потери в лучевом.

Анализируемое сечение	$P_+$ , Вт	$P_-$ , Вт	Потери, дБ
Исходная мощность	1.00	0.00	-
1ое зеркало	0.96	0.00	0.002
2е зеркало	0.00	0.95	0.22
Нижний фокус	0.95	0.00	0.24
3е зеркало	0.00	0.93	0.30
4е зеркало	0.92	0.00	0.36
Апертура 4го зеркала	0.92	0.00	0.38
Апертура 5го зеркала	0.91	0.00	0.40
5е зеркало	0.00	0.91	0.41
6е зеркало	0.90	0.00	0.44
Верхний фокус	0.90	0.00	0.44
Сфера, проходящей через края контррефлектора	0.73	0.00	1.38
Контррефлектор	0.73	0.00	1.38

Анализируя получившиеся данные, можно сделать следующие выводы.

- 1) Первоначальное приближение гауссовых пучков, в рамках которого был определен общий облик системы и рассчитаны профили зеркал, дает значительную погрешность при анализе многозеркального лучевода даже в пределах главного лепестка диаграммы, что в конечном итоге привело к расширению пучка лучей и значительным потерям за счет переливания мощности за края зеркал.
- 2) Получившиеся потери в 1.38дБ являются недопустимыми – в X-диапазоне при мощности передатчика 20кВт потери полезной мощности составят 5.5кВт.
- 3) Результаты численного моделирования в ФЕКО подтвердили получившийся результат.
- 4) Необходима коррекция геометрии лучевода и зеркальной системы с целью уменьшения потерь. Вариант коррекции одной лишь зеркальной системы с целью увеличения угла облучения контррефлектора не подходит, так как вся зеркальная система рассчитывается в совокупности с облучателем – выходным полем лучевода, в связи с чем необходим пересчет лучеводной и зеркальной систем.
- 5) Для уточнения расчетов необходима оценка влияния кожуха лучевода по методике, приведенной в главе 3, а также учет влияния отклонений поверхностей зеркал от теоретических и определение требований к СКО зеркал лучевода.
- 6) Необходимо оценить функционирование антенны с реальным облучателем, а также характеристики всей антенны – коэффициент усиления, КИП.
- 7) Разработанная методика показала себя эффективной и точной, позволяющей без больших затрат вычислительных ресурсов и времени проводить расчет сложной структуры (анализ расчетного времени будет проведен далее).

Решение вышеперечисленных задач будет приведено в следующем разделе.



### 4.3 Синтез и расчет модифицированного лучевода 32-метровой антенны

В связи с тем, что в первом варианте модифицированного лучевода антенны получились недопустимо высокие потери за счет дифракции, было решено переработать оптическую схему лучевода. В соответствии с разработанным и описанным в разделе 4.2 алгоритмом была разработана программа синтеза двухзеркального лучевода, состоящего из параболоидов, с заданием следующих исходных данных:

- 1) угол пересечения центральных лучей  $\beta$ ;
- 2) ширины входного и выходного пучков лучей  $\Delta\theta_1$  и  $\Delta\theta_2$  (коэффициент трансформации угловой ширины);
- 3) расстояние от центра одной из парабол до вторичного фокуса  $r_0$ .

При определении этих параметров нижнего лучевода необходимо руководствоваться множеством факторов, перечисленных ниже.

- Возможность размещения лучевода в помещениях.
- Расположение азимутальной оси – с целью минимизации влияния подшипника азимутального привода, имеющего ограниченные размеры, желательно его размещать в фокусе, где ширина пучка лучей минимальна.
- Габариты зеркал – желательно их минимизировать с целью упрощения технологии изготовления и снижения стоимости.
- Габариты облучателя – гофрированного рупора, и расположение его фазового центра. Малые зеркала требуют высокой направленности облучателя, в связи с чем рупор в X-диапазоне может иметь большие габариты. Это увеличивает сложность и стоимость изготовления, а также может привести к невозможности совмещения его фазового центра и фокуса лучевода – отраженный от зеркала пучок может пересекать кромки рупора.
- Потери на селективном зеркале. В соответствии с принятой концепцией применяется индуктивная частотно-селективная поверхность, пропускающая ЭМ волну Ка-диапазона и отражающая волну X-диапазона. Чем больше угол падения волны на поверхность, тем больше потери на прохождение. Поэтому желательно уменьшать угол падения поля Ка-диапазона на ЧСП.
- Оптимальность эффективности лучевода и зеркальной системы в целом.
- Минимизация влияния конструктивных элементов (кожухи, опоры, перекрытия) на распространяющиеся в лучеводе поля.

Один из вариантов конструкции неправильно спроектированного нижнего двухзеркального лучевода изображен на рис. 4.13 (а). В таком варианте угол падения волны Ка-диапазона на селективное зеркало мал (номинальный угол равен 30 градусов), однако размеры рупора X-диапазона таковы, что отраженная волна пересекает его апертуру, и

распространяющаяся волна также пересекает селективное зеркало. При этом параболические зеркала получаются довольно большие (диаметры 2.4м и 2.7м). Таким образом, проектирование лучевода – комплексная задача, требующая решения задач не только распространения волн в лучеводе, но и синтеза облучателя, селективного зеркала, а также конструкторской работы.

Учитывая все вышеупомянутые факторы, была спроектирована окончательная конструкция лучевода, изображенная на рис. 4.13 (б). Такая схема была разработана после долгой и тщательной работы с конструкторами, в процессе которой были учтены все вышеперечисленные факторы, а также проведен векторный расчет полей для различных вариантов геометрии лучевода. В результате удалось спроектировать лучевод и зеркальную систему, учитывающую конструктивные особенности и возможности построения здания, опорно-поворотного устройства и каркаса главного зеркала, минимизирующую стоимость изготовления за счет оптимальных размеров зеркал, рупоров и элементов конструкции, при этом обеспечивающие высокий суммарный КИП, что подтверждается расчетами с применением разработанных алгоритмов.

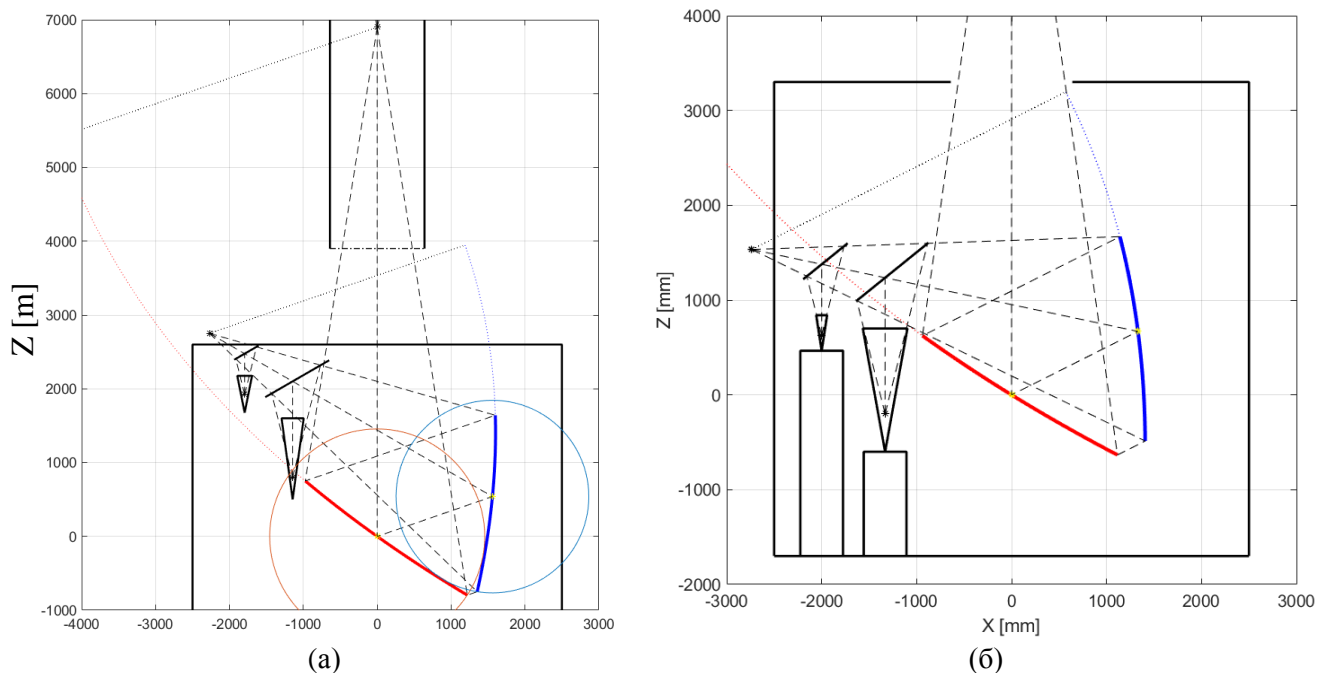


Рис. 4.13. Варианты конструкции двухзеркального нижнего лучевода. Вариант «неправильной» компоновки (а); окончательный вариант лучевода (б).

Под эти размеры были разработаны рупорные облучатели X и Ka-диапазонов частот и частотно-селективная поверхность. В качестве рупорных облучателей выбраны широко применяемые гофрированные рупоры, имеющие поляризационные характеристики, близкие к идеальному облучателю – элементу Гюйгенса. Был разработан новый тип селективного зеркала на основе индуктивной частотно-селективной поверхности с переменным шагом ячейки, имеющего низкие потери в Ka-диапазоне. Более подробное описание облучателей и частотно-селективного зеркала приведено далее.

Так же, как и в предыдущем разделе, лучевод рассчитывается и оптимизируется на центральной частоте X-диапазона. Проводится комплексная оценка эффективности лучевода и зеркальной системы с идеальным облучателем – элементом Гюйгенса с определенной амплитудной ДН. На первом этапе рассчитывается лучевод без учета источников искажений – кожуха лучевода и неидеальностей поверхностей (рис. 4.14 (а)). Далее рассчитываются характеристики с учетом распространения в кожухе, с учетом отклонений поверхностей от теоретических, характеристики лучевода с реальным облучателем – гофрированным рупором, рассчитанным и оптимизированным под лучеводную схему.

Нижний лучевод был спроектирован с коэффициентом трансформации  $M=14/8$ , полный угол облучения первого зеркала  $2*14^\circ$ , ширина выходного пучка  $2*8^\circ$ . Как было отмечено ранее, такой подход к проектированию двухзеркального лучевода позволяет с одной стороны уменьшить размер верхних зеркал за счет более узкого «выходного» пучка, с другой стороны уменьшить габариты рупоров за счет требуемой более широкой ДН облучателей, являющейся «входным» пучком. Все это позволяет экономить средства на изготовление. В англоязычной литературе лучеводы такого типа называются *beam-magnifying* – «усиливающие» или сужающие луч. Преимущество спроектированного в рамках данной работы лучевода заключается в том, что он не вносит искажений в распространяющиеся поля в ГО приближении, тогда как традиционно применяемая схема с нижним эллиптическим зеркалом искажает поле.

На рис. 4.14 изображены распределения полей нижнего лучевода. Показаны исходная ДН идеального облучателя, соответствующая  $G_{\text{вх}}=28\text{дБ}$ , идеальная ДН на выходе  $G_{\text{вых}}=M*G_{\text{вх}}$ , а также расчетные распределения основной и кроссполаризационной составляющих на выходе нижнего лучевода в ближней и дальней зоне. В ближней зоне поля рассчитаны на сфере с центром в фокусе и радиусом, соответствующем расстоянию до плоского зеркала. Исходя из графиков, можно сделать несколько выводов.

1) В ближней зоне выходное поле имеет большую ширину, нежели рассчитанное в приближении ГО или гауссовых пучков (для нашего случая  $2*14^\circ$ ). Это чрезвычайно важный вывод, говорящий о том, что необходимо увеличивать размеры верхних зеркал относительно рассчитанных для угловой ширины  $2*14^\circ$ .

2) В дальней зоне выходные диаграммы близки к идеальным – сохраняется симметрия поля, низкий уровень кроссполаризации, ширины ДН соответствуют расчетным, полученным в геометрооптическом приближении.

3) Уровень кроссполаризации мал и для ближней, и для дальней зон, и составляет порядка  $-55\text{дБ}$  от максимума распределения.

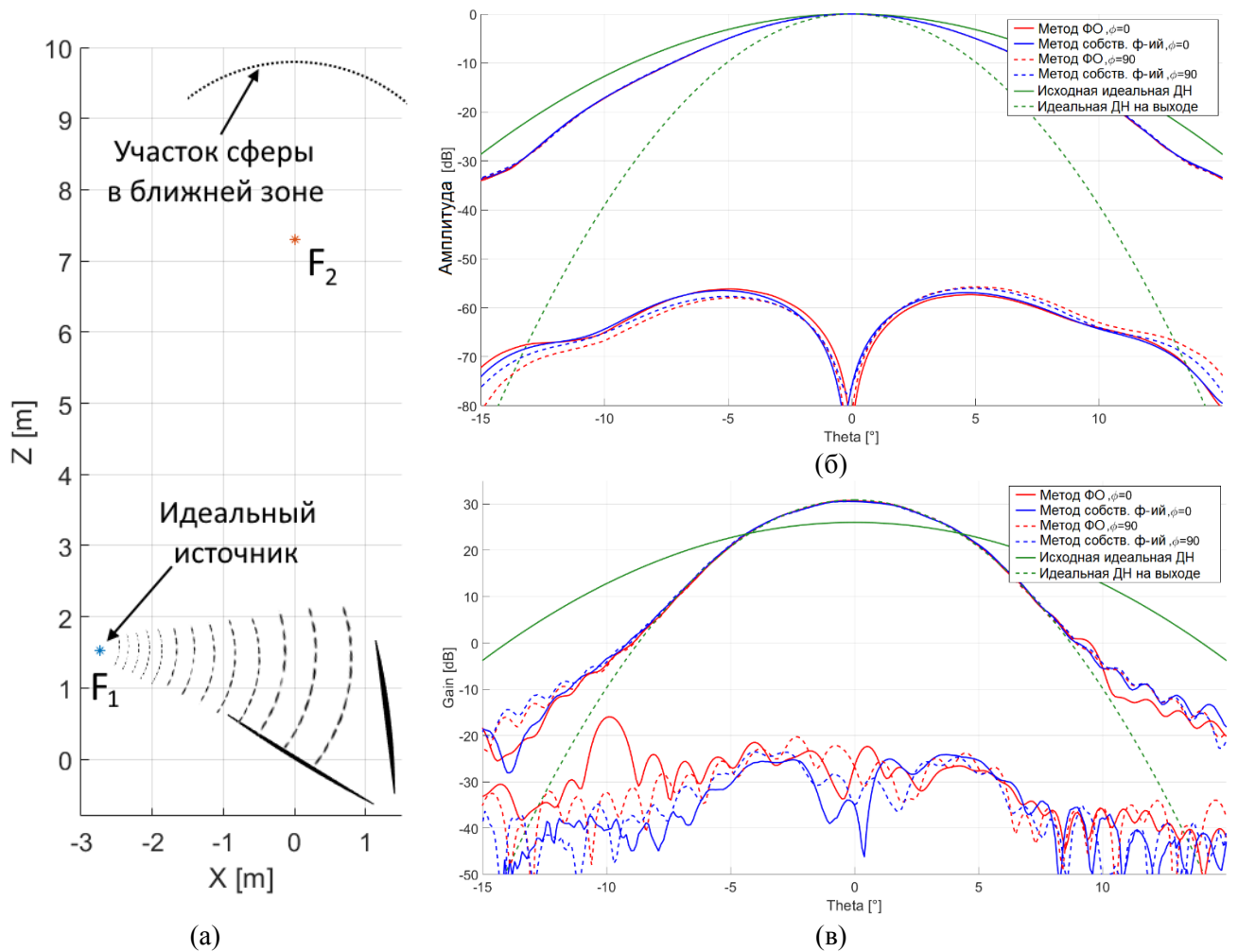


Рис. 4.14. Распределения основной и кроссполаризационной составляющих полей нижнего лучевода. Расчетная модель (а); нормированные распределения в ближней зоне, расчет методами ФО и собственных функций (б);  $K_u$  в дальней зоне, расчет методом ФО и методом собственных функций (в). Зеленым цветом изображены «идеальные» распределения – исходное (сплошными линиями) и выходное с более узким лучом (пунктир).

Далее переходим к анализу полей верхнего лучевода. В соответствии с полученными коэффициентами определяются токи на плоских и параболических зеркалах. Интерес представляет распределение составляющих поля на участке с плоско-параллельным пучком, являющимся наиболее протяженным участком с кожухом. На рис. 4.9 изображена геометрия верхнего лучевода с обозначением условных апертур, в которых анализируется распределение поля. Омические потери в этой части за счет кожуха лучевода наиболее существенны, как показано далее в разделе 4.4.

Из рис. 4.15 сравнения амплитуд и фаз составляющих поля в апертурах – сечениях между верхними зеркалами видно, что распространение на этом участке несколько «выравнивает» поле – становится более симметричной амплитуда и более равномерной фаза. Уровень кроссполаризации также уменьшается.

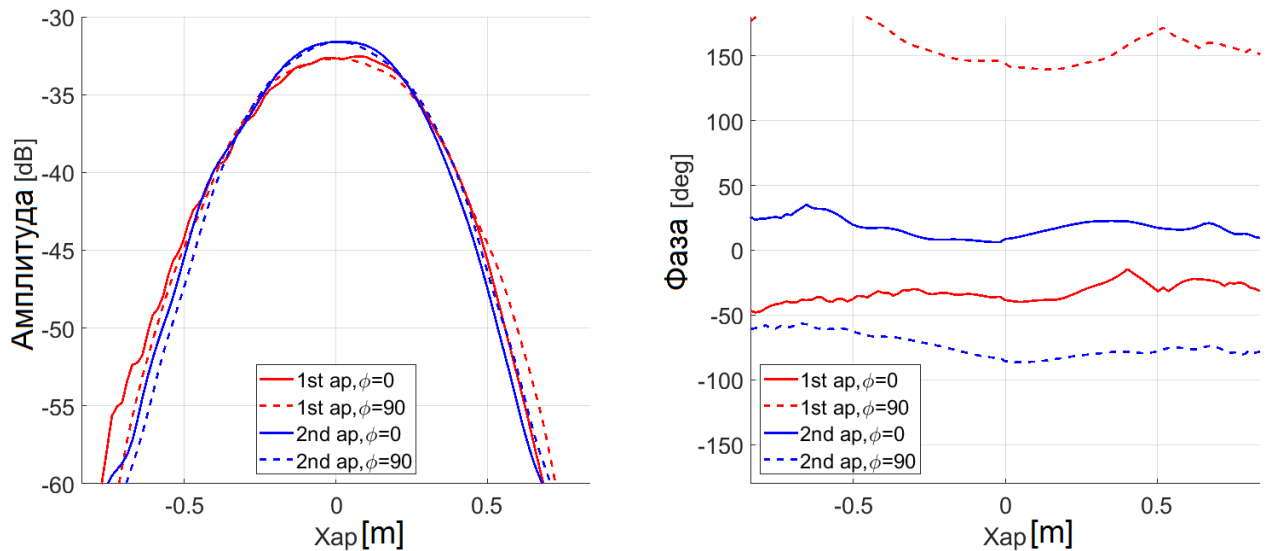


Рис. 4.15. Амплитуда и фаза основной составляющей в сечениях верхнего лучевода. Красные кривые – нижнее сечение в двух плоскостях, синие – верхнее сечение в двух плоскостях.

Рассчитав коэффициенты разложения в ряд по токам на поверхности верхнего плоского зеркала, переходим к анализу зеркальной системы с источником в виде ближнего поля, отраженного от плоского зеркала. Этап анализа лучевода на этом заканчивается, результаты расчета характеристик лучевода без учета кожуха и отклонений зеркал от теоретических при облучении идеальным источником сведены в таблицу 4.3. В таблице потери по основной поляризации и кроссполяризации соответствуют мощности поляризационной составляющей на каждом зеркале, отнесенной к общей излученной мощности. Потери за счет переливания на всех зеркалах составляют 0.069дБ, что соответствует 0.719% от общей мощности. Это соответствует значениям, получаемым NASA при проектировании лучеводов [10].

Таблица 4.3. Составляющие потерь и кроссполяризации в лучеводе

№ зеркала	Полный расчет			Расчет для 1 вектора	
	Потери по основной поляризации, дБ	Омические потери, дБ	Кроссполяризация, дБ	Потери по основной поляризации, дБ	Омические потери, дБ
1	-	0.000108	-	-	0.000108
2	0.0069	0.000188	-50.28	0.0069	0.000188
3	0.0315	0.00023	-52.18	0.0315	0.00023
4	0.0533	0.000229	-47.82	0.0533	0.000229
5	0.064	0.000229	-48.46	0.0633	0.000229
6	0.069	0.000229	-48.75	0.0663	0.000229
Контррефлектор	0.3188	-	-45.49	0.3153	-
<b>Эффективность:</b>	<b>92.922%</b>			<b>92.997%</b>	

Были проведены расчеты в FEKO исследуемого лучевода. В связи со сложностью расчета задачу решить методом физической оптики не представляется возможным – расчет возбуждения источниками ближнего поля занимает большое количество времени. В связи с этим задача была разбита на 2 части – анализ нижнего и верхнего лучевода по отдельности методом интегральных уравнений. Модель изображена на рис. 4.16 (а).

Распределения полей в лучевом модуле вектора Пойнтинга основной и кроссполяризационной составляющих в ключевых сечениях распространения изображены на рис. 4.16 (б). Выходные распределения основной составляющей поля в ближней зоне на сфере, проходящей через края контррефлектора, рассчитанные с применением векторов P-3 и в FEKO изображены на рис. 4.17. В целом результаты близки, однако расчет FEKO дает большую неравномерность фазы и амплитуды. Это может быть вызвано недостаточным количеством точек в сохраняемом источнике ближнего поля, соответствующему выходному полю нижнего лучевода. Также расчет FEKO отличается большим уровнем поля на краях сферы – влияние дифракции более существенно, что привело к увеличению потерь на 0.08дБ.

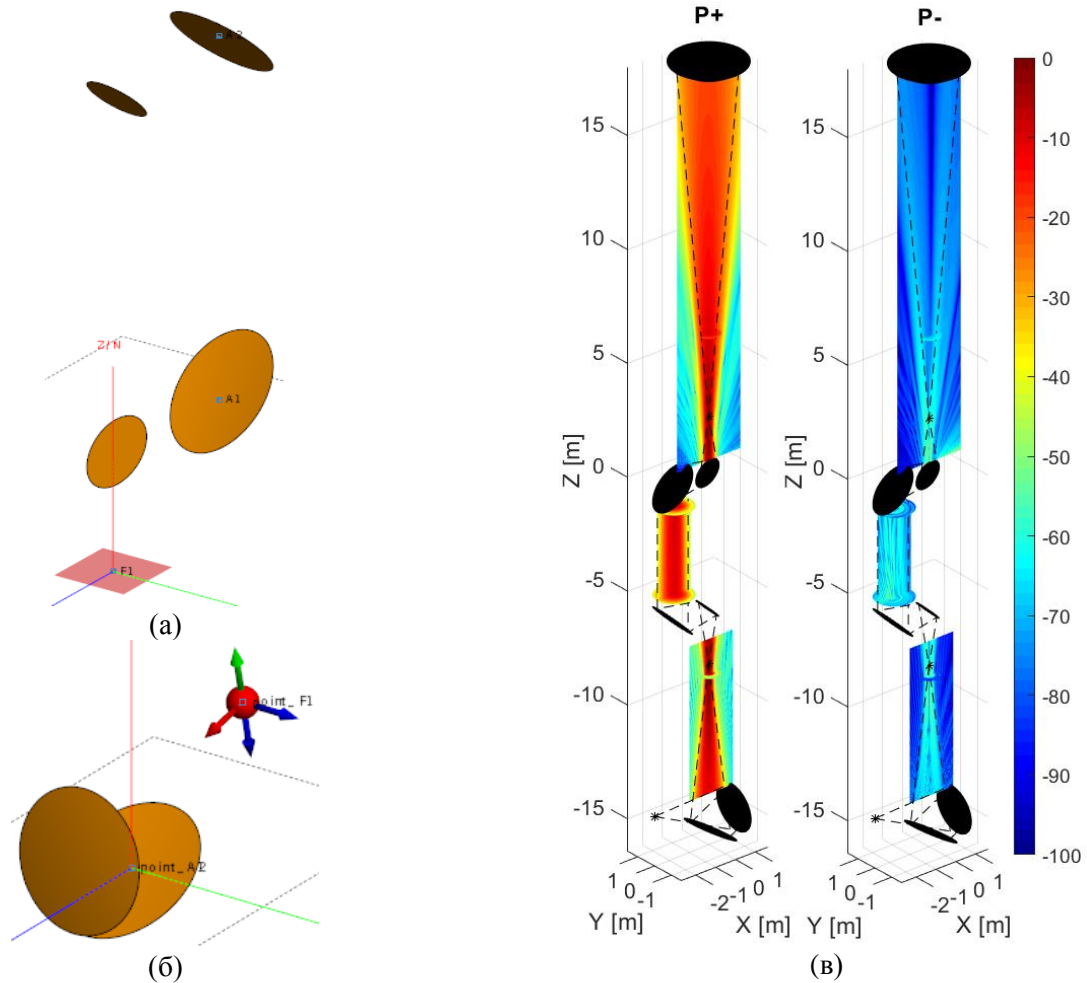


Рис. 4.16. Расчетная модель в FEKO (а); распределения модулей вектора Пойнтинга основной (слева) и кроссполяризационной (справа) составляющих в лучевом модуле, облучаемом идеальным источником (б).

Далее по известному полю верхнего зеркала лучевода рассчитываются токи на поверхности контррефлектора, производится разложение поля контррефлектора в ряд с определением коэффициентов по токам, и определяются поля и токи на поверхности главного зеркала как сумма ряда. Учет затенения контррефлектором осуществляется комбинированно – в геометрическом приближении из центра рефлектора вырезается область, соответствующая диаметру контррефлектора, при этом поля токов рассчитываются методом физической оптики.

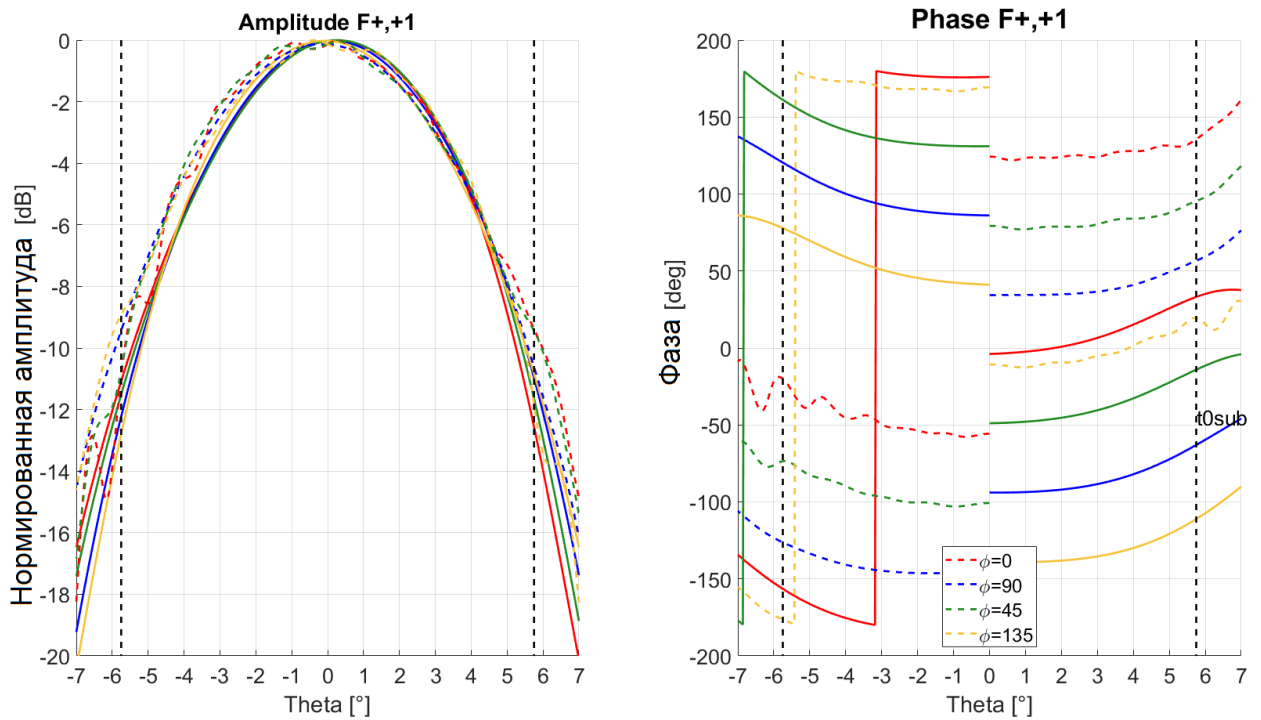


Рис. 4.17. Распределение нормированной амплитуды и фазы основной составляющей на сфере, проходящей через края контррефлектора.  $t_{0sub}$  соответствует углу облучения контррефлектора. Представлены расчеты методом согласования с источником (сплошные линии) и методом интегральных уравнений в FEKO (пунктирные).

Амплитуда основной составляющей поверхностного тока на рефлекторе изображена на рис. 4.18 (а). Ее распределение близко к равномерному с резким спаданием амплитуды к краям (до уровня минус 10дБ). Результирующие ДН по основной и кроссполяризационной составляющим антенной системы с лучеводом при облучении идеальным источником изображены на рис. 4.18 (б). В связи с близкой к равномерной амплитуде поля в апертуре двухзеркальные антенны с модифицированными профилями имеет довольно высокий уровень боковых лепестков (порядка минус 16дБ), что является их недостатком. Отметим, что провести расчет двухзеркальной системы в САПР методом физической оптики или более точным методом не представляется возможным – слишком велики требования к оперативной памяти и ресурсу процессора. При этом расчетное время в случае расчета векторами Р-З можно сократить за счет учета одного вектора. Результат оценки эффективности и КИП с учетом лучевода сведены в таблицы 4.4 и 4.5. Исходя из результатов, можно сделать вывод о допустимости приближения расчета одного вектора Р-З – погрешность составляет десятые доли процентов.

Таблица 4.4. Составляющие потерь и кроссполяризации лучевода и зеркальной системы

№ зеркала	Полный расчет			Расчет для 1 вектора	
	Потери по основной поляризации, дБ	Омические потери, дБ	Кроссполяризация, дБ	Потери по основной поляризации, дБ	Омические потери, дБ
Лучевод	0.3188	0.001213	-45.49	0.3153	0.001213
Контррефлектор	0.3350	0.000135	-52.21	0.3322	0.000135
Рефлектор	0.4650	0.000138	-33.81	0.4618	0.000138

Таблица 4.5. Составляющие эффективности зеркальной антенны

Составляющая потеря	Полный расчет	Расчет для 1 вектора
$K_{обл}$	0.92896	0.92997
$K_{ан}, K_{пер}, K_{диф}, K_{кросс}, K_{зат}$	0.9109	0.9111
$K_{СКО}$	0.986	
$K_{пот}$	0.99986	
- омические потери на зеркалах	0.9999	
- омические потери в лучеводе		
$K_{\Sigma}$	0.8341	0.8352

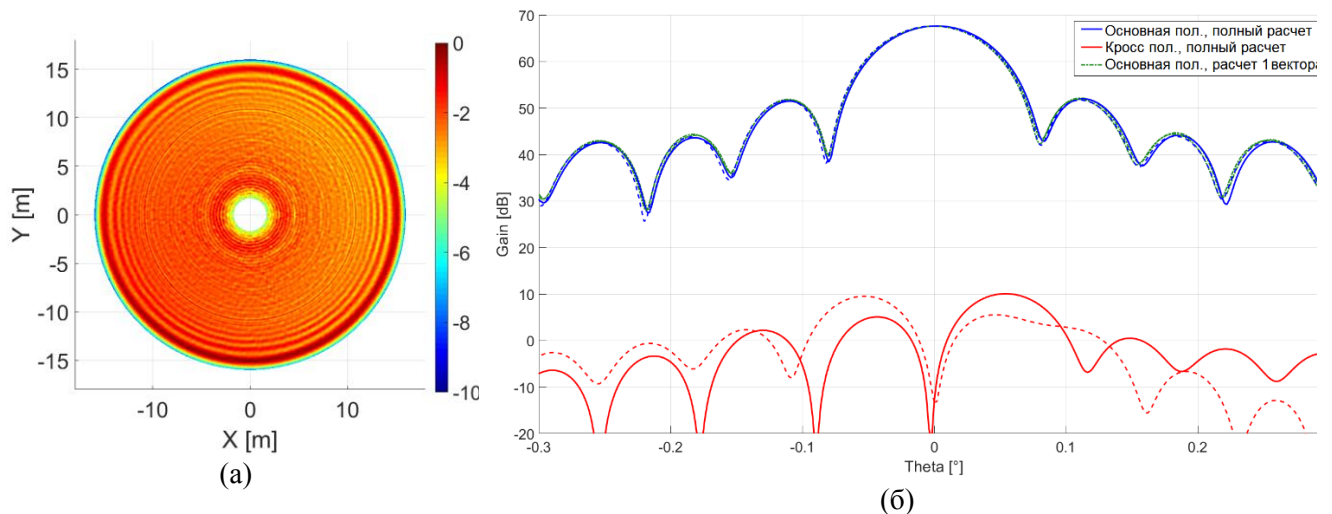


Рис. 4.18. Распределение поверхностного тока на квазипараболическом рефлекторе (а); диаграммы направленности зеркальной антенны по основной и кроссполаризации в двух плоскостях – полный расчет и расчет для одного вектора Р-3 (б).

Сравнительная оценка расчетного времени сведена в таблицу 4.6. Проводилась серия расчетов, результаты расчетного времени усреднялись для более объективной оценки. Расчет для одного вектора Р-3 позволяет сократить суммарное время расчета на 6 часов, что является весомым преимуществом. Сравнение с САПР, как и ранее, является условным, так как расчетные алгоритмы имеют свои особенности – для расчета векторами Р-3 основное время занимает интерполяция сферических функций, а в расчете FEKO много времени занимает обработка возбуждения источником ближнего поля. Однако решить задачу в САПР другими способами с сохранением точности не представляется возможным. При этом для расчета векторами Р-3 возможно построение других, более эффективных алгоритмов интерполяции, что является темой дальнейших исследований.

Таблица 4.6. Сравнение времени расчета лучевода

Метод		FEKO	Расчет для двух векторов	Расчет для одного вектора
Расчет лучевода	Нижний двухзеркальный лучевод	<i>130 ч 11 мин</i>	<i>6 ч 24 мин</i>	<i>4 ч 57 мин</i>
	Верхний лучевод		<i>5 ч 16 мин</i>	<i>3 ч 6 мин</i>
Расчет двухзеркальной системы (метод ФО)		-	<i>6 ч 7 мин</i>	<i>3 ч 55 мин</i>
<b>Итого</b>		-	<i>17 ч 47 мин</i>	<i>11 ч 48 мин</i>



#### **4.4 Расчет лучевода и антенной системы с реальной облучающей системой и учетом источников искажений**

В предыдущих разделах был проведен полный векторный расчет лучеводной и зеркальной системы 32-метровой антенны. Расчет был проведен последовательно методом разложения в ряд по сферическим гармоникам Р-З в спиральных координатах с определением токов в приближении физической оптики для всех зеркал без учета источников искажений – в предположении, что источник и зеркала находятся в свободном пространстве в отсутствии вторичных переотражений, с идеальными поверхностями зеркал и идеализированным поляризационно-чистым источником. Однако на практике приближение свободного пространства является достаточно грубым – всегда присутствуют элементы конструкции, оказывающие влияние на ЭМ поле. Наиболее существенные элементы – кожухи лучевода. Зеркала лучевода имеют погрешность, определяемую точностью заводских станков и измеряемую геодезическими методами.

В антенне применяется реальный облучатель – гофрированный рупор, который даже при правильном проектировании по своим характеристикам не является идеальным – не равна нулю кроссполяризация, неидеальна симметрия поля и несколько отлична от заданной ширина распределения поля в ближней зоне. В СВЧ-тракте присутствует частотно-селективное зеркало. Полный строгий расчет такого зеркала не представляется возможным, но в оценке эффективности лучевода могут быть учтены усредненные потери. В СВЧ-тракте для каждого диапазона также присутствует схема разделения каналов приема и передачи (диплексер), фильтры и поляризационные устройства. В оценке эффективности они довольно просто учитываются прибавлением суммарных потерь в тракте к потерям в облучающей схеме. В связи с вышеперечисленным, для более полной оценки качества и эффективности спроектированной антенной системы в данном разделе проводится расчет лучевода с учетом источников искажений относительно идеализированного случая:

- учет кожуха лучевода;
- учет отклонений поверхностей зеркал от теоретических;
- учет реальных элементов СВЧ-тракта – рупоров и частотно-селективного зеркала.

Далее будет рассмотрено влияние всех перечисленных элементов по отдельности, а в конце проведен полный расчет с учетом всех вышеперечисленных эффектов и элементов.

##### *4.4.1. Расчет лучевода с учетом распространения в кожухе.*

В данном разделе анализируется влияние кожухов многозеркального лучевода, применяемого для изоляции поля большой напряженности от окружающего пространства, на распространяемые поля и эффективность лучевода.

Лучевод разрабатываемой антенны ДКС с обозначением двух участков кожухов, оказывающих наибольшее влияние на распространяющиеся поля, изображен на рис. 4.21 (а). Зелеными линиями показаны сечения, в которых анализируется поле. Результаты сравниваются с расчетами лучевода в свободном пространстве. Диаметр металлических кожухов выбран из стандартной изготавливаемой в России номенклатуры металлических труб большого диаметра. Минимально допустимые размеры были определены в предыдущем расчете.

В соответствии с разработанным ранее подходом был разработан алгоритм учета распространения волн в лучевode с учетом кожуха – круглого волновода определенного сечения. Ключевое отличие настоящего расчета от задачи, описанной в разделе 3.3 – в количестве зеркал и кожухов. На рис. 4.19 (б) изображены распределения основной составляющей поля в сечениях, перпендикулярных направлению распространения при различных  $z=0\text{м}, 0.5\text{м}, 1.5\text{м}, 2.5\text{м}, z_f$ , где  $z_f$  – фокальная плоскость. Такой расчет необходим для определения минимальных размеров конструктивных элементов – например, азимутального подшипника. Наиболее критичным для расположения является «входное» сечение нижнего кожуха, где ширина пучка максимальна. Выбрав соответствующим образом диаметр кожуха, можно минимизировать искажения структуры поля и омические потери. За счет кожуха резко возрастает кроссполяризация – ее мощность на третьем зеркале увеличилась с минус 50 до минус 30 дБ.

Далее анализируется распределение поля в сечениях верхнего кожуха. Результаты изображены на рис. 4.19 (в). Наличие кожухов существенно искажает картину поля – несмотря на сохранение симметрии поля, пучок расширяется, значительно возрастают кроссполяризация и омические потери, что ведет к снижению коэффициента усиления и возрастанию шумовой температуры антенны [107]. В таблицу 4.7 сведены данные по потерям в антенной системе.

Таблица 4.7. Составляющие потерь и кроссполяризации зеркал лучевода и зеркальной системы

№ зеркала	Потери по основной поляризации, дБ	Омические потери, дБ	Кроссполяризация, дБ
1	-	0.000108	-
2	0.0069	0.000188	-50.28
Нижний кожух	-	0.00548	-
3	0.0380	0.00023	-33.28
4	0.0495	0.000229	-30.02
Верхний кожух	-	0.001596	-
5	0.0664	0.00023	-28.93
6	0.0626	0.000229	-30.36
Ближнее поле сфере	0.4732	-	-33.23
<b>Эффективность лучевода: 89.677%</b>			
Контррефлектор	0.4951	0.000147	-33.29
Рефлектор	0.6515	0.000136	-31.52

На рис. 4.20 изображена амплитуда основной составляющей поля на сфере, проходящей через края контррефлектора для случаев без учета и с учетом кожухов. Кожухи довольно существенно искажают поле – расширяется луч (уровень облучения края контррефлектора

увеличивается на 1.5-2дБ от уровня минус 12дБ до минус 10дБ) и увеличивается кроссполяризация с уровня минус 55дБ до уровня минус 35дБ. Также становится более неравномерной фаза основной составляющей. Все это приводит к увеличению потерь.

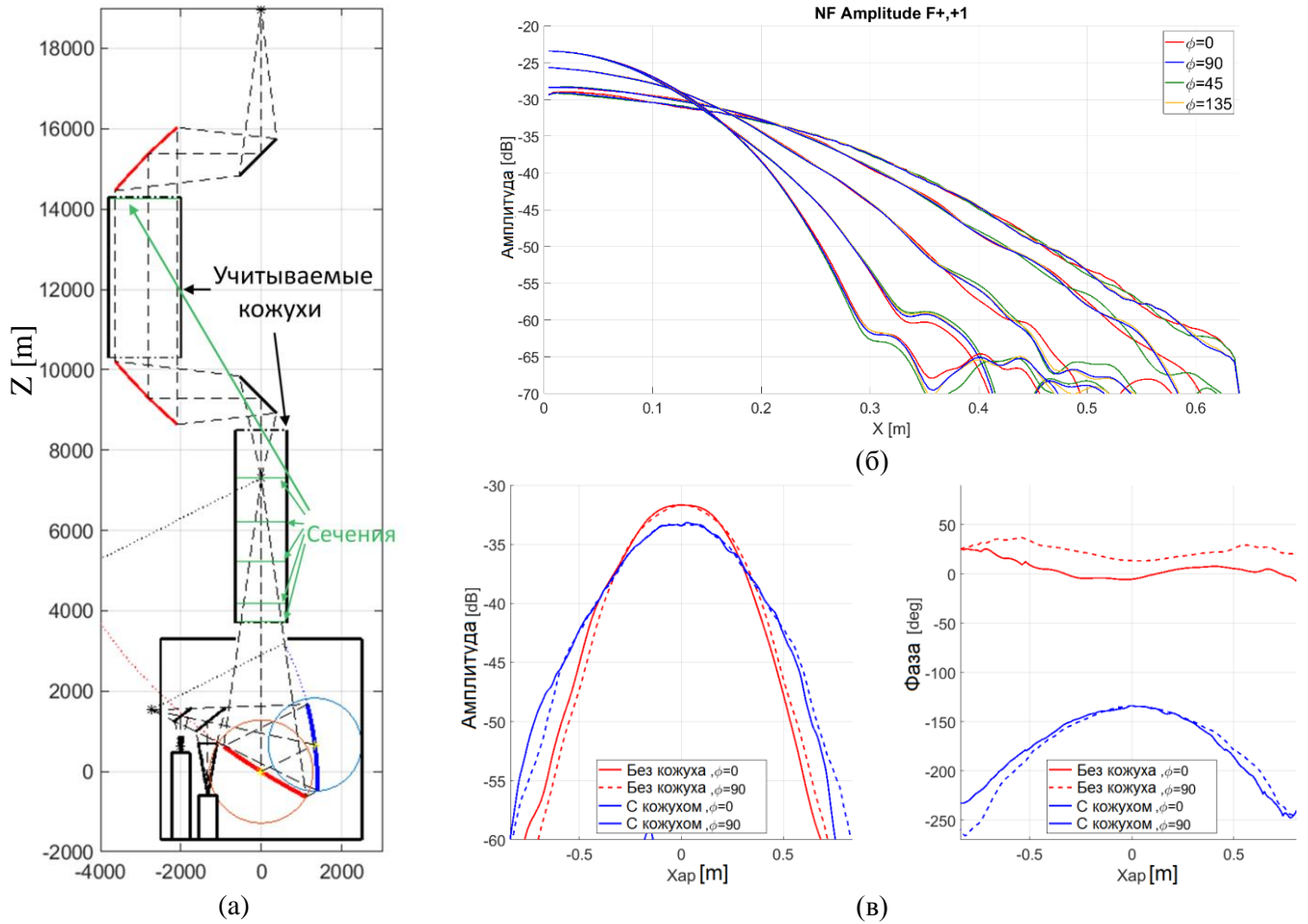


Рис. 4.19. К расчету полей лучевода с учетом кожухов. Геометрия лучевода с кожухами с обозначением анализируемых сечений поля (а); распределения основной составляющей поля в различных сечениях нижнего лучевода (б); распределения основной составляющей поля в «выходном» сечении верхнего лучевода без учета кожуха (красный цвет) и с учетом кожуха (синий цвет) (в).

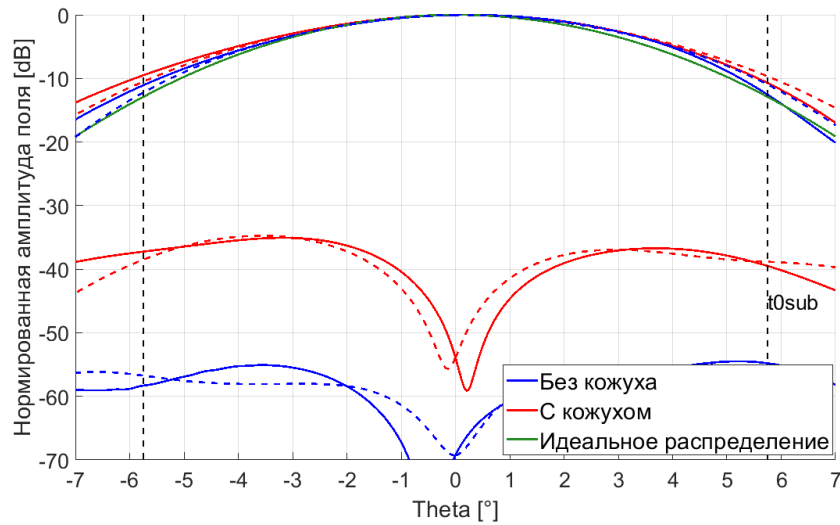


Рис. 4.20. Распределение амплитуды составляющей поля на сфере, проходящей через края контррефлектора. Изображены кривые без кожуха (синий цвет), с учетом кожуха (красный цвет) и идеальное распределение (зеленый), соответствующее оптимальному облучению контррефлектора.  $t_{0sub}$  соответствует углу облучения контррефлектора.

Результаты оценки зеркальной системы сведены в таблицу 4.8. Снижение эффективности лучевода за счет наличия кожухов порядка 3%, тогда как суммарное снижение КИП составляет 4.4%, что является весьма существенным значением и говорит о необходимости учета кожухов в проектировании лучевода. Общее время расчета верхнего лучевода с кожухами составило 7 часов 12 минут, что ненамного больше времени расчета лучевода без кожухов (5 часов 16 минут).

Таблица 4.8. Составляющие эффективности зеркальной антенны

Составляющие эффективности	Значение
$K_{обл}$	0.89677
$K_{ап}, K_{пер}, K_{оиф}, K_{кросс}, K_{зат}$	0.89365
$K_{СКО}$	0.986
$K_{пот}$	
- омические потери на зеркалах	0.99986
- омические потери в кожухах	0.99837
- омические потери в лучеводе	0.9999
$K_{\Sigma}$	0.7887

Основная проблема, возникающая при наличии кожуха – существенное возрастание кроссполяризационной составляющей поля за счет появления продольной составляющей. Помимо физического увеличения диаметра кожуха, проблема может быть решена за счет применения гофрированных волноводов-кожухов. В соответствии с описанным в главе 3 подходом был проведен расчет полей лучевода с гофрированным кожухом. Такой путь позволяет улучшить симметрию поля и снизить кроссполяризацию до уровня минус 50дБ, однако он имеет ряд недостатков. Во-первых, это узкополосность такого варианта. Для того, чтобы удовлетворять импедансным граничным условиям, гофра кожуха должна быть «настроена» на свою частоту (Х-диапазон или Ка-диапазон в нашем случае). Во-вторых, применение гофрированных кожухов на всех участках распространения экономически нецелесообразно. Другой возможный вариант компенсации кроссполяризации – введение продольного металлического стержня на оси кожуха. Вместо круглого волновода-кожуха таким образом получается коаксиальный, за счет чего можно избавиться от продольной составляющей. Оба этих способа требуют отдельных исследований.

#### 4.4.2. Расчет лучевода с учетом отклонений поверхностей зеркал от теоретических.

Следующий этап – анализ влияния отклонений поверхностей зеркал от теоретических на характеристики многозеркального лучевода. Методика была описана в главе 3, отличие заключается в количестве зеркал и их конфигурации – в анализируемом лучеводе 32-метровой антенны представлен более сложный случай цепочки из 4 профилированных (параболических) и 2 плоских зеркал. Искаженными при этом являются параболические зеркала, изготавливаемые фрезерованием (изображены синим и красным на рис. 4.19 (а)).

Расчет сводится к введению случайных искажений для каждого из параболических зеркал и последовательному разложению полей каждого зеркала в ряд. Проектное значение СКО зеркал лучевода по результатам расчета было выбрано 0.1мм – обеспечение такой точности требуется

от производства. Так как расчет в Ка-диапазоне не проводится, а потери оценить нужно, были проведены две серии расчетов (по 10 расчетов) в X-диапазоне – с СКО  $\sigma=0.4\text{мм}$  и  $\sigma=0.1\text{мм}$ . СКО  $\sigma=0.4\text{мм}$  в X-диапазоне примерно соответствует реальному СКО  $0.1\text{мм}$  в Ка-диапазоне. Распределение поля на выходе нижнего лучевода показано на рис. 4.21 (б), приведено сравнение кривых с случаем неискаженных зеркал. Далее приведено распределение амплитуды и фазы на сфере на выходе лучевода (рис. 4.22).

Таблица 4.9. Суммарная эффективность с искаженными зеркалами лучевода

Составляющая потерь	СКО зеркал лучевода $\sigma=0.4\text{мм}$			СКО зеркал лучевода $\sigma=0.1\text{мм}$		
	Потери по основной поляризации, дБ	Кросс поляризация, дБ	Эффективность	Потери по основной поляризации, дБ	Кросс поляризация, дБ	Эффективность
$K_{обл}$	0.4496	-39.12	0.90165	0.368	-42.44	0.9188
$K_{ан}, K_{лпр}, K_{диф}, K_{крсс}, K_{зат}$	0.9007			0.9188		
$K_{ско}$	0.986			0.986		
$K_{пот}$	0.99976			0.99976		
$K_{\Sigma}$	0.8005			0.8208		

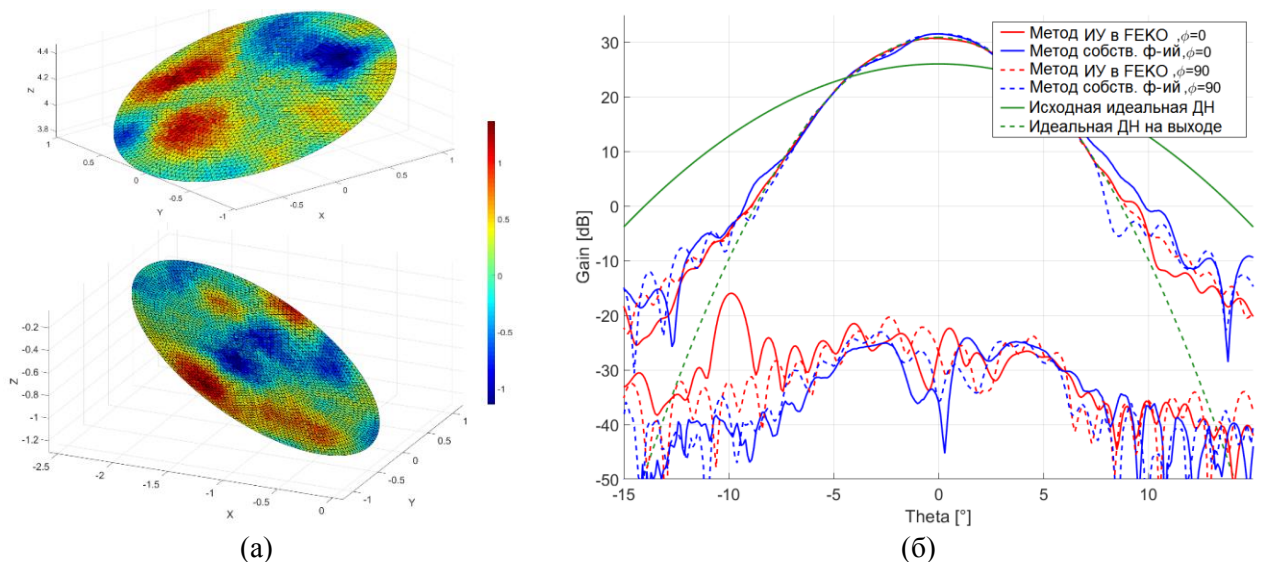


Рис. 4.21. К расчету полей лучевода с искаженными зеркалами. Геометрия искаженных зеркал нижнего лучевода (а); распределения основной составляющей поля на выходе нижнего лучевода в ДЗ (б); распределения амплитуды и фазы основной составляющей на сфере на выходе лучевода (в).

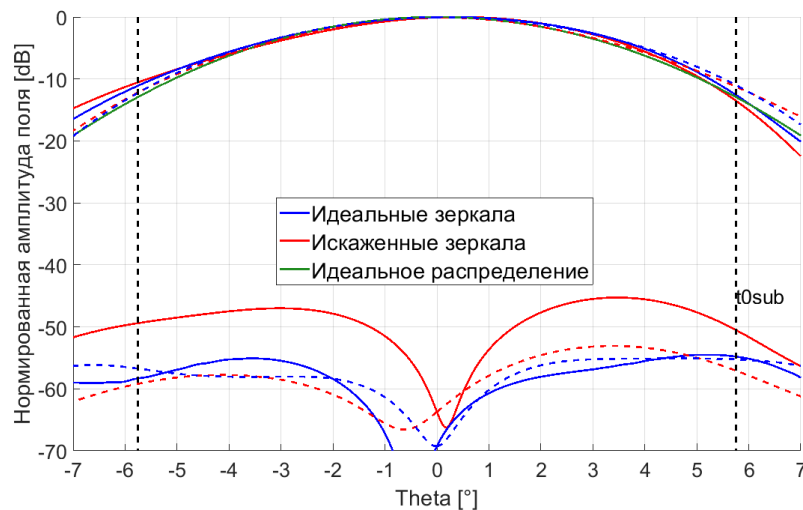


Рис. 4.22. Распределение амплитуды составляющей поля в двух плоскостях на сфере, проходящей через края контррефлектора, для случаев идеальных и искаженных зеркал.

#### 4.4.3. Расчет лучевода с учетом ЧСП и рупора.

Предыдущие расчеты лучевода проводились с применением идеализированной модели облучающей системы. Приближение заключается в задании облучателя в виде точечного источника с поляризационной диаграммой, соответствующей элементу Гюйгенса круговой поляризации, и заданной определенным образом амплитудной ДН. Источник располагается в точке виртуального фокуса, располагающейся за пределами доступной части помещения антенны. Такой способ полезен и широко применяется для оценки теоретически достижимых характеристик зеркальных антенн и лучеводов. Однако при переходе к практической реализации необходимо анализировать систему с учетом реального облучателя, максимально стремясь при этом приблизить его характеристики к идеальному облучателю. Также в многочастотной системе присутствует частотно-селективная поверхность, осуществляющая пространственную фильтрацию СВЧ-волн [108] и вносящая потери.

Для анализируемой антенны было проведено моделирование и проектирование индуктивной частотно-селективной поверхности, способной работать при высоких уровнях мощности. В процессе выбора структуры ЧСП были рассмотрены различные варианты, изучены их отличительные свойства, влияющие на характеристики, подробно описанные в [108]. Оптимальной для нашей задачи является индуктивная ЧСП с прямоугольной формой ячейки, представляющая собой перфорированную металлическую поверхность и имеющая два явно выраженных резонанса в Ка-диапазоне на частотах приема/передачи и минимальные потери в Х-диапазоне. С помощью программ HFSS и CST MWS выполнен расчет падения плоской волны на поверхность, для моделирования периодической структуры были применены каналы Флоке.

В результате была получена поверхность периодической структуры, обеспечивающая отражение в Х-диапазоне практически без потерь (рис. 4.23). В Ка-диапазоне при угле падения центрального луча потери на прохождение составили менее 0.05дБ, однако при других углах падения потери существенно возросли до 3-4дБ. В связи с этим с целью уменьшения потерь была разработана нерегулярная селективная поверхность с переменным размером ячейки по одной из координат. Весь сектор углов облучения ЧСП разбивается на определенное количество секторов, и под каждый угол оптимизируется размер ячейки. Таким образом, удалось добиться усредненных потерь на прохождение в Ка-диапазоне порядка 0.035 дБ с учетом спадающего к краям ЧСП амплитудного распределения поля. Эти потери учтены в последующей оценке суммарной эффективности. Уровень отражения в Х-диапазоне порядка минус 40дБ.

Помимо селективной поверхности, разработан гофрированный рупор с шириной диаграммы направленности  $2 \times 14^\circ$  по уровню минус 25дБ, определен его фазовый центр (рис. 4.24). Такой рупор был рассчитан и оптимизирован в CST MWS и HFSS, результирующие поля, рассчитанные численными методами, сохранены для дальнейшей обработки.

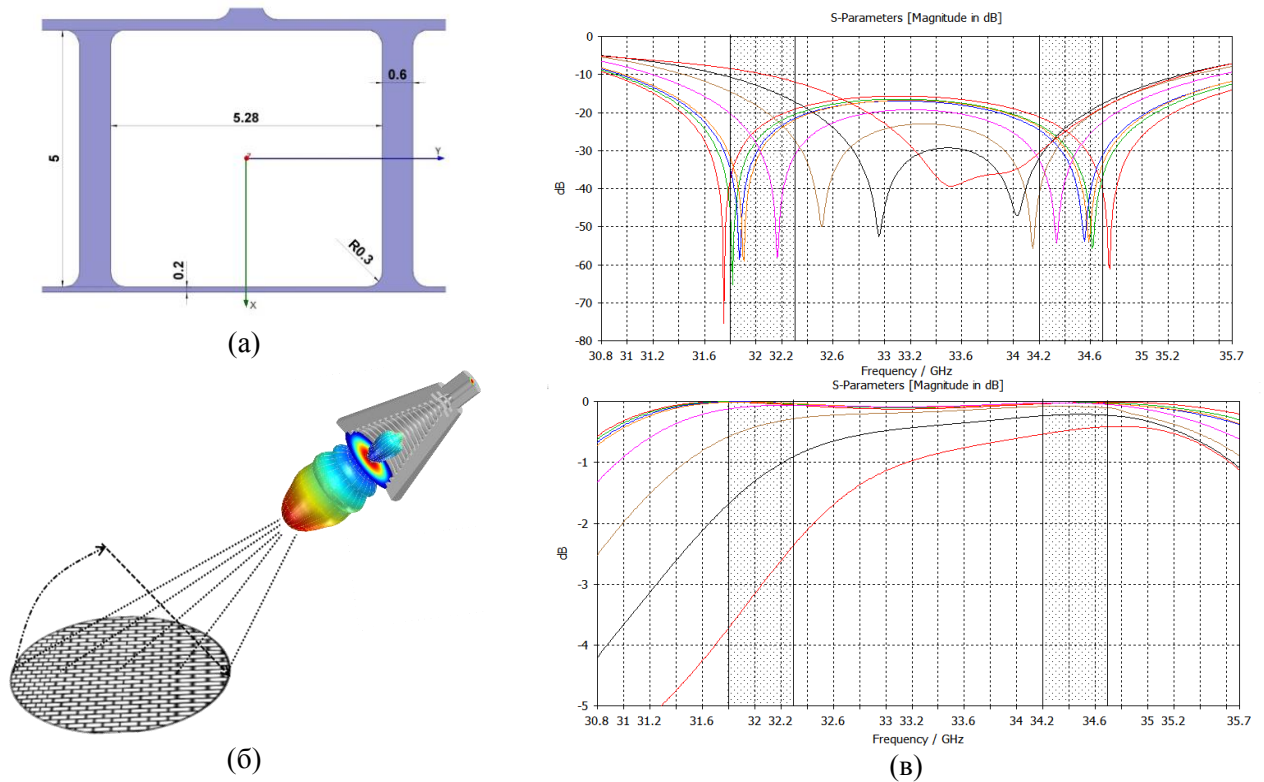


Рис. 4.23. Частотно-селективная поверхность. Размер элементарной ячейки в центре ЧСП (а); общий вид ЧСП с переменным размером ячейки (б); коэффициент отражения и коэффициент передачи в Ка-диапазоне частот при различных углах падения падающей волны от 16 до 44 градусов (в).

Такой рупор близок по своим характеристикам к идеальному источнику. В рамках разработанных алгоритмов существует несколько вариантов облучения зеркала полем рупора в ближней зоне. Все они сводятся к определению коэффициентов разложения поля в ряд и далее суммированию ряда на поверхности зеркала. Можно определять коэффициенты разложения поля в ряд по известному дальнему полю на сфере бесконечного радиуса, либо по ближнему полю в апертуре. На рис. 4.24 (б) изображена амплитуда основной поляризационной составляющей поля рупора в апертуре. Оба варианта определения коэффициентов дают схожий результат, что видно из графика сравнения распределения основной составляющей в БЗ на сфере радиуса  $r=3.3$  м, соответствующему центру первого зеркала лучевода, на рис. 4.24 (в).

В связи с тем, что полный расчет рупора имеющимися средствами невозможен, в программе приходилось считать лишь 1/4 часть рупора с применением граничных условий симметрии. Это накладывает ограничение на возбуждаемую поляризацию. Так как расчет полей лучевода проводится с источником круговой поляризации, для итогового поля рупора были взяты два поля рупора основной линейной поляризации – одно вдоль оси X, второе вдоль оси Y, возбуждаемые с разностью фаз 90 градусов. Поле ортогональной круговой поляризации при этом не возбуждается. В связи с этим расчет полей лучевода проводился при возбуждении лишь основной круговой поляризации.

Определив коэффициенты разложения поля рупора, далее проводится стандартный последовательный расчет токов и полей всех зеркал.

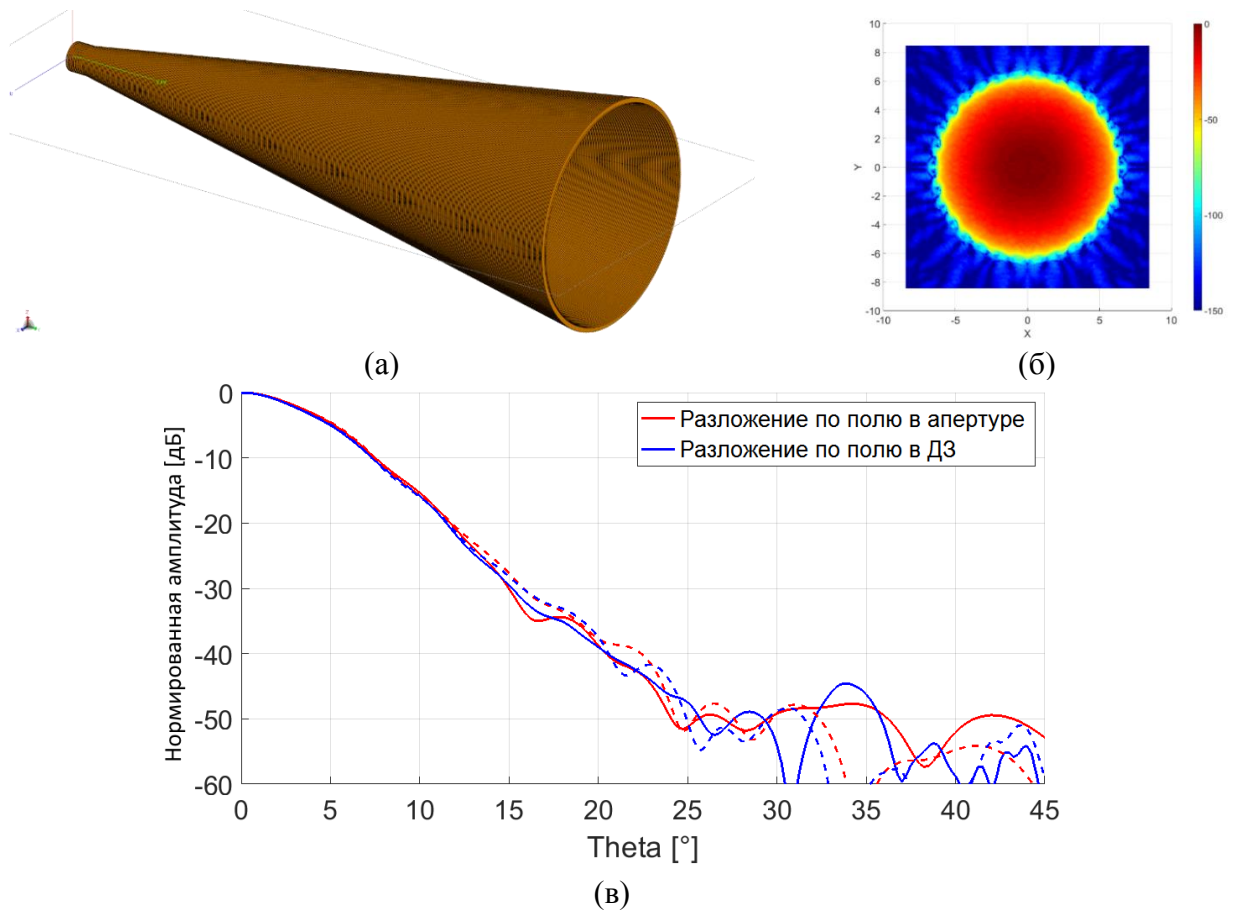


Рис. 4.24. К расчету лучевода с облучателем гофрированным рупором. 3D-модель рупора (а); амплитуда основной составляющей поля в апертуре из САПР (б); результаты расчета ближнего поля рупора на сфере двумя способами – по коэффициентам разложения в ряд поля в ДЗ и по коэффициентам разложения поля в апертуре (в).

На рис. 4.25 приведены распределения основной составляющей поля на сфере, проходящей через края контррефлектора, для случаев облучения лучевода рупором, идеальным источником и распределение, соответствующее оптимальному идеальному распределению заданной ширины. В целом, получившиеся результаты говорят о адекватности выбранной модели – результаты для случая облучения рупором близки к идеализированному случаю.

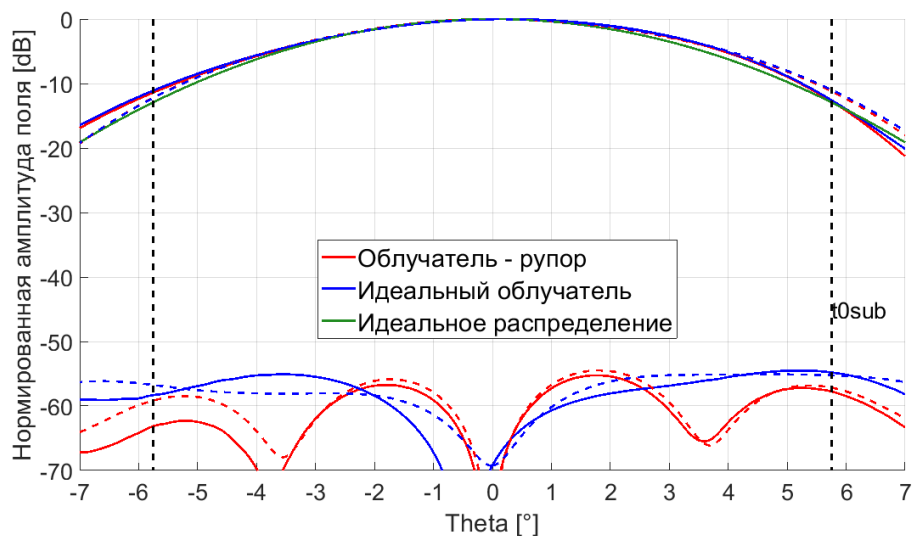


Рис. 4.25. Распределение амплитуды основной составляющей в двух плоскостях на сфере, проходящей через края контррефлектора, для случаев рупорного и идеального облучателей.



На рис. 4.26 приведены результирующие диаграммы направленности зеркальной антенны с идеальным и реальным облучателем лучевода. В расчете не учитывается кроссполяризация, излучаемая рупором, в связи с чем уровень кроссполяризации даже несколько меньше случая идеального облучателя. ДН по основной поляризации для двух случаев близки.

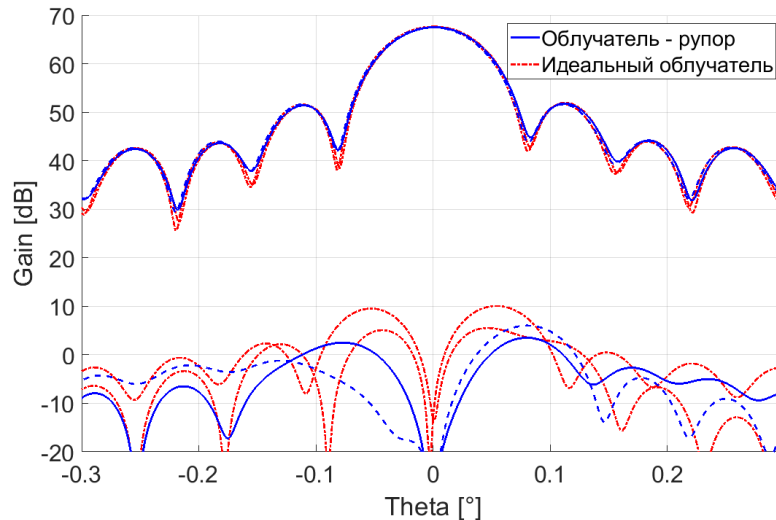


Рис. 4.26. Диаграммы направленности 32-метровой антенны в двух плоскостях с гофрированным рупорным облучателем и идеальным облучателем лучевода.

Результаты оценки потерь и эффективности сведены в таблицы 4.10 и 4.11. Потери в селективном зеркале учитываются по приближенной математической модели – усредняются для дискретных значений угла падения с учетом амплитудного распределения поля источника.

Таблица 4.10. Составляющие потерь и кроссполяризации лучевода и зеркальной системы с реальным облучателем

Анализируемое сечение		Полный расчет		
		Потери по основной поляризации, дБ	Омические потери, дБ	Кроссполяризация, дБ
Зеркала лучевода	ЧСП	0.0004	-	-
	1	0.0759	0.000108	-
	2	0.0869	0.000186	-54.79
	3	0.141	0.000227	-69.21
	4	0.1488	0.000227	-48.43
	5	0.1527	0.000229	-51.45
	6	0.1599	0.000226	-53.64
Поле на сфере		0.3866	-	-54.95
<b>Эффективность лучевода: 91.483%</b>				
Контррефлектор		0.3671	0.000135	-55.04
Рефлектор		0.4926	0.000136	-36.07

Учет облучающей системы – гофрированного рупора и частотно-селективной поверхности приводит к снижению общей эффективности относительно идеализированного случая на 2%, что является хорошим результатом разработки облучающей системы, однако говорит о необходимости грамотного проектирования облучателя и учета его характеристик в оценке эффективности антенны. При наличии большего вычислительного ресурса возможно также уточнение расчетов путем учета собственной кроссполяризации рупора.

Таблица 4.11. Составляющие эффективности зеркальной антенны

Составляющая потеря	Значение
$K_{обл}$	0.9148
$K_{ан}, K_{пер}, K_{диф}, K_{кросс}, K_{зат}$	0.8999
$K_{СКО}$	0.986
$K_{пот}$	
- омические потери на зеркалах	0.99986
- омические потери в лучевом	0.9999
$K_{\Sigma}$	0.8115

#### 4.4.4. Полный расчет с учетом источников искажений.

Разработав алгоритмы и проведя исследования распространяющихся в лучевом поле с учетом источников искажений по отдельности, таких как кожух лучевода, неидеальности зеркал и элементы облучающей системы, становится возможным провести полный расчет электромагнитных полей и оценку эффективности лучевода и зеркальной антенны с приближением расчетной модели к реальной. Расчетная модель лучевода 32-метровой зеркальной антенны в X-диапазоне изображена на рис. 4.27 (а). Показан рупор, частотно-селективная поверхность и кожухи лучевода. В расчете также учитываются отклонения поверхностей зеркал от теоретических с применением вышеописанной методики.

Последовательно проводится расчет полей в лучевом поле, анализируются распределения поля и потери на каждом этапе. Результаты оценки эффективности лучевода сведены в таблицу 4.12. Суммарная эффективность лучевода с гофрированным рупорным облучателем, кожухами и неидеальными поверхностями зеркал с СКО 0.1мм получилась 88.69%. Таким образом, после оптимизации конструкции лучевода и разработки близкого к оптимальному рупорного облучателя имеется снижение более чем на 4% относительно идеализированного случая.

Таблица 4.12. Составляющие потерь лучевода и зеркальной системы с реальным облучателем

Анализируемое сечение		Полный расчет		
		Потери по основной поляризации, дБ	Омические потери, дБ	Кроссполяризация, дБ
Зеркала лучевода	ЧСП	0.035	-	-
	1	0.0409	0.000108	-
	2	0.0519	0.000186	-54.79
	3	0.1195	0.000227	-31.81
	4	0.1203	0.000226	-30.11
	5	0.1350	0.000228	-28.11
	6	0.1319	0.000228	-30.33
Выходное поле на контррефлекторе		0.5212	-	-32.66
<b>Эффективность лучевода: 88.691%</b>				
Контррефлектор		0.5445	0.000149	-31.08
Рефлектор		0.7054	0.000138	-36.07

На рис. 4.27 (б) изображены распределения поля в сечении между верхними зеркалами с учетом и без учета кожуха, на рис. 4.27 (в) – распределения на выходе лучевода для разных расчетных случаев. Учет облучателя и источников искажений приводит к существенному возрастанию кроссполяризации и расширению луча основной поляризации, что необходимо учитывать при проектировании зеркальной системы.

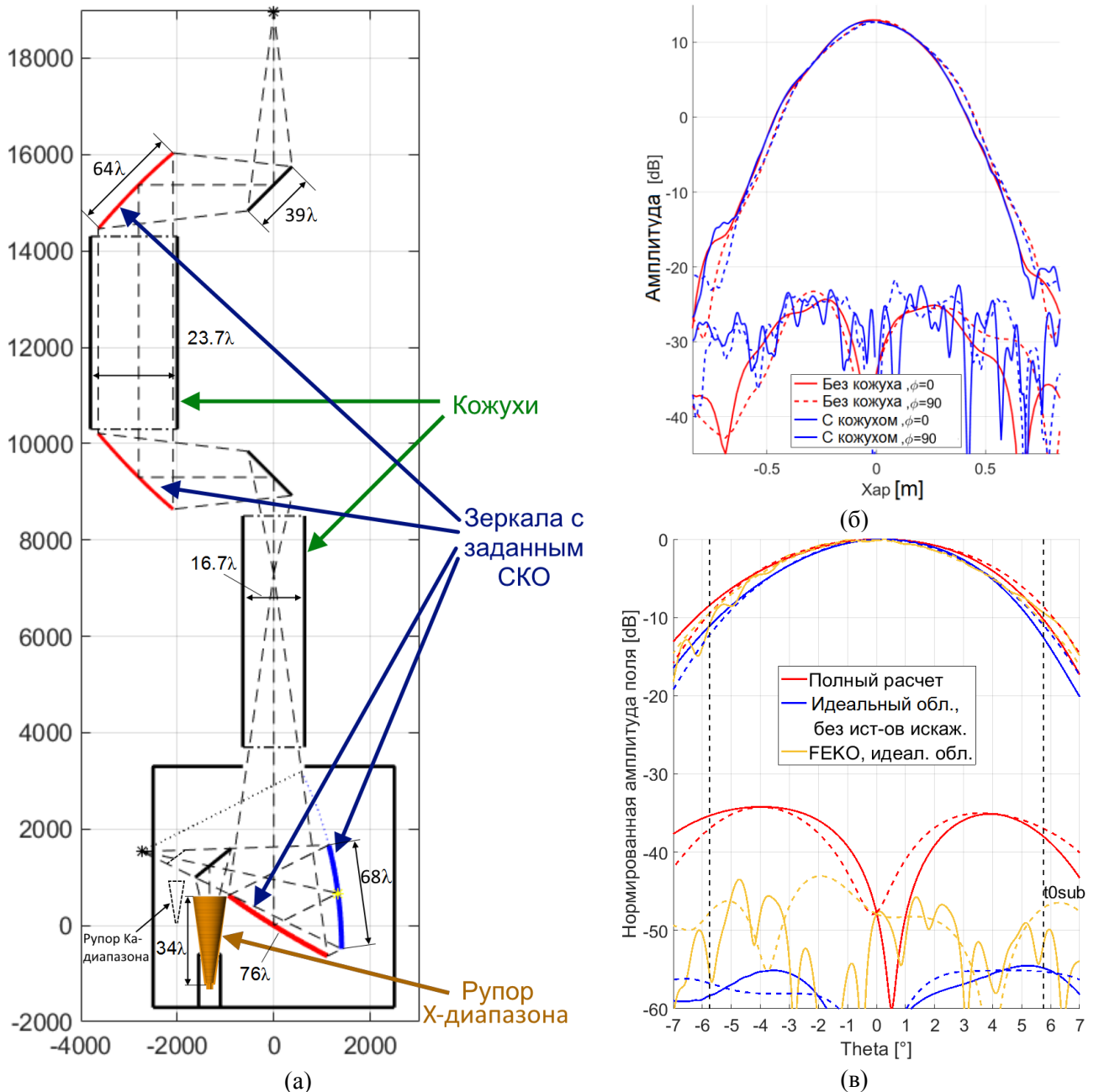


Рис. 4.27. К полному расчету лучевода. Полная геометрия лучевода с указанием учитываемых факторов (а); распределение поля в сечении между верхними зеркалами без учета и с учетом верхнего кожуха (б); распределение амплитуды основной составляющей на сфере, проходящей через края контррефлектора при  $\phi=0$  и  $90^\circ$  (в).

Результаты оценки суммарного КИП сведены в таблицу 4.13, в которую добавлены:

- потери за счет зазоров между щитами главного зеркала и за счет неточности установки зеркал лучевода, взятые из экспериментальных данных анализа эффективности антенн NASA (приведено далее в разделе 4.4.5);

- потери за счет затенения опорами контррефлектора, полученных геометрически путем «вырезания» из общей поверхности рефлектора площади, соответствующей опорам контррефлектора.

Таблица 4.13. Составляющие эффективности зеркальной антенны

Составляющая потеря	Значение
$K_{обл}$	0.88691
$K_{ан}, K_{пер}, K_{диф}, K_{кросс}, K_{зат}$	0.89472
$K_{СКО}$	0.9915
$K_{пот}$	
- омические потери на зеркалах	0.99972
- омические потери в лучевом	0.99993
Потери за счет зазоров между щитами	0.9982
Потери за счет затенения опорами контррефлектора	0.9470
Потери за счет неточности установки зеркал лучевода	0.9994
$K_{\Sigma}$	0.7431

Результирующие диаграммы направленности изображены на рис. 4.28. Помимо диаграмм текущего расчета, для сравнения также добавлены ДН без учета СКО зеркал лучевода и кожухов с облучением элементом Гюйгенса и гофрированным рупором. Добавление всех источников искажений в модель увеличивает кроссполяризацию и суммарные дифракционные потери, при этом общий вид излучения основной поляризации существенно не меняется, что также видно из картины распределения амплитуды вектора Пойнтинга в лучевом на рис. 4.29.

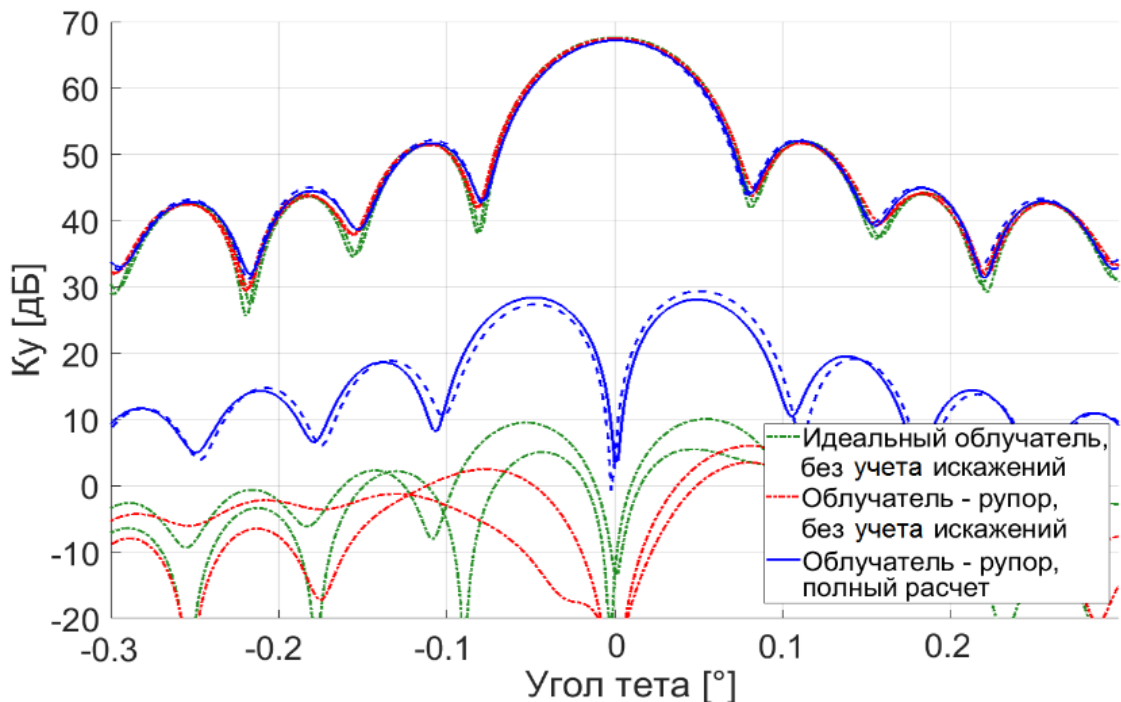


Рис. 4.28. Расчетные диаграммы направленности 32-метровой зеркальной антенны. Синие линии – суммарные ДН с облучением гофрированным рупором и с учетом всех источников искажений, зеленые – ДН без учета источников искажений (СКО зеркал, кожухи) с облучением элементом Гюйгенса, красные – ДН без учета источников искажений с облучением гофрированным рупором.

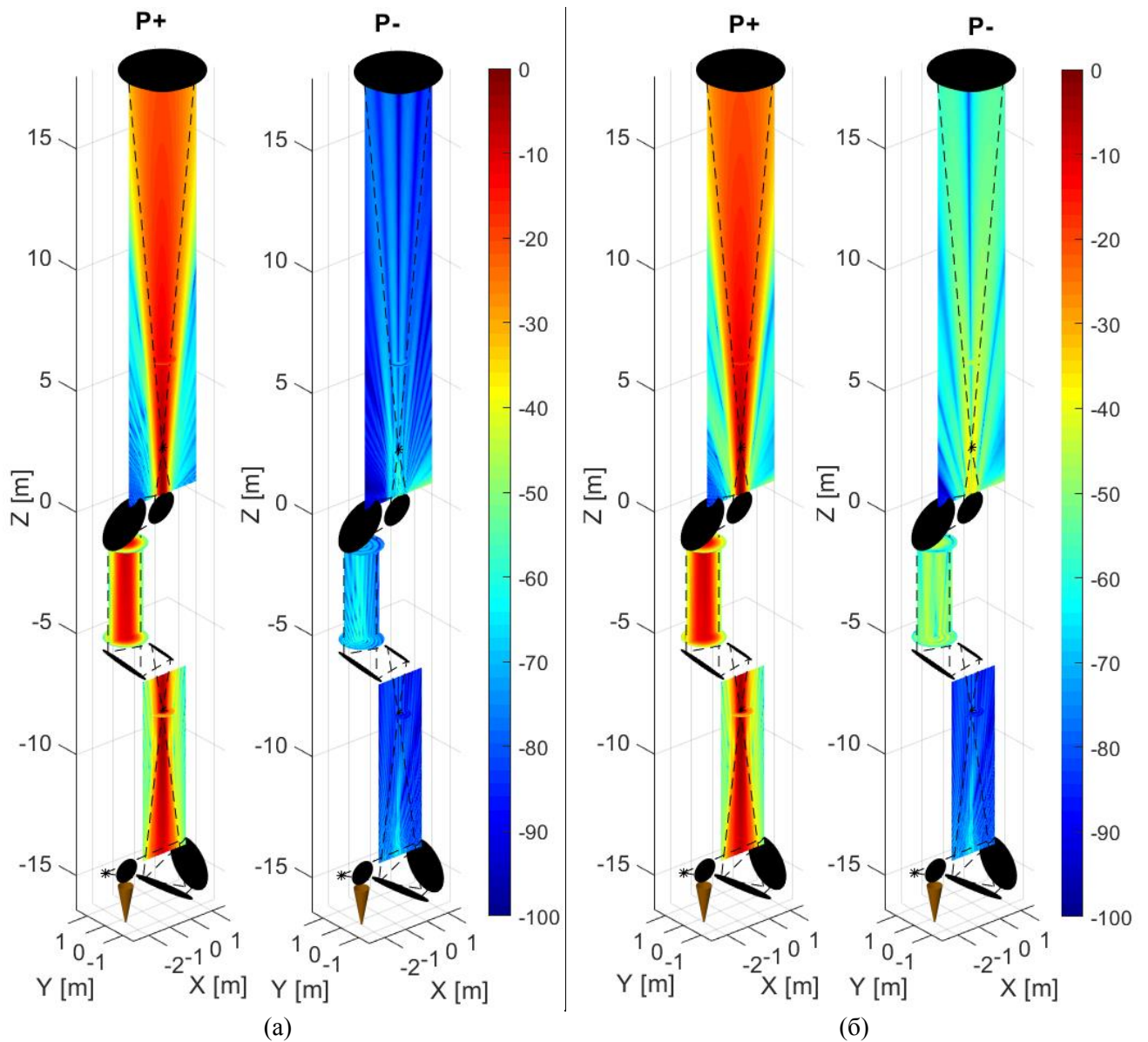


Рис. 4.29. Распределения модулей вектора Пойнтинга основной (слева) и кроссполаризационной (справа) составляющих в лучевом, облучаемом гофрированным рупором. Случай идеального лучевода в свободном пространстве (а); случай учета кожухов и неидеальностей поверхностей зеркал (б).

Приведенный анализ проводился только в X-диапазоне частот в связи с тем, что на более высоких частотах анализ становится более трудоемким, и резко увеличиваются требования к ЭВМ. Однако для оценки соответствия разрабатываемой антенны требованиям, предъявляемым к антеннам ДКС, был также проведен анализ ожидаемой эффективности в Ka-диапазоне частот с учетом источников искажений. Анализ проводился исходя из следующих соображений.

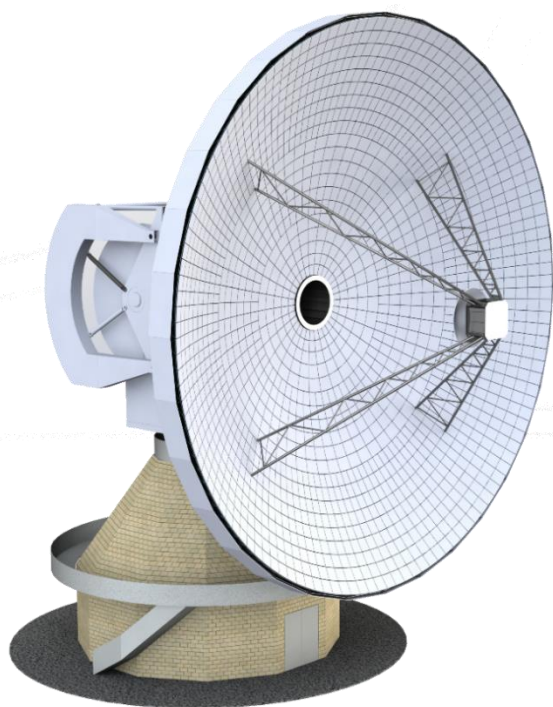
- При переходе от X-диапазона к Ka-диапазону более строго выполняются соображения геометрической оптики – существенно меньше влияние дифракции, рассеяния на краях зеркал, в связи с чем в Ka-диапазоне стоит ожидать нехудшие данные по потерям в идеальном лучевом (увеличиваются только потери за счет неидеальностей зеркал и неточности юстировки). Для оценки суммарной эффективности был взят наихудший случай – когда потери соответствуют потерям в X-диапазоне.

- Для определения влияния отклонений поверхностей зеркал лучевода от теоретических взяты данные расчета в X-диапазоне с СКО зеркал 0.4мм, примерно соответствующее СКО 0.1мм в X-диапазоне.
- Омические потери рассчитаны экстраполяцией данных (с эквивалентным пересчетом проводимости металла на высокие частоты).
- Потери за счет зазоров между щитами рефлектора взяты из экспериментальных данных измерений антенн NASA.
- Потери за счет затенения также, как и в случае X-диапазона, определяются в геометрооптическом приближении.

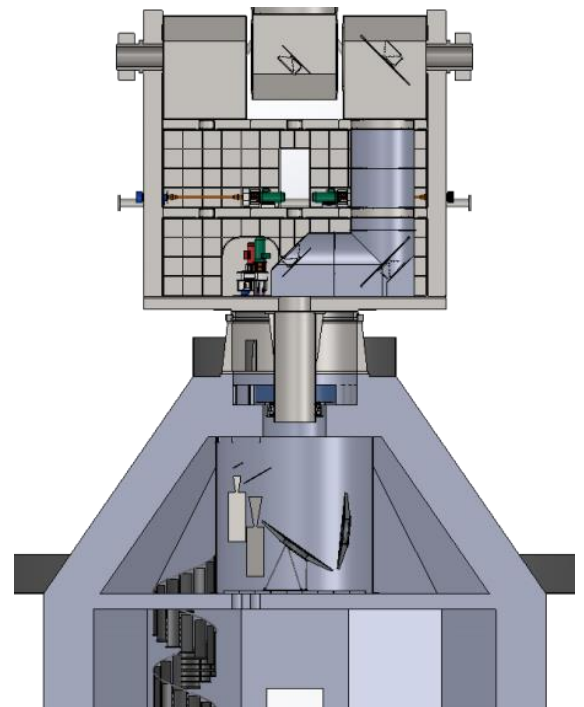
Получившиеся результаты сведены в таблицу 4.14.

Таблица 4.14. Ожидаемая эффективность зеркальной антенны в Ка-диапазоне

Составляющая потерь	Значение
$K_{обл}$	0.8571
$K_{ап}, K_{пер}, K_{диф}, K_{кросс}, K_{зат}$	0.895
$K_{СКО}$	0.8562
$K_{пот}$	
- омические потери на зеркалах	0.99944
- омические потери в лучеводе	0.99986
Потери за счет зазоров между щитами	0.9957
Потери за счет затенения опорами контррефлектора	0.9470
Потери за счет неточности установки зеркал лучевода	0.99
$K_{\Sigma}$	0.6127



(а)



(б)

Рис. 4.30. Проект конструкции разрабатываемой 32-метровой антенны. Общий вид (а); лучеводный тракт (б).

#### 4.4.5. Сравнение с аналогами – антеннами ДКС NASA и ESA.

В предыдущем разделе был проведен полный векторный электродинамический расчет 32-метровой антенны ДКС с полноповоротным лучеводом, впервые создаваемой в России. Исследование, анализ и оптимизация антенны проводились с применением методов и алгоритмов вычислительной электродинамики на основе векторов Римана-Зильберштейна. Основные допущения и приближения, принятые в расчете:

- 1) Расчет поверхностных токов в приближении физической оптики (допустимо при низком уровне облучения края зеркал).
- 2) Не учитываются вторичные отражения от зеркал (допустимо при высокой направленности пучка).
- 3) Не учитываются некоторые конструктивные элементы конструкции (крепления, перекрытия, кожухи в участках рядом с зеркалами).
- 4) В расчете с рупором не учитывается его собственное кроссполяризационное излучение (допустимо при низком уровне кроссполяризации < минус 30дБ, что справедливо для применяемого гофрированного рупора).
- 5) В расчете с частотно-селективным зеркалом – получение потерь за счет наличия зеркала из идеализированной модели бесконечной решетки.
- 6) Не учитывается обратное отражение в облучающую систему (допустимо для двухзеркальной системы с модифицированными профилями).
- 7) Учет затенения опорами контррефлектора в геометрооптическом приближении.
- 8) Учет потерь за счет зазоров между щитами главного зеркала и неточной установки зеркал исходя из экспериментальных данных аналогичных антенн NASA.

Первые два допущения относятся к методам расчета и могут быть решены при использовании метода интегральных уравнений, что не представляется возможным из-за сложности задачи. Остальные допущения также связаны с ограниченными вычислительными ресурсами. Наиболее существенный вклад в отличие расчетных данных от экспериментальных предположительно внесут последние два фактора.

Для обобщения анализа и научно-технического уровня разработки необходимо провести сравнение с антеннами-аналогами. Был проведен обзор существующих публикаций с результатами расчетов/измерений эффективности больших зеркальных антенн ДКС. Антенны ДКС, информация по которым имеется в открытом доступе в [2, 10, 11, 109]:

- антенна DSS-15 с диаметром главного зеркала 34 метра (Голдстоун, США) без лучевода;
- антенна DSS-13 с диаметром главного зеркала 34 метра (Голдстоун, США) с лучеводом;
- антенна DSS-24 с диаметром главного зеркала 34 метра (Голдстоун, США) с лучеводом;
- антенна DSA-3 с диаметром главного зеркала 35 метров (Аргентина) с лучеводом.

Таблица 4.15. Сравнительная оценка эффективности существующих антенн ДКС.

Параметр/элемент	DSS-13 из [109]		DSS-15 из [10]	DSS-24 из [10]	DSA-3 из [11]
	X	Ka			
КИП двухзеркальной системы ( $K_{ан}$ , $K_{пер}$ , $K_{диф}$ , $K_{кросс}$ )	0.8711	0.8995	0.8949	-	-
Главное зеркало					
– омические потери	0.99954	0.9991	-		
– потери за счет зазоров между щитами	0.9982	0.9957	-	-	-
– СКО	0.9889	0.8532	0.9692		
Контррефлектор					
– омические потери	0.99954	0.9991	-	-	-
– СКО	0.9980	0.9714			
Нижние 2 зеркала лучевода					
– переливание	0.9957	0.9892	-	-	-
– омические потери	0.99903	0.9982			
– СКО	0.9970	0.9575			
Верхние 4 зеркала лучевода					
– переливание	0.9940	0.9888	-	-	-
– омические потери	0.99807	0.9961			
– СКО	0.9960	0.9714			
Облучающая система (рупор, волноводы, ЧСП)	0.9353	-	-	-	-
Затенение опорами контррефлектора	0.9180	0.9180	0.8610	-	-
Неточность установки зеркал лучевода	0.9994	0.99	-	-	-
<b>Итого расчет</b>	<b>0.7176</b>	<b>0.567</b>	<b>0.7468</b>	<b>-</b>	<b>0.818-0.82</b>
<b>Итого измерение</b>	<b>0.711</b>	<b>0.571</b>	<b>-</b>	<b>0.715</b>	<b>-</b>

Подробная информация по антеннам NASA и ESA, их конструкции и характеристикам закрыта – хранится во внутренних отчетах, недоступных в открытом доступе. Наиболее полные данные имеются для антенны DSS-13 в статье [109]. Оценка эффективности учитывает множество факторов, но в статье отсутствует информация о методах и формулах расчета (кроме расчета двухзеркальной системы методом физической оптики), о математической модели и допущениях. Однако подробно расписана методика измерений, являющаяся довольно точной. Характеристики антенны DSS-15, являющейся двухзеркальной антенной с модифицированными профилями без лучевода, приведены в [10]. Автор пишет, что расчет проводился методом физической оптики с применением измеренных диаграмм рупорного облучателя. Антенна DSS-24 является одной из трех стандартных антенн ДКС с лучеводом (DSS-24, 25 и 26), расположенных в Голдстоуне. Для нее представлены результаты серии измерений эффективности при разных условиях. Описание расчетных характеристик антенны DSA-3 приведено в [11]. Автор пишет, все расчеты были проведены в программе Tisra GRASP методом физической оптики. К оценке эффективности антенны были добавлены экспериментальные данные по влиянию СКО зеркал, затенения опорами, потери за счет зазоров между щитами.



Результирующая эффективность получилась порядка 82%, что кажется несколько завышенным значением и требует верификации. К сожалению, в открытых источниках более подробная информация по расчету или измерениям антенны отсутствует.

Все представленные выше антенны ДКС с лучеводами построены по одной схеме – двухзеркальная схема с модифицированными профилями, четырехзеркальный верхний лучевод и однозеркальный нижний лучевод с эллипсоидом, вносящим искажения. Исходя из сравнительного анализа, в работе получены расчетные значения эффективности, превышающие аналоги на 3-4%. При этом оценки эффективности, проводившиеся для разрабатываемой 32-метровой антенны, относятся ко входу рупора без учета волноводного СВЧ-тракта. Максимальные потери в разработанном СВЧ-тракте составляют 0.15дБ, что соответствует снижению эффективности на 2-2.5%, однако это не относится к предмету текущего анализа и может быть учтено добавлением соответствующего коэффициента в таблицы эффективности.



(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 4.31. Антенны ДКС из комплекса дальней космической связи Голдстоун. DSS-13 (а); DSS-15 (б); антенны DSS-24, 25 и 26 (в); облучающая система S/X-диапазонов частот антенны DSS-24 (г).

#### 4.5 Выводы

В четвертой главе представлены результаты электродинамического моделирования, анализа и оптимизации лучевой и зеркальной системы 32-метровой антенны дальней космической связи, разрабатываемой в рамках реализации программы по освоению дальнего космоса и создания средств ДКС. Лучевод антенны спроектирован в соответствии с разработанным критерием отсутствия искажений – сохранения симметрии и отсутствия кроссполяризации в ГО приближении с заданным коэффициентом трансформации угловой ширины пучка. Представленная методика синтеза таких лучеводов позволяет минимизировать искажения и преобразовывать ширину луча, что в свою очередь позволяет снижать затраты на изготовление за счет меньших размеров рупорных облучателей и зеркал лучевода.

Первоначальная конструкция лучевода и зеркальной системы, спроектированная в предположении распространения гауссовых пучков, не обеспечивала требуемую эффективность системы из-за больших потерь за счет дифракции – переливания энергии за края зеркал, в связи с чем возникла необходимость проведения более точного электромагнитного расчета и перепроектирования системы. Было учтено множество факторов, среди которых конструктивные (размеры облучателей, зеркал и кожухов), технологические (возможности производства). Была проведена серия итерационных расчетов, ставшая возможной за счет применения методов вычислительной электродинамики векторов Р-3, имеющих преимущества в скорости расчета относительно существующих САПР, в результате чего была синтезирована окончательная геометрия лучевода и двухзеркальной модифицированной системы Кассегрена.

На основе полного электродинамического анализа с приближением расчетной модели к реальной, учитывающей поле разработанного рупорного облучателя, влияние кожухов лучевода, случайные отклонения поверхностей зеркал лучевода от теоретических, были получены значения эффективности антенны, превосходящие аналогичные антенны NASA на несколько процентов. В связи с высокой точностью расчета верифицированными методами, учетом большого количества факторов, приводящих к искажениям поля и снижению эффективности после изготовления, настройки и проведения измерений опытного образца 32-метровой антенны ДКС можно ожидать результаты эксперимента близкие к расчетным.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

1. Проведен литературный и исторический обзор развития антенных систем ДКС, их методов проектирования, электродинамического анализа и оптимизации. Определено современное состояние развития больших зеркальных антенн, обеспечивающих высокую энергетическую эффективность радиосвязи. Установлено, что современные средства ДКС идут по пути создания антенн с диаметром 30-35 метров с лучеводными трактами, имеющие значительные преимущества относительно классических двухзеркальных антенн с облучателем во вторичном фокусе. На основе обзора определены основные недостатки таких систем – это традиционное наличие эллиптического зеркала лучевода, искажающего структуру поля и снижающего эффективность системы, а также традиционный электромагнитный анализ структур асимптотическими методами без учета факторов, вносящих искажения.

2. В рамках развития российских средств ДКС для создания 32-метровой антенны с лучеводом предложено применять неклассическое представление электромагнитного поля и методы, получаемые на его основе – векторы Римана-Зильберштейна, являющиеся линейной комбинацией векторов **E** и **H** и описывающие поля идеальной круговой поляризации. В свободном пространстве уравнения Максвелла распадаются на два независимых уравнения, векторы круговых поляризаций распространяются и переносят мощность независимо друг от друга.

3. Получены основные соотношения для методов вычислительной электродинамики, применимые для широкого спектра практических задач – метод физической оптики, метод собственных функций в циклической и спиральной системах координат, основы метода параболического уравнения. Для этого применены некоторые элементы математического аппарата квантовой механики, позволившие получить простое и симметричное представление поля рядом цилиндрических и сферических гармоник. Разложение в ряд по векторным сферическим гармоникам позволяет получать решение напрямую без необходимости проведения математических операций над скалярными гармониками. Применяя свойство независимости векторов, становится возможным проведение расчетов для одного набора гармоник для получения полного поля. Представление полного поля в дальней зоне имеет лишь одну векторную составляющую.

4. Разработан алгоритм расчета сферических функций (D-функций Вигнера) на основе рекуррентных соотношений и соотношений симметрии без накопления ошибки как минимум до индекса  $n=700$ . Получены выражения для коэффициентов разложения полей в ряд для гладкого и гофрированного волноводов, примененные в дальнейшем для решения задачи распространения

в кожухах лучеводов. В гофрированном волноводе с импедансными граничными условиями векторы распространяются независимо.

5. Получены выражения для коэффициентов разложения в ряд по векторным сферическим гармоникам, в том числе по токам на поверхности идеально проводящего источника. Такое выражение позволяет упростить процедуру последовательного расчета полей цепочки рассеивающих поверхностей – лучеводов и зеркальных антенн.

6. На основе полученных методов разработаны алгоритмы и специальное программное обеспечение для расчета и оптимизации зеркальных антенн и лучеводов. Проведена верификация алгоритмов сравнением с широко распространенными САПР трехмерного электродинамического моделирования и результатами эксперимента. Разработанное ПО внедрено на предприятии АО «ОКБ МЭИ» и применяется в разработках перспективных антенных систем, в том числе для модернизации больших зеркальных антенн ТНА-1500 и П-2500.

7. Разработаны методики учета влияния неидеальностей поверхностей зеркал и кожухов лучеводов на распространяющиеся поля. Получены эмпирические формулы для учета случайных отклонений профилей зеркал от теоретических. Проведен анализ двухзеркального лучевода с двумя типами кожухов – гладким и гофрированным, определены рекомендации и требования к изготовлению зеркал и кожухов.

8. Разработана универсальная методика проектирования двухзеркальных лучеводов, позволяющих проводить синтез геометрии по заданному коэффициенту трансформации угловой ширины пучка лучей, не вносящих искажения в распространяющиеся поля в геометрооптическом приближении.

9. Проведен векторный электродинамический анализ и оптимизация 32-метровой зеркальной антенны с лучеводом по критерию максимизации общей эффективности и коэффициента усиления с учетом лучеводного тракта, облучающей системы, кожухов лучевода, случайных отклонений поверхностей зеркал от теоретических. На основе полного электродинамического анализа с приближением расчетной модели к реальной, учитывающей источники искажений поля, были получены значения эффективности антенны, превосходящие аналогичные антенны NASA на несколько процентов.

10. Теоретические результаты работы внедрены в учебный процесс радиотехнического факультета НИУ «МЭИ» (Приложение Ж), практические результаты непосредственно в разработку новой изготавливаемой в 2019-2025г. 32-метровой зеркальной антенны (Приложение З).

**Список сокращений**

АР	– амплитудное распределение
АС	– антенна система
БЗ	– ближняя зона
Векторы Р-З	– векторы Римана-Зильберштейна
ГО	– геометрическая оптика (геометрооптический)
ГТД	– геометрическая теория дифракции
ДЗ	– дальняя зона
ДКА	– дальний космический аппарат
ДКС	– дальняя космическая связь
ДН	– диаграмма направленности
ИУ	– интегральные уравнения
КА	– космический аппарат
КИП	– коэффициент использования поверхности
КНД	– коэффициент направленного действия
Ку	– коэффициент усиления
МСИ	– метод согласования с источником
МСФ	– метод собственных функций
МШУ	– малозумящий усилитель
ПК	– персональный компьютер
ПО	– программное обеспечение
ПУ	– параболической уравнение
САПР	– система автоматизированного проектирования
СВЧ	– сверхвысокие частоты
СКО	– среднеквадратическое отклонение
СЛАУ	– система линейных алгебраических уравнений
УМ	– усилитель мощности
ФО	– физическая оптика
ФТД	– физическая теория дифракции
ЧСП	– частотно-селективная поверхность
ЭВМ	– электронно-вычислительная машина
ЭМ	– электромагнитный

### Список литературы

1. D. J. Mudgway, "Uplink-Downlink: a History of the Deep Space Network 1957-1997," The NASA History Series, 2001.
2. D. A. Bathker, W. Veruttipong, T. Y. Otoshi, and P. W. Cramer, Jr., "Beam Waveguide Antenna Performance Predictions with Comparisons to Experimental Results," *Microwave Theory and Techniques, Special Issue (Microwaves in Space)*, vol. MTT-40, no. 6, pp. 1274–1285, 1992.
3. W. Veruttipong and M. Franco, "A Technique for Computation of Noise Temperature Due to a Beam Waveguide Shroud," 1993 IEEE International Antennas and Propagation Symposium Digest, The University of Michigan at Ann Arbor, pp. 1659–1662, June 28–July 2, 1993.
4. W. A. Imbriale, "On the Calculation of Noise Temperature in Beam Waveguide Systems," *Proceedings of the International Symposium on Antennas and Propagation*, Chiba, Japan, pp. 77–80, September 24–27, 1996.
5. Tom Y. Otoshi, "Noise Temperature Theory and Applications for Deep Space Communications Antenna Systems," Artech, 2008.
6. A. G. Cha and W. A. Imbriale, "A New Analysis of Beam Waveguide Antennas Considering the Presence of the Metal Enclosure," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 9, pp. 1041–1046, September 1992.
7. W. A. Imbriale, T. Y. Otoshi, and C. Yeh, "Power Loss for Multimode Waveguide and Its Application to Beam-Waveguide Systems," *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 5, pp. 523–529, May 1998.
8. T. Veruttipong, J. R. Withington, V. Galindo-Israel, W. A. Imbriale, and D. Bathker, "Design Considerations for Beam-waveguide in the NASA Deep Space Network," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-36, no. 12, pp. 1779–1787, December 1988.
9. W. A. Imbriale and D. J. Hoppe, "Computational Techniques for Beam Waveguide Systems," 2000 IEEE Antennas and Propagation International Symposium, Salt Lake City, Utah, pp. 1894–1897, July 16–21, 2000.
10. William A. Imbriale, "Large Antennas of the Deep Space Network", John Willey & Sons Inc., 2003.
11. Marco Formaggi. Enhanced Modeling and Design of Ground Station Antennas, Докторская диссертация, университет Павии, 2007.
12. Гурбанязов М. А., Козлов А. Н., Тарасов Б. В. Современные проблемы построения зеркальных антенн. – А.: Ылым, 1992.
13. Мирошниченко А. Я. Лучеводы для двухзеркальных антенн // Зарубежная радиоэлектроника. 1981. № 7. С. 28–62.

14. А. А. Бакин, Л. И. Оборина, И. В. Трифанов. Расчет параметров двухзеркального лучевода // Вестник СибГАУ. 2012. № 1. С. 114–117.
15. E.M.T. Jones, "Paraboloid Reflector and Hyperboloid Lens Antennas," IRE Trans.- Antennas Propag., vol. AP-2, no.4, pp. 119-127, July, 1954.
16. A.C. Ludwig, "The Definition of Cross Polarization," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 21, no.1, pp.116-118, Jan., 1973.
17. A.F. Kay, "Wide angle horn-feed closely spaced to main reflector," US Patent 3,274,603, Sept., 20, 1966.
18. P.D. Potter, "A New Horn Antenna with Suppressed Sidelobes and Equal Beamwidths," Technical Report No.32-354, J.P.L., California Institute of Technology, Febr., 1963.
19. A.D. Olver, P.J.B. Clarricoats, A.A. Kishk and L. Shafai, "Microwave Horns and Feeds," Institution of Engineering and Technology, 30 June 1994.
20. Modern Antenna Handbook, edited by Conctantine Balanis, (Ch.18), (2008), A John Wiley & Sun, Inc.
21. Jerome D. Hanfling, Aperture Fields of Paraboloidal Reflectors by Stereographic Mapping of Feed Polarization, IEEE Transactions on Antennas and Propagations, vol. AP-18, No.3, May 1970, p. 392-396.
22. Peter A. Watson, Samir I. Ghobrial, Off-Axis Polarization Characteristics of Cassegrainian and Front-Fed Paraboloidal Antennas, IEEE Transactions on Antennas and Propagations, vol. AP-20, No. 6, November 1972, p.691-698.
23. T. S. Chu, R. H. Turrin, "Depolarization Properties of Offset Reflector Antennas," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-21, No. 3, pp. 339-345, March 1973.
24. A. W. Rudge, N. A. Adatia, "Offset-Parabolic Reflector Antennas: a Review," Proceedings of the IEEE, Vol. 66, No. 12, pp. 1592-1617, December 1978.
25. A.W. Rudge, N.A. Adatia, "Beam squint incircularly polarized offset—Reflector antenna," Electronics Letters, Vol.11, 513–515, 1975
26. Y.Mizugutch, M.Akagawa and H.Yokoi, "Offset dual reflector antenna," in IEEE Antennas Propagat. Soc. Symp. Dig., Amherst, MA, Oct. 1976, p.2-5
27. Willard V.T. Rush, Aluizio Prata, Yahya Rahmat-Samii, Robert A. Shore, "Derivation and Application of the Equivalent Paraboloid for Classical Offset Cassegrain and Gregorian Antennas", IEEE Transactions on Antennas and Propagations, vol. AP-38, No.8, August 1990, p.1141-1149.
28. v.Trentini, G. Romeiser, K.P. Reitzig, "Änderungs-und Verbesserungsmöglichkeiten im Aufbau großer Cassegrainantennen mit Hornparabolspeisung," Frequenz, Volume 22, Issue 8, pp.216-223, Published in Aug. 1968.

29. M. Mizusawa and T. Kitsurugawa, "A Beam-Waveguide Feed Having a Symmetric Beam for Cassegrain Antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagations*, vol. AP-21, No.6, November 1973, 884-886.
30. I. Chiba and Y. Konishi, "Development of Large Earth-Station Reflector Antennas in Japan," *IEEE Antennas and Propagations Magazine*, vol.53, No.6, December 2011, p.245-257.
31. T. Veruttipong, J. Withington, V. Galindo-Israel, W. Imbriale, D. Bathker, "Design Consideration for the Beam-Waveguide Retrofit of a Ground Antenna Station," TDA Progress Report 42-87, July-September 1986.
32. C. Dragone, "Offset multireflector antennas with perfect pattern symmetry and polarization discrimination," *Bell Syst. Tech. J.*, vol.57, No.7, p.2663-2684, Sept. 1978.
33. United States Patent 4,166,276, Dragone, Aug. 28 1979.
34. K. W. Broun, "Magnified Beam Waveguide Feed with Perfect Pattern Symmetry," *IEEE AP Soc. Int. Symposium*, 2—26 June 1998, vol.2, p.852-855.
35. T. Cwik, V. Jamnejad, "Beam Squint Due to Circular Polarization in a Beam-Waveguide Antenna," TDA Progress Report 42-128, February 15, 1997.
36. G. Goubau and F. Schwing, "On the Guide Propagation of Electromagnetic Wave Beams," *Institute of Radio Engineers Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-9, No. 5, pp. 248–256, May 1961. and *Propagation*, vol. 46, no. 12, pp. 1790–1796, December 1998.
37. P. F. Goldsmith, "Quasioptical Systems," *IEEE Press*, 1998.
38. W. A. Imbriale, M. S. Esquivel, and F. Manshadi, "Novel Solutions to Low-frequency Problems with Geometrically Designed Beam-waveguide systems," *IEEE Transactions on Antennas*
39. Коган Б.Л., Электромагнитные поля круговой поляризации, Докторская диссертация, 2004.
40. Попереченко Б.А. Большие зеркальные антенны, //Проблемы антенной техники, М.: Радио и связь, 1989. – 368 с.
41. L. Silberstein. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung (Basic electromagnetic equations in bivectorial form) // *Ann. d. Phys.* 327, pp. 876–880, 1907.
42. I. Bialynicki-Birula. Photon wave function // *Progress in Optics* 36: 245–294, 1996
43. I. Bialynicki-Birula. The role of the Riemann-Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46(15), Nov. 2012.
44. H. Weber. Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen bearbeitet von Heinrich Weber (Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn)// p.348, 1901.



45. E. Beltrami. Considerazioni idrodinamiche // Rendiconti del reale Istituto Lombardo, Milano, 1889, t.XXII, p. 121-130.
46. И.С. Громека. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости // Учёные записки Казанского университета, 1881, см. также: И.С. Громека. Собрания сочинений, Изд- во АН СССР, Москва, 1952, с. 76-148
47. Max von Laue. Die Relativitätstheorie. Zweiter Band : Die Allgemeine Relativitätstheorie Und Einsteins Lehre Von Der Schwerkraft, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1921 and 1923.
48. Hermann Minkowski. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse: 53–111, 1908.
49. H. Bateman. The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion. Cambridge: at the University Press, 1915.
50. L. Lewin. Theory of waveguides. London: Butterworth and Co Ltd., 1975.
51. Rumsey V.H. A New Way of Solving Maxwell's Equations // IRE Transactions on Antennas and Propagation, 461-465, Sept. 1961.
52. A. Lakhtakia, Beltrami Fields in Chiral Media. Singapore: River Edge, N.Y.: World Scientific, 1994.
53. A. Lakhtakia. Vector spherical wavefunctions for orthorhombic dielectric-magnetic material with gyrotropic-like magnetoelectric properties // Journal of Optics, Volume 41, Issue 4, pp 201-213, Dec. 2012.
54. B. L. Kogan. Application of Maxwell's equations in diagonal form to the investigation of polarization and diffraction properties of reflector antennas. Proceedings of international symposium on satellite communications and remote sensing, (SCRS'99), Yandai, China, - October 26-29, 1999. - p. 113-114.
55. Коган Б.Л. О векторных сферических гармониках круговой поляризации. //Антенны. - 2004.- в. 2 (81), - С. 59-63.
56. B. L. Kogan, "Application of Faraday's vectors in antenna theory," in 1st Eur. Conf. Ant. and Propag. (EuCAP), Nice, France, Nov. 2006.
57. Б.Л. Коган. Применение векторов Фарадея в теории антенн. // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2008. N7. URL: <http://jre.cplire.ru/mac/jul08/1/text.html>
58. I. V. Belkovich, B. L. Kogan. Utilization of Riemann-Silberstein Vectors in Electromagnetics // Progress in Electromagnetics Research B. 2016. V. 69. № 1. p. 103-116. DOI: 10.2528/PIERB16051809

59. Igor V. Belkovich; Boris L. Kogan. The Riemann-Silberstein vectors theory and vector spherical expansion // Progress in Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS) 2017, 22-25 May 2017, St. Petersburg, Russia. DOI: 10.1109/PIERS.2017.8262144
60. Igor V. Belkovich; Boris L. Kogan. Application of the Riemann-Silberstein vectors for the analysis of electromagnetic fields in reflector antennas // Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW), 2017, Divnomorskoe, Russia. DOI: 10.1109/RSEMW.2017.8103570
61. Д.А. Варшалович, А.Н. Москалёв, В. К. Херсонский: Квантовая теория углового момента. «Наука», Ленинград, 1975 г.
62. Fresnel A. M'emoire sur la diffraction de la lumi`ere. In Œuvres compl'etes d'Augustin Fresnel, Tome premier: Th'eorie de la Lumi`ere (eds De S'énarmont H, Verdet 'E, and Fresnel L), pp. 247–382, Imprimerie imp'eriale, Paris, 1818.
63. Kirchhoff G. Mathematische Optik (Vorlesungen uber mathematische Physik, 2. Band), Teubner Verlag, Leipzig, 1891.
64. Rubinowitz A. Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen // Annalen der Physik. IV Folge, Band 53, Heft 12, 257-278.
65. F. Kottler. Electromagnetische theorie der Beugung an schwarzen Schirmen // Ann. d. Phys. 70. S. 405. 1923.
66. Larmor J. On the mathematical expression of the principle of Huygens // Proc. London Math. Soc., 1, 1–13.
67. A. E. H. Love. The Integration of Equations of Propagation of Electric Waves // Phil Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 197, 1901, pp. 1-45.
68. W. V. Ignatowsky. Reflexion elektromagnetisches Wellen an einem Draht // Annalen der Physik, vol. 323, Issue 13, pp.495-522.
69. H. M. Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 10, 91 (1911).
70. Schelkunoff S.A. Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems // Bell System Technical Journal, Volume 15, 1936, pp. 92-112.
71. Schelkunoff S.A. On diffraction and radiation of electromagnetic waves // Physical Review, Volume 56, 1939, pp. 308-316.
72. Stratton J.A. and Chu L.J. Diffraction theory of electromagnetic waves // Physical Review, Volume 56, 1939, pp. 99-107.
73. Stratton J.A. Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941.
74. Б. Л. Коган, И. В. Белькович. Метод физической оптики для расчета полей апертурных антенн с применением векторов Римана-Зильберштейна // VI Всероссийская Микроволновая конференция, 2018, Москва.

75. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп, М.: НАУКА, ГРФМЛ, 1965. – 588 с.
76. Гельфанд И.М., Шапиро З.Я. Представления группы вращений трёхмерного пространства и их применения // Успехи математических наук, 1952. - 7:1 (47), 3 117.
77. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, М.: Физматгиз, 1958. – 368 с.
78. Naobo Yuan, Hongguang Zhou, Hongwei Liu, Xiaojie Dang, and Xi Chen. Computing Mutual Impedance of Antennas by Spherical Harmonic Transform. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 67 (7), 4377–4384, 2019.
79. Dachselt, H., Fast and accurate determination of the Wigner rotation matrices in the fast multipole method, J. Chem. Phys., 124, 144115–144121.
80. T. Fukushima. Numerical computation of Wigner's d-function of arbitrary high degree and orders by extending exponent of floating point numbers. // Technical Report, National Astronomical Observatory of Japan, 2016.
81. J.D. Jackson. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons Ltd. 1962.
82. B.C. Brock. Using Vector Spherical Harmonics to Compute Antenna Mutual Impedance from Measured or Computed Fields. 2001.
83. Справочник по специальным функциям, под ред. М.Абрамовица и И.Стиган, М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. – 830 с.
84. Б. Л. Коган, И. В. Белькович. Теория и практическое применение метода разложения поля в ряд по векторным сферическим гармоникам векторов Римана-Зильберштейна. Метод согласования с источником // VI Всероссийская Микроволновая конференция, 2018, Москва.
85. Igor V. Belkovich; Boris L. Kogan, Application of the Riemann-Silberstein Vectors and Source Matching Method to a Beam-Waveguide Vector Field Analysis // 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), 2019, Krakow, Poland.
86. Wood P.J. Spherical waves in antenna problems // Marconi Rev. 1971, 34, pp.149-172.
87. Wood P.J. Reflector antenna analysis and design: P.Peregrinus Lmt. on behalf of the IEE, 1980. (русский перевод: Вуд П. Анализ и проектирование зеркальных антенн. М.: Радио и связь, 1984. – 207 с.).
88. Hansen J.E. Spherical near-field measurements, IEE Electromagnetics Wave Series, Peter Peregrinus Ltd., UK, 26 - 1988.
89. R. F. Harrington. On the gain and beamwidth of directional antennas // IRE Trans. AP-6, 219 (1958).

90. Б. Л. Коган, И. В. Белькович. Теория и практическое применение векторов Римана-Зильберштейна для задач антенной техники. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 12. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/dec18/11/text.pdf>. DOI: 10.30898/1684-1719.2018.12.11
91. Белькович И.В. Расчет эффективности зеркальных антенн и лучеводов с учетом неидеальностей поверхностей зеркал и кожуха лучевода с применением векторов Римана-Зильберштейна. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov19/14/text.pdf>. DOI: 10.30898/1684-1719.2019.11.14
92. Mohamed Said A. Sanad. Aperture Blocking of a Symmetric Parabolic Reflector Antennas. Магистерская диссертация, университет Манитобы, 1982.
93. Riel, M., Brand, Y., Demers, Y., & De Maagt, P. Performance Improvements of Center-Fed Reflector Antennas Using Low Scattering Struts. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 60(3), 1269–1280, 2012.
94. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны, - М.: Энергия. – 1975.
95. Ruze, J.: Antenna tolerance theory; a review. Proceedings of the IEEE, vol. 54, no. 4, pp. 633–640, April 1966.
96. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. – М.: Сов радио, 1970, 384с.
97. Siwaphong Boonsalee. Effects of Random Surface Errors on the Performance of Paraboloidal Reflectors, Докторская диссертация, Массачусетский технологический университет, 2001.
98. Фролов О. П., Вальд В. П. Зеркальные антенны для земных станций спутниковой связи. – М.: Горячая линия–Телеком, 2012. – 496 с.
99. Nathan Marcuvitz. Waveguide handbook. McGraw-Hill, 1951 - Science – 428p.
100. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
101. Bruce M. Thomas, “Design of Corrugated Conical Horns”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. Ap-26, No. 2, March 1978.
102. Р. Томпсон, Дж. Моран, Дж. Свенсон. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии. М.: Мир, 568 с, 1989.
103. Б.Л. Коган, Поляризационные характеристики антенн. Учебное пособие. НИУ МЭИ, 2013.
104. Kogan B.L., Plastikov A.N., Belkovich I.V., Seleznev V.N. Geometrical optics synthesis of dual-reflector beam-waveguides with pattern symmetry and zero cross-polarization // Progress in Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS) 2017, 22-25 May 2017. DOI: 10.1109/PIERS.2017.8262441

105. Б. Л. Коган, И. В. Белькович, В.Н. Селезнев. Построение несимметричных двухзеркальных антенн и лучеводов с симметричной диаграммой направленности и низким уровнем кроссполяризации в геометрооптическом приближении // VI Всероссийская Микроволновая конференция, 2018, Москва, Россия.
106. Boris L. Kogan; Igor V. Belkovich; Vasily N. Seleznyov, Design of Dual-Reflector Offset Antennas and Beam-Waveguides with a Pattern Symmetry and Zero Cross-polarization // 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), 2019, Krakow, Poland.
107. W. Imbriale, W. Veruttipong, T. Ootoshi, and M. Franco, Determining Noise Temperatures in Beam Waveguide Systems, TDA Progress Report, Feb. 1994.
108. B. A. Munk, "Frequency Selective Surface Theory and Design," John Wiley & Sons, INC., 2000.
109. D. Morabito, "The Efficiency Characterization of the DSS-13 34-Meter Beam-Waveguide Antenna at Ka-Band (32.0 and 33.7 GHz) and X-band (8.4 GHz)", Telecommunications and Data Acquisition Progress Report 42-125, vol. January–March 1996.
110. A.S. Marathay and J.F. McCalmont. Vector diffraction theory for electromagnetic waves // Journal of the Optical Society of America A, Vol. 18, Issue 10, pp. 2585-2593 (2001).
111. Белостоцкая К.К., Белькович И.В., Селезнёв В.Н., Чуенков П.Г. Малогабаритная бортовая антенна с круговой поляризацией // Антенны. 2017. № 1 (233). С. 28-36.
112. Селезнев В.Н., Белькович И.В., Коган Б.Л. Расчет и моделирование облучающего устройства наземных антенн, входящих в состав комплексов системы "КОСПАС-САРСАТ" // Антенны. 2015. № 9 (220). С. 23-27.
113. Турникетная малогабаритная антенна на полусфере: пат. 2624596 РФ / К.К. Белостоцкая, **И.В. Белькович**, Р.С. Каленов. № 2016137659; заявл. 21.09.16; опубл. 04.07.17, Бюл. № 19.
114. Невыступающая волноводная антенна вертикальной поляризации: пат. 2671969 РФ / К.К. Белостоцкая, **И.В. Белькович**, В.Н. Селезнев, П.Г. Чуенков. № 2017137243; заявл. 24.10.17; опубл. 08.11.2018, Бюл. № 31.

## Приложение А

Вывод выражений поля элементарного диполя, теоремы эквивалентности и формулы Стрэттона-Чу для векторов Р-3.

- 1) Поле диполя. Найдём выражение поля элементарного диполя, направленного вдоль вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{j} = \mathbf{a}\delta(p - q). \quad (\text{A.1})$$

Из формулы (2.6) следует выражение для векторного потенциала диполя  $\mathbf{A} = \mathbf{a}\psi_{pq}$ .

Подставляя это выражение в (2.4), получаем

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm k\mathbf{a}\psi_{pq} + \text{rot}(\mathbf{a}\psi_{pq}) \pm \frac{1}{k} \text{grad div}(\mathbf{a}\psi_{pq}), \quad (\text{A.2})$$

или

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm k\mathbf{a}\psi_{pq} + [\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \text{grad}(\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}). \quad (\text{A.3})$$

Преобразуем слагаемые с дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}) &= (\mathbf{a}, \text{grad}) \text{grad}\psi_{pq}; \\ \text{rot}(\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}) &= (\mathbf{a}, \text{grad}) \text{grad}\psi_{pq} - \mathbf{a}\nabla^2\psi_{pq}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Подставляя (A.4) в (A.3), получаем:

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm \frac{1}{k} \mathbf{a}(\nabla^2\psi_{pq} + k^2\psi_{pq}) + [\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \text{rot}[\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}]. \quad (\text{A.5})$$

Вне области, содержащей источник, первое слагаемое можно отбросить, получим следующее выражение для поля элементарного диполя:

$$\mathbf{F}_{\pm} = [\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \text{rot}[\text{grad}\psi_{pq}, \mathbf{a}]. \quad (\text{A.6})$$

Преобразуем последнее выражение, используя явный вид функции Грина  $\psi_{pq}$ :

$$\text{grad}\psi_{pq} = \frac{\partial\psi_{pq}}{\partial r} \mathbf{r}^0, \quad (\text{A.7})$$

где  $\mathbf{r}^0$  – единичный вектор, направленный от точки «источка»  $q$  к точке наблюдения  $p$ . При вычислении применяем следующие формулы векторного анализа:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{a}\varphi) &= \varphi \text{rot}\mathbf{a} - [\mathbf{a}, \text{grad}\varphi]; \\ \text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= (\mathbf{b}, \text{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \text{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div}\mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div}\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

С учётом первой из этих формул получим:

$$\begin{aligned}
rot \left[ grad \psi_{pq}, \mathbf{a} \right] &= rot \left( \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right] \right) = \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} rot \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right] - \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], grad \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \right] = \\
&= \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} rot \left( \frac{1}{r} \left[ \mathbf{r}, \mathbf{a} \right] \right) - \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], \mathbf{r}^0 \right].
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Вычислим первое слагаемое в правой части (A.9) с ротором:

$$\begin{aligned}
rot \left( \frac{1}{r} \left[ \mathbf{r}, \mathbf{a} \right] \right) &= \frac{1}{r} rot \left[ \mathbf{r}, \mathbf{a} \right] - \left[ \left[ \mathbf{r}, \mathbf{a} \right], grad \frac{1}{r} \right] = \\
&= \frac{1}{r} \left\{ (\mathbf{a}, grad) \mathbf{r} + (\mathbf{r}, grad) \mathbf{a} + \mathbf{r} div \mathbf{a} - \mathbf{a} div \mathbf{r} \right\} + \frac{1}{r} \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], \mathbf{r}^0 \right] = \\
&= \frac{1}{r} \left\{ (\mathbf{a}, grad) \mathbf{r} - \mathbf{a} div \mathbf{r} + \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], \mathbf{r}^0 \right] \right\} = \frac{1}{r} \left( -2\mathbf{a} + \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], \mathbf{r}^0 \right] \right);
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Выражение (A.9) с учетом (A.10):

$$\begin{aligned}
rot \left[ grad \psi_{pq}, \mathbf{a} \right] &= \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \frac{1}{r} \left( -2\mathbf{a} + \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], \mathbf{r}^0 \right] \right) - \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], \mathbf{r}^0 \right] = \\
&= -\frac{2}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \mathbf{a} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} \right) \left[ \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right], \mathbf{r}^0 \right].
\end{aligned} \tag{A.11}$$

В итоге получаем следующее выражение поля диполя Герца:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\pm} &= \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right] \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \right) \left[ \mathbf{r}^0 \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right] \right] - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} \mathbf{a} \right\}; \\
\frac{\partial \psi_{pq}}{\partial r} &= \psi_{pq} \left( -ik - \frac{1}{r_{pq}} \right); \quad \frac{\partial^2 \psi_{pq}}{\partial r^2} = \psi_{pq} \left( -k^2 + \frac{2ik}{r_{pq}} + \frac{2}{r_{pq}^2} \right).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Или более развернуто:

$$\mathbf{F}_{\pm} = -k \left\{ i \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right] \pm \left\{ \left( 1 - \frac{3i}{kr} - \frac{3}{(kr)^2} \right) \left( \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right) \mathbf{r}^0 - \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \mathbf{a} \right\} \right\} \psi_{pq}. \tag{A.13}$$

Получим выражение поля диполя, направленного вдоль оси Z:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{e}_z = \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta; \quad \mathbf{r}^0 = \mathbf{e}_r; \\
\left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right] &= -\sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi; \quad \left[ \mathbf{r}^0, \left[ \mathbf{r}^0, \mathbf{a} \right] \right] = \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta;
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\pm} &= -\psi_r \sin \vartheta \mathbf{e}_{\varphi} \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_{\vartheta} - \frac{2\psi_r}{r} (\cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_{\vartheta}) \right\} = \\
&= \mp \frac{2\psi_r}{kr} \cos \vartheta \mathbf{e}_r \pm \frac{1}{k} \left( \psi_{rr} + \frac{\psi_r}{r} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_{\vartheta} - \psi_r \sin \vartheta \mathbf{e}_{\varphi} = \\
&= k\psi \left\{ \pm \frac{2}{kr} \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta \mathbf{e}_r \mp \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_{\vartheta} + \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_{\varphi} \right\}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

## 2) Теорема эквивалентности

Для вывода выражений применяем лемму Лоренца. Положим  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$  — поле с источниками в объёме  $V$ , удовлетворяющее внутри поверхности  $S$  уравнению  $\text{rot } \mathbf{F} \mp k\mathbf{F} = \mathbf{j}$  и условию излучения на бесконечности,  $\mathbf{F}_2$  — поле элементарного диполя, сосредоточенного в точке  $\mathbf{r}_0$ , которая может быть либо строго внутренней, либо строго наружной относительно границы  $S$  (то есть расстояние от этой точки до границы  $S$  строго больше некоторого положительного числа  $\varepsilon$ ),  $\mathbf{a}$  — единичный вектор вдоль диполя. Уравнение поля диполя:  $\text{rot } \mathbf{F}_2 \mp k\mathbf{F}_2 = \mathbf{a}\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ . Решение уравнения — функция Грина  $\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ .

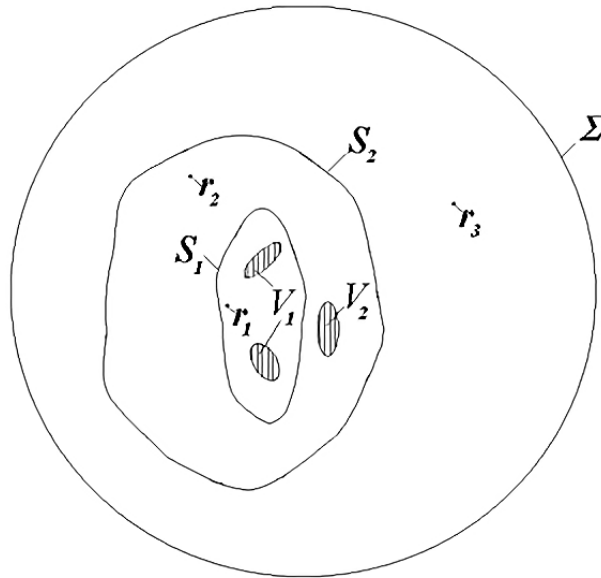


Рис. А.1. Области, в которых определены функции.

В пространстве выделим несколько областей: область, ограниченная поверхностью  $S_1$  (рис. А.1), в которой содержатся источники поля  $\mathbf{F}$  (быть может, не все), сосредоточенные в объёмах  $V_1$  и внутренняя точка  $\mathbf{r}_1$ ; область, ограниченная поверхностью  $S_2 \supset S_1$ , в которой содержатся остальные источники поля  $\mathbf{F}$  в объёме  $V_2$  и внутренняя точка  $\mathbf{r}_2 \notin S_1$ ; а также область, ограниченная сферой достаточно большого радиуса  $\Sigma$  с внутренней точкой  $\mathbf{r}_3 \notin S_2$ . В точках  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  будем вычислять поле  $\mathbf{F}$  и помещать в эти точки диполь, являющийся источником поля  $\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n), n = 1, 2, 3$ . Поверхности не должны проходить через источники.



а) Сначала применим лемму Лоренца к области, ограниченной сферой  $\Sigma$  радиуса  $|\mathbf{r}|$ , с внутренней точкой  $\mathbf{r}_1$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds &= \iiint_{V_2 \supset V_1 + V_2} \{(\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) - (\mathbf{a} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|), \mathbf{F})\} dv = \\ &= \iiint_{V_1 + V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv - (\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Преобразуя, получаем

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = -\oint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds + \iiint_{V_1 + V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv. \quad (\text{A.17})$$

Интегрирование производится по переменной  $\mathbf{r}$ . Устремим радиус сферы к бесконечности и оценим поверхностный интеграл. Поведение спиральных составляющих полей  $\mathbf{F}_+ = f_{+1}\mathbf{e}^{+1} + f_0\mathbf{e}^0 + f_{-1}\mathbf{e}^{-1}$ , удовлетворяющих условию излучения, на большом расстоянии от источника определяется соотношениями:

$$f_{+1} = O\left(\frac{1}{r}\right), f_0 = O\left(\frac{1}{r^2}\right), f_{-1} = O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (\text{A.18})$$

Такие же соотношения верны для функции Грина. Применяя выражение векторного произведения в спиральном базисе (51), векторное произведение для  $\mathbf{F}_+$  (A.15) можно оценить как

$$[\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] = O\left(\frac{1}{r^3}\right)\mathbf{e}^1 + O\left(\frac{1}{r^4}\right)\mathbf{e}^0 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\mathbf{e}^{-1} \quad (\text{A.19})$$

Такая же оценка справедлива и для  $\mathbf{F}_-$ . Поэтому

$$\left| \oint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds \right| = O\left(\frac{1}{r^3}\right)r^2 = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

то есть на бесконечности этот интеграл стремится к нулю. Следовательно

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \infty} (\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = \iiint_{V_1 + V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad (\text{A.20})$$

Но по теореме единственности решение уравнения  $\text{rot } \mathbf{F} \mp k\mathbf{F} = \mathbf{j}$  в заданной точке не меняется при изменении радиуса сферы, значит  $\oint_{\Sigma} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds \equiv 0$ , если сфера охватывает все источники поля  $\mathbf{F}$  и

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = \iiint_{V_1 + V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad (\text{A.21})$$

что и следовало ожидать для функции Грина.

Применение леммы Лоренца к поверхности  $S_2$  приводит к равенству:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = -\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds + \iiint_{V_1+V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad (\text{A.22})$$

из которого, в соответствии с той же теоремой единственности, можно сделать вывод, что  $\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds \equiv 0$  независимо от формы поверхности, если поверхность охватывает

все источники поля.

б) Применим лемму Лоренца к поверхности  $S_1$ . В этом случае объёмный интеграл будет содержать интегрирование только по  $V_1$ .

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \mathbf{a}) = -\oiint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds + \iiint_{V_1} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad (\text{A.23})$$

Из этого следует равенство:

$$-\oiint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \mathbf{n}) ds = \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{j}) dv \quad (\text{A.24})$$

Значит, действие поверхностного интеграла на значение поля во внутренней точке поверхности эквивалентно действию источников поля, находящихся вне поверхности интегрирования.

в) Применим лемму Лоренца к нахождению поля в точке  $r_2$ , находящейся в области между поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . Внутренней нормалью к этой области будет внешняя нормаль для  $S_1$  и внутренняя для  $S_2$ , а объёмный интеграл будет распространяться на источники в  $V_2$ :

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_2), \mathbf{a}) = -\oiint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds - \oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds + \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \mathbf{j}) dv \quad (\text{A.25})$$

Так как источники поля вне второго поверхностного интеграла отсутствуют, а поле ищется во внутренней точке  $r_2$ , этот интеграл обращается в нуль

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds = 0 \quad (\text{A.26})$$

и справедливо:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_2), \mathbf{a}) = -\oiint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)], \bar{\mathbf{n}}) ds + \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \mathbf{j}) dv \quad (\text{A.27})$$

Таким образом, в соответствии с принципом эквивалентности действие поверхностного интеграла в этом случае эквивалентно действию внутренних источников к поверхности  $S_1$ .

г) Применим лемму Лоренца к нахождению поля вне поверхности  $S_2$ , содержащей все источники поля. Получим:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r}_3), \mathbf{a}) = -\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_3)], \bar{\mathbf{n}}) ds \quad (\text{A.28})$$

Для любой точки внутри этой поверхности этот интеграл обращается в нуль  $\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{1,2})], \bar{\mathbf{n}}) ds = 0$ . Таким образом:

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n}) ds = \begin{cases} (\mathbf{F}(\mathbf{r}_0), \mathbf{a}), & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S_2 \\ 0, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S_2 \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

$$\oiint_{S_1} ([\mathbf{F}, \mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n}) ds = \begin{cases} (\mathbf{F}(\mathbf{r}_0), \mathbf{a}) - \iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \mathbf{j}) dv, & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S_1 \\ -\iiint_{V_2} (\mathbf{G}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \mathbf{j}) dv, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S_1 \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

то есть, интеграл терпит такой разрыв при переходе точки наблюдения через поверхность, которая содержит все (или не все) источники поля.

д) Преобразуем (A.30), с помощью явного выражения функции Грина. Воспользуемся явным выражением функции Грина:

$$\mathbf{G}_{a\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} \right) [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]] - \frac{2}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} \mathbf{a} \right\};$$

$$\frac{\partial \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r} = \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left( -ik - \frac{1}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} \right); \quad \frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}}{\partial r^2} = \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left( -k^2 + \frac{2ik}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}} + \frac{2}{r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^2} \right); \quad \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}; \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}; \quad r_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} = \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|;$$

В результате получим:

$$\mathbf{G}_{a\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = (-ik) \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}] \mp$$

$$\mp (-ik) \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \left\{ \left( i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2} \right) [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]] + \frac{2}{k\rho} \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \mathbf{a} \right\}; \quad (\text{A.32})$$

Выразим теперь смешанное произведение в подынтегральном выражении поверхностного интеграла:

$$([\mathbf{F}, \mathbf{G}_{a\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n}) = (-ik) \Psi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) \mp \right.$$

$$\left. \mp \left( i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2} \right) ([\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 [\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0, \mathbf{a}]]], \mathbf{n}) \mp \frac{2}{k\rho} \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \right\}; \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \left( [\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{r,r_0}^0, \mathbf{a}]], \mathbf{n} \right) &= \left( [\mathbf{n}, \mathbf{F}], [\mathbf{r}_{r,r_0}^0, \mathbf{a}] \right) = \left( [\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0], \mathbf{a} \right); \quad \left( [\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n} \right) = \left( [\mathbf{n}, \mathbf{F}], \mathbf{a} \right) = \left( \mathbf{J}, \mathbf{a} \right); \\ \left( [\mathbf{F}, [\mathbf{r}_{r,r_0}^0 [\mathbf{r}_{r,r_0}^0, \mathbf{a}]]], \mathbf{n} \right) &= \left( [\mathbf{n}, \mathbf{F}], [\mathbf{r}_{r,r_0}^0 [\mathbf{r}_{r,r_0}^0, \mathbf{a}]] \right) = - \left( \mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0) \mathbf{r}_{r,r_0}^0, \mathbf{a} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

где  $\mathbf{J}=[\mathbf{n}, \mathbf{F}]$  – плотность эквивалентного поверхностного тока. Подставляя эти выражения в интегральное выражение леммы Лоренца, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_S \left( [\mathbf{F}, [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}]] \psi_r, \mathbf{n} \right) ds \pm \frac{1}{k} \iint_S \left( [\mathbf{F}, [\mathbf{r}^0, [\mathbf{r}^0, \mathbf{a}]]] \left( \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right), \mathbf{n} \right) ds \mp \\ \mp \frac{2}{k} \iint_S \left( [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \frac{\psi_r}{r}, \mathbf{n} \right) ds = - \iiint_V (\mathbf{a}, \mathbf{F}) \delta(p-q) dv_q \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \left( [\mathbf{F}, \mathbf{G}_{\mathbf{a}\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \mathbf{n} \right) &= (-ik) \iint_{S_2} \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho} \left( \left\{ \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) [\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0] \pm \right. \right. \\ &\left. \left. \pm \left( i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2} \right) \left( \mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0) \mathbf{r}_{r,r_0}^0 \right) \mp \frac{2}{k\rho} \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \mathbf{J} \right\}, \mathbf{a} \right) ds; \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Теперь можно записать окончательное выражение интеграла Кирхгофа:

$$\begin{aligned} b(\rho, \mathbf{r}_{r,r_0}^0, \mathbf{J}) &= \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) [\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0] \pm \left( i + \frac{3}{k\rho} - \frac{3i}{(k\rho)^2} \right) \left( \mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{r}_{r,r_0}^0) \mathbf{r}_{r,r_0}^0 \right) \mp \frac{2}{k\rho} \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \mathbf{J}; \\ \rho &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|; \quad \mathbf{r}_{r,r_0}^0 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|; \quad \psi_{r,r_0} = e^{-ik\rho} / 4\pi\rho; \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\iint_{S_1} (-ik) \psi_{r,r_0} b(\rho, \mathbf{r}^0, \mathbf{J}) ds_{\mathbf{r}} + \iiint_{V_2} (-ik) \psi_{r,r_0} b(\rho, \mathbf{r}^0, \mathbf{j}) dv_{\mathbf{r}} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0), & \text{для } \mathbf{r}_0 \notin S_1 \\ 0, & \text{для } \mathbf{r}_0 \in S_1 \end{cases}$$

### 3) Выражение интеграла Кирхгофа в дальней зоне

Из выражения (A.37) при подстановке  $\mathbf{r}_{r,r_0}^0 = -\mathbf{e}_r$  следует формула для векторных составляющих поля в дальней зоне (диаграммы направленности):

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_{r_0}) = ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_{S_2} \left\{ [\mathbf{J}, \mathbf{e}_{r_0}] \mp i \left( \mathbf{J} - (\mathbf{J}, \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_{r_0} \right) \right\} e^{ik(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds \quad (\text{A.38})$$

Для заданной точки наблюдения в дальней зоне сферическая система координат с полярным направлением  $\mathbf{e}_{r_0}$  не зависит от точки истока.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\pm}(|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_{r_0}) &\approx ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_S \left\{ (J_{\varphi} \mathbf{e}_{\vartheta} - J_{\vartheta} \mathbf{e}_{\varphi}) \mp i (J_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + J_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}) \right\} \exp(ik(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}')) ds' = \\ &= ik \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_S \left\{ (J_{\varphi} \mp iJ_{\vartheta}) \mathbf{e}_{\vartheta} + (-J_{\vartheta} \mp iJ_{\varphi}) \mathbf{e}_{\varphi} \right\} \exp(ik(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}')) ds' \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Векторы Р-З в дальней зоне идеально поляризованы по кругу, поэтому в спиральном базисе диаграмма направленности каждого вектора Р-З должна иметь лишь одну ненулевую составляющую. Переходя к спиральным составляющим, получаем поле в дальней зоне, выраженное через спиральные составляющие поля на поверхности  $S$ :

$$\mathbf{F}_{\pm}(|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}^0) = \left( \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|} \iint_S J_{\pm 1} \exp(ik(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}')) dS \right) \mathbf{e}^{\pm 1}; \quad (\text{A.40})$$

4) Формула Стрэттона - Чу.

В формуле Стрэттона-Чу излучаемые поля выражаются через касательные и нормальные составляющие поля на поверхности. Формула справедлива для незамкнутых поверхностей. Так же, как и в предыдущем выводе, в лемме Лоренца выберем поле  $\mathbf{F}_2$  в виде поля электрического диполя:

$$\mathbf{F}_{2\pm} = \pm k \mathbf{a} \psi_{pq} + [\text{grad} \psi_{pq}, \mathbf{a}] \pm \frac{1}{k} \text{grad}(\text{grad} \psi_{pq}, \mathbf{a}); \quad (\text{A.41})$$

Получим выражение для поля в области, свободной от источников:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(p), \mathbf{a}) &= \mp k \iint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \\ &\iint_S ([\mathbf{F}, [\text{grad} \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp \frac{1}{k} \iint_S ([\mathbf{F}, \text{grad}(\text{grad} \psi, \mathbf{a})], \mathbf{n}) ds \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Напомним, что  $\mathbf{n}$  – внутренняя нормаль. Преобразуем последнее слагаемое, для этого воспользуемся тождеством:

$$\text{rot}\{(\text{grad} \psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\} = (\text{grad} \psi, \mathbf{a}) \text{rot}\mathbf{F} + [\text{grad}(\text{grad} \psi, \mathbf{a}), \mathbf{F}] \quad (\text{A.43})$$

$$[\mathbf{F}, \text{grad}(\text{grad} \psi, \mathbf{a})] = \text{rot}\{(\text{grad} \psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\} - (\text{grad} \psi, \mathbf{a}) \text{rot}\mathbf{F} \quad (\text{A.44})$$

Получим последнее слагаемое (A.43) в виде:

$$\iint_S ([\mathbf{F}, \text{grad}(\text{grad} \psi, \mathbf{a})], \mathbf{n}) ds = \iint_S (\mathbf{n}, \text{rot}\{(\text{grad} \psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\}) ds - \iint_S (\text{grad} \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \text{rot}\mathbf{F}) ds \quad (\text{A.45})$$

Подставим это выражение в (A.42):

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(p), \mathbf{a}) &= \mp k \iint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \iint_S ([\mathbf{F}, [\text{grad} \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp \\ &\mp \frac{1}{k} \iint_S (\mathbf{n}, \text{rot}\{(\text{grad} \psi, \mathbf{a})\mathbf{F}\}) ds \pm \frac{1}{k} \iint_S (\text{grad} \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \text{rot}\mathbf{F}) ds \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Воспользуемся тем, что для любого гладкого векторного поля  $\mathbf{X}$  в области, включающей замкнутую поверхность  $S$  (без края):  $\iint_S (\mathbf{n}, \text{rot}\mathbf{X}) ds \equiv 0$ . Если векторное поле на части

поверхности является краевым значением гладкого векторного поля, а на другой части тождественно равно нулю, тогда по теореме Стокса

$$\iint_S (\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{X}) ds = \oint_L (\mathbf{X}, d\mathbf{l}) \quad (\text{A.47})$$

где кривая  $L$  – край разрыва. Выражением (A.46) переписывается с учётом этого в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(p), \mathbf{a}) &= \mp k \iint_S ([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) \psi ds - \iint_S ([\mathbf{F}, [\text{grad } \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) ds \mp \\ &\mp \frac{1}{k} \oint_L (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) \pm \frac{1}{k} \iint_S (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{F}) ds \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Преобразуем подынтегральное выражение в первом слагаемом в правой части (A.48) круговой перестановкой смешанного произведения  $([\mathbf{F}, \mathbf{a}], \mathbf{n}) = ([\mathbf{n}, \mathbf{F}], \mathbf{a})$ , во втором слагаемом также сделаем круговые перестановки в смешанном произведении:  $([\mathbf{F}, [\text{grad } \psi, \mathbf{a}]], \mathbf{n}) = ([\text{grad } \psi, \mathbf{a}], [\mathbf{n}, \mathbf{F}]) = ([[\mathbf{n}, \mathbf{F}], \text{grad } \psi] \mathbf{a})$ . Предполагая, что поверхность  $S$  не проходит через источники поля, заменим  $\text{rot} \mathbf{F}$  в последнем слагаемом в (A.48) с помощью уравнения Максвелла  $\text{rot} \mathbf{F} = \pm k \mathbf{F}$ , тогда последнее слагаемое превратится в выражение

$$\pm \frac{1}{k} \iint_S (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{F}) ds = \iint_S (\text{grad } \psi, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \mathbf{F}) ds \quad (\text{A.49})$$

Так как вектор  $\mathbf{a}$  произвольный, можно избавиться от него в (A.48), преобразовав это выражение с учётом предыдущих равенств:

$$\mathbf{F}(p) = \mp k \iint_S [\mathbf{n}, \mathbf{F}] \psi ds - \iint_S [[\mathbf{n}, \mathbf{F}], \text{grad } \psi] ds \mp \frac{1}{k} \oint_L \text{grad } \psi (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) + \iint_S (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \text{grad } \psi ds \quad (\text{A.50})$$

Это и есть формула Стрэттона-Чу, выраженная в терминах векторов Р-3. Перепишем её, выразив градиент функции Грина (напомним ещё раз, что нормаль внутренняя, направление обхода контура должно быть согласовано с ориентацией поверхности: обход в интеграле по контуру происходит так, что если смотреть с конца вектора нормали, то при обходе контура поверхность должна оставаться слева от края):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(p) &= k \iint_S \left\{ \mp [\mathbf{n}, \mathbf{F}] + i \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \left( [[\mathbf{n}, \mathbf{F}], \mathbf{r}_{p,q}^0] - (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \mathbf{r}_{p,q}^0 \right) \right\} \psi_{p,q} ds_q \pm \\ &\pm i \oint_L \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \psi_{p,q} \mathbf{r}_{p,q}^0 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}_q); \quad \rho = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|; \quad \mathbf{r}_{p,q}^0 = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|}; \quad \psi_{p,q} = \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho}; \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

## Приложение Б

### Алгоритм расчета D-функций Вигнера.

В выражения для векторных гармоник в спиральных координатах входят сферические функции, связанные с D-функциями Вигнера. Для построения полного базиса функций  $\{P_{m,l}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}\}$  можно воспользоваться формулами непосредственного вычисления [89]:

$$P_{m,l}^n(z) = i^{-m-l} \sqrt{\frac{(n-m)!(n-1)!}{(n+m)!(n+1)!}} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m+l}{2}} \times \sum_{k=\max(m,l)}^n \frac{(-1)^k (n+k)!}{(n-k)!(k-m)!(k-l)!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \quad (\text{Б.1})$$

Однако такой способ требует многочисленных вычислений, которые в конечном итоге приводят к значительным временным затратам. Всего для вычисления поля с количеством гармоник  $N$  необходимое число функций равно  $3 \cdot \sum_{n=1}^N (2n+1)$ . Поэтому с целью оптимизации вычислений будем пользоваться рекуррентными формулами, подробно описанными в книгах Варшаловича [61], Виленкина [75] и Гельфанда [76, 77]. Для начала необходимо определиться с обозначениями функций. В [75] используется обозначение  $P_{mn}^l(z)$ , при этом связь с классическими D-функциями Вигнера выражаются формулами

$$\begin{aligned} t_{m,n}^l(\theta) &= P_{m,n}^l(z), \quad 0 \leq \text{Re } \theta < \pi, \quad z = \cos \theta \\ t_{m,n}^l(\mathbf{g}) &= e^{-i(m\varphi+n\psi)} P_{m,n}^l(\cos \theta) \\ t_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= (-i)^{M-M'} \cdot D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \\ D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{-iM\alpha} \cdot d_{m,n}^l(\alpha, \beta, \gamma) e^{-iM'\gamma} \\ P_{m,n}^l(\alpha, \beta, \gamma) &= (-i)^{m-l} \cdot d_{m,n}^l(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Такая связь нам необходима для дальнейшего применения формул, справедливых для D-функций Вигнера. Формулы (Б.2) можно свести к следующему выражению

$$\begin{aligned} P_{m,l}^n(\cos \theta) e^{-im\varphi} &= (-i)^{m-l} \cdot D_{m,l}^n(\varphi, \theta) \\ P_{m,l}^n(\cos \theta) &= (-i)^{m-l} \cdot d_{m,l}^n(\theta) \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

1 алгоритм, по формулам из [61]. Теперь можно воспользоваться рекуррентными формулами и формулами симметрии для функций  $D_{MM'}^J$ . Выпишем основные формулы, которыми будем пользоваться

- 1) Рекуррентная формула, связывающая  $D_{MM'}^J$  и  $D_{MM'}^{J+1}$  [61, с.79]:

$$\begin{aligned} \cos \beta D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\sqrt{(J^2 - M^2)(J^2 - M'^2)}}{J(2J+1)} D_{MM'}^{J-1}(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{MM'}{J(J+1)} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\sqrt{((J+1)^2 - M^2)((J+1)^2 - M'^2)}}{(J+1)(2J+1)} D_{MM'}^{J+1}(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

- 2) Рекуррентная формула, связывающая  $D_{M-1, M'}^J$ ,  $D_{MM'}^J$  и  $D_{M+1, M'}^J$  [61, с.81]:

$$\begin{aligned} \frac{M' - M \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{2} \sqrt{(J+M)(J-M+1)} D_{M-1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i\varphi} + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{(J-M)(J+M+1)} D_{M+1, M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Эту формулу нельзя применять при значениях  $J=\pm M$  ( $n=\pm m$ ), то есть на “границах” диаграммы гармоник.

- 3) Рекуррентная формула, связывающая  $D_{M, M'-1}^J$ ,  $D_{MM'}^J$  и  $D_{M, M'+1}^J$  [61, с.81]:

$$\begin{aligned} \frac{-M + M' \cos \beta}{\sin \beta} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{2} \sqrt{(J+M')(J-M'+1)} D_{M, M'-1}^J(\alpha, \beta, \gamma) + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{(J-M')(J+M'+1)} D_{M, M'+1}^J(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

- 4) Формула симметрии

$$P_{m, l}^n(z) = P_{-m, -l}^n(z) \quad (\text{Б.7})$$

- 5) Частный случай, формула при  $J=\pm M$

$$\begin{aligned} D_{JM}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J+M} \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J-M} e^{-iJ\alpha - iM\gamma} \\ D_{-JM}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{J-M} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{J+M} e^{iJ\alpha - iM\gamma} \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Имея такой набор формул, можно вычислить все функции с индексами  $n, m, l$ , задав в явном виде лишь начальный набор функций для индексов  $n=1, 2$ , используя таблицы [61, с.104]:

Итак, алгоритм вычисления функций  $P_{m, l}^n(z)$  следующий:

- 1) Задаем функции для индексов  $l=+1; n=1, 2, m=\pm 1, 0$
- 2) Используя рекуррентное соотношение (Б.4), вычисляем функции для всех  $n$  при  $l=+1; m=\pm 1, 0$
- 3) Используя рекуррентное соотношение (Б.5), вычисляем функции для всех  $n$  и  $m$  при  $l=+1$ , кроме граничных  $m=\pm n$



- 4) Используя формулы (Б.8), вычисляем граничные функции при  $m=\pm n, l=+1$
- 5) Используя формулу (Б.7), вычисляем все функции для  $l=-1$
- 6) Используя рекуррентное соотношение (Б.6), вычисляем функции для всех  $n$  и  $m$  при  $l=0$

На рис. П2.1 изображен алгоритм вычисления – диаграмма гармоник.

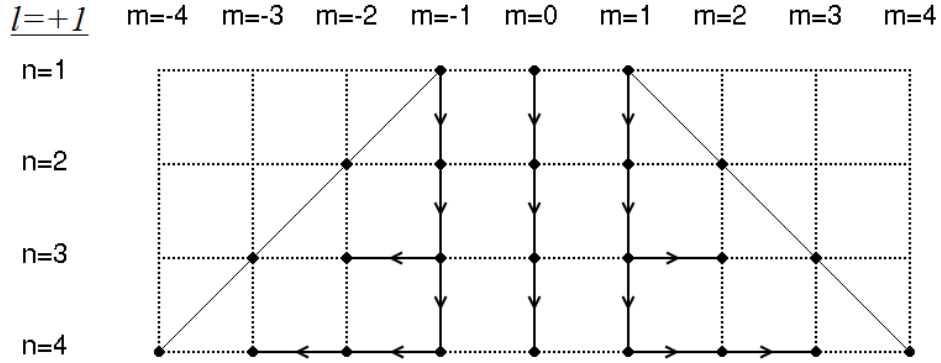


Рис. Б.1. Диаграмма вычисления сферических функций алгоритма №1.

Такой алгоритм работает до индексов функций  $N$  порядка 200, далее накапливается ошибка.

2 алгоритм, из [75]. Для другого способа построения функций посредством использования всего двух рекурсивных формул необходимо задание  $2N-1$  функций. Используем формулы (8) [75, с.107]:

$$c_{21}^m \cdot T_{j,m}^{l+1} \cdot c_{11}^j + c_{22}^m \cdot T_{j,m}^l \cdot c_{12}^j + c_{23}^m \cdot T_{j,m}^{l-1} \cdot c_{13}^j = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta \cdot T_{j+1,m}^l \quad (\text{Б.9})$$

$$c_{21}^m \cdot T_{j,m}^{l+1} \cdot c_{31}^j + c_{22}^m \cdot T_{j,m}^l \cdot c_{32}^j + c_{23}^m \cdot T_{j,m}^{l-1} \cdot c_{33}^j = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta \cdot T_{j-1,m}^l$$

Функции связаны соотношением

$$P_{m,l}^n(\cos \theta) e^{-im\varphi} = T_{m,l}^n \quad (\text{Б.10})$$

Коэффициенты  $c_{ik}^m$  задаются матрицей,  $l$  – номер гармоники

$$C^{(m)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} & \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)}} & \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{2l(l+1)}} \\ \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(l+1)}} & \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} & -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{l(2l+1)}} \\ \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(l+1)}} & -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{2l(l+1)}} & \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{2l(2l+1)}} \end{pmatrix} \quad (\text{Б.11})$$

Остается применить формулу

$$\begin{aligned}
P_{m+1,l}^n(z) = & \frac{\sqrt{2i}}{\sin \theta} \left( \sqrt{\frac{(n+l+1)(n-l+1)}{(2n+1)(n+1)}} P_{m,l}^{n+1}(z) \sqrt{\frac{(n-m)(n-m+1)}{(2n+1)(2n+2)}} + \right. \\
& \left. + \frac{l}{\sqrt{n(n+1)}} P_{m,l}^n(z) \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m)}{2n(n+1)}} - \sqrt{\frac{(n+l)(n-l)}{n(2n+1)}} P_{m,l}^{n-1}(z) \sqrt{\frac{(n+m)(n+m+1)}{2n(n+1)}} \right)
\end{aligned} \tag{Б.12}$$

$\underline{l=+1}$      $m=-4$     $m=-3$     $m=-2$     $m=-1$     $m=0$     $m=1$     $m=2$     $m=3$     $m=4$

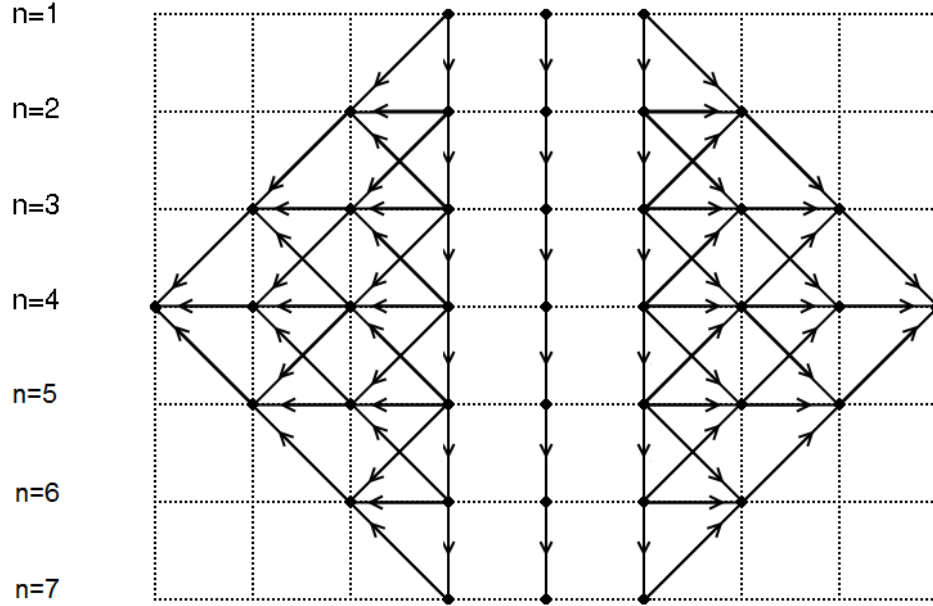


Рис. Б.2. Диаграмма вычисления сферических функций алгоритма №2.

Такой алгоритм дает правильный результат – отсутствует накопление ошибки. Однако вычисления избыточны, в связи с чем время расчетов большое.

3 алгоритм, из [76]. Рассмотрим еще один вариант построения гармоник с высшими индексами  $m$ . Алгоритм основан на формуле

$$\begin{aligned}
\sqrt{(n-l+1)(n+l+1)} P_{m,l}^{n+1}(z) = & \sqrt{(n-m+1)(n+m+1)} \cos \theta P_{m,l}^n(z) + \\
& + \frac{i \sin \theta}{2} \left( \sqrt{(n-m)(n-m+1)} P_{m+1,l}^n(z) + \sqrt{(n+m)(n+m+1)} P_{m-1,l}^n(z) \right)
\end{aligned} \tag{Б.13}$$

Результат расчета функций сходится с расчетом по предыдущему алгоритму. Скорость вычислений примерно одинакова. Но применять последний удобнее ввиду симметрии.

Итак, алгоритм вычисления функций  $P_{m,l}^n(z)$  следующий:

- 1) Задаем функции для индексов  $l=+1; n=1,2, m=\pm 1,0$
- 2) Используя рекуррентное соотношение (П2.4), вычисляем функции для всех  $n$  при  $l=+1; m=\pm 1,0$ , а также с помощью формулы (П2.4) вычисляем функции для всех  $n$  при  $l=0; m=0$

- 3) Используя рекуррентную формулу (П2.13), вычисляем функции для всех  $n$  и  $m$  при  $l=+1$
- 4) Используя формулу симметрии (П2.7), вычисляем все функции для  $l=-1$
- 5) Используя рекуррентное соотношение (П2.6), вычисляем функции для всех  $n$  и  $m$  при  $l=0$

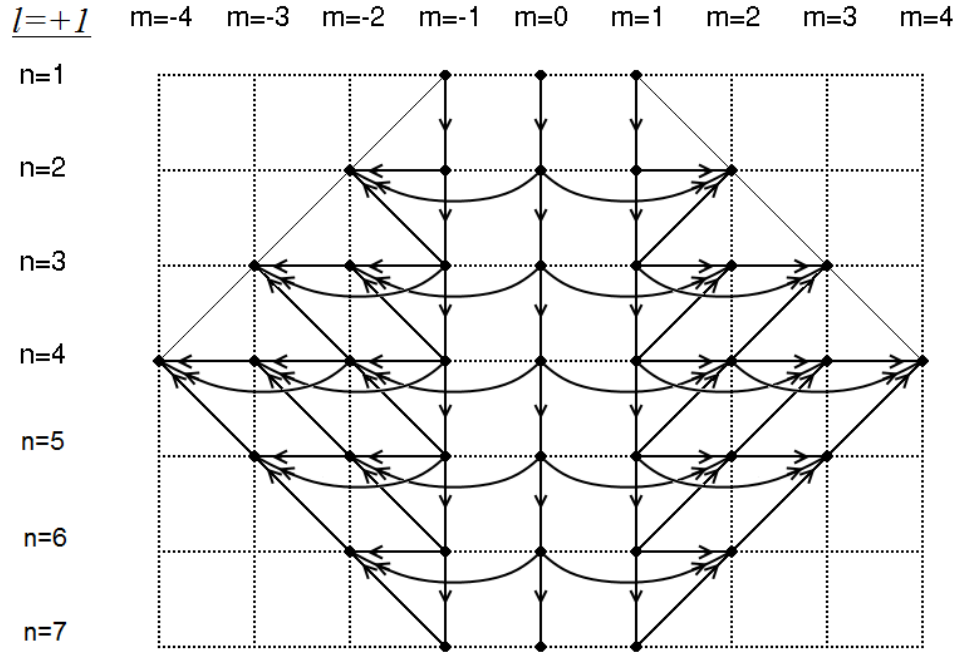


Рис. Б.3. Диаграмма вычисления сферических функций алгоритма №3.

4 алгоритм, из [76]. Алгоритм построения функций, основанный на расчете диагональных элементов и применения рекуррентной формулы (П2.4)

$$\begin{aligned} \cos \beta P_{m,l}^n(z) = & \frac{\sqrt{(n^2 - m^2)(n^2 - l^2)}}{n(2n + 1)} P_{m,l}^{n-1}(z) + \frac{ml}{n(n + 1)} P_{m,l}^n(z) + \\ & + \frac{\sqrt{((n + 1)^2 - m^2)((n + 1)^2 - l^2)}}{(n + 1)(2n + 1)} P_{m,l}^{n+1}(z) \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Для  $l=1$

$$\begin{aligned} \cos \beta P_{m,1}^n(z) = & \frac{\sqrt{(n^2 - m^2)(n^2 - 1)}}{n(2n + 1)} P_{m,1}^{n-1}(z) + \frac{m}{n \cdot (n + 1)} P_{m,1}^n(z) + \\ & + \frac{\sqrt{((n + 1)^2 - m^2)(n^2 + 2n)}}{(n + 1)(2n + 1)} P_{m,1}^{n+1}(z) \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

Окончательно

$$P_{m,1}^{n+1}(z) = \frac{(n+1)(2n+1)}{\sqrt{((n+1)^2 - m^2)(n^2 + 2n)}} \left( \cos \beta - \frac{m}{n(n+1)} \right) P_{m,1}^n(z) - \frac{(n+1)\sqrt{(n^2 - m^2)(n^2 - 1)}}{n\sqrt{((n+1)^2 - m^2)(n^2 + 2n)}} P_{m,1}^{n-1}(z) \quad (\text{Б.16})$$

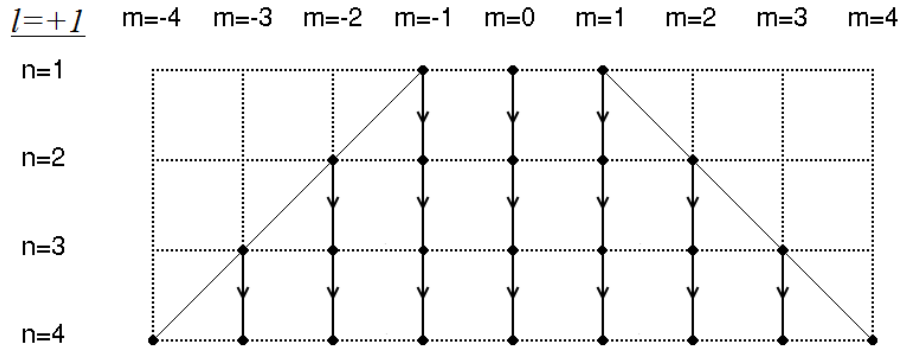


Рис. Б.4. Диаграмма вычисления сферических функций алгоритма №3.

- 1) Задаем функции для индексов  $l=+1; n=1,2, m=\pm 1,0$
- 2) Используя рекуррентное соотношение (П2.4), вычисляем функции для всех  $n$  при  $l=+1; m=\pm 1,0$ , а также с помощью формулы (П2.4) вычисляем функции для всех  $n$  при  $l=0; m=0$
- 3) Используя рекуррентные соотношения (П2.15), (П2.16) вычисляем диагональные функции  $m=\pm n$
- 4) Используя рекуррентное соотношение (П2.4), вычисляем функции для всех  $n$  и  $m$  при  $l=+1$
- 5) Используя формулу симметрии (П2.7), вычисляем все функции для  $l=-1$
- 6) Используя рекуррентное соотношение (П2.6), вычисляем функции для всех  $n$  и  $m$  при  $l=0$

Такой алгоритм является оптимальным с точки зрения отсутствия ошибок и особенностей при больших индексах функций, а также скорости расчета за счет отсутствия избыточности.

## Приложение В

Вывод выражения сферических гармоник – собственных функций  
уравнений Максвелла для векторов Р-З.

Уравнения Максвелла для векторов Римана-Зильберштейна:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}_{\pm} \mp k\mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{j}_{\pm} \quad (\text{B.1})$$

Выражение для ротора в сферических координатах имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \\ \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_{\vartheta} \\ F_{\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Предполагая использование введённых выше векторных сферических гармоник круговой поляризации, перейдём от касательных составляющих  $\vartheta$ ,  $\varphi$  к спиральным сферическим компонентам [61]:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \\ f_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_{\vartheta} \\ f_{\varphi} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = f_1 \mathbf{e}^1 + f_0 \mathbf{e}^0 + f_{-1} \mathbf{e}^{-1}; \quad (\text{B.3})$$

Преобразованное выражение ротора в спиральном базисе примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \\ \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \quad (\text{B.4})$$

$$= \begin{pmatrix} i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & 0 \\ \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) & 0 & \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( -\frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) \\ 0 & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & -i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \end{pmatrix}$$

Будем искать мультипольное решение для вектора  $\mathbf{F}$  в следующей форме:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} b_1(r) P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ b_0(r) P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \\ b_{-1}(r) P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \end{pmatrix} e^{-im\varphi} \quad (\text{B.5})$$

где  $P_{m,m'}^n$  – средние части функций Гельфанда-Виленкина  $t_{m,m'}^n(\varphi, \vartheta, \psi) = e^{-im\varphi} P_{m,m'}^n(\vartheta) e^{-im'\psi}$ , связанных с D-функциями Вигнера простой зависимостью:  $t_{m,m'}^n = (-i)^{n-m'} D_{m,m'}^n$ .

Подставим эти выражения в уравнение (B.1), предварительно заменив в выражении ротора оператор дифференцирования по  $\varphi$  на множитель  $(-im)$ :

$$rot = i \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & 0 \\ \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( -m + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) & 0 & \frac{1}{r\sqrt{2} \sin \vartheta} \left( m + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) \\ 0 & \frac{1}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \end{pmatrix}; \quad (B.6)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left( i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_1 P_{m,1}^n + \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_0 P_{m,+1}^n = 0 \\ \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-m + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_1 P_{m,1}^n \mp k b_0 P_{m,0}^n + \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{m + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_{-1} P_{m,-1}^n = 0 \\ \frac{i}{r\sqrt{2}} \left( \frac{-m}{\sin \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) b_0 P_{m,0}^n + \left( -i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_{-1} P_{m,-1}^n = 0 \end{cases} \quad (B.7)$$

Воспользуемся рекуррентными формулами [61] для вычисления действия дифференциальных операторов с дифференцированием по переменной  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{1-z^2} \frac{dP_{m,m'}^n}{dz} + \frac{m'z-m}{\sqrt{1-z^2}} P_{m,m'}^n &= -i\sqrt{(n-m')(n+m'+1)} P_{m,m'+1}^n \\ \sqrt{1-z^2} \frac{dP_{m,m'}^n}{dz} - \frac{m'z-m}{\sqrt{1-z^2}} P_{m,m'}^n &= -i\sqrt{(n+m')(n-m'+1)} P_{m,m'-1}^n \end{aligned} \quad (B.8)$$

После замены  $z \Rightarrow \cos \vartheta$  эти соотношения переписутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d\vartheta} - \frac{m' \cos \vartheta - m}{\sin \vartheta} \right) P_{m,m'}^n &= i\sqrt{(n-m')(n+m'+1)} P_{m,m'+1}^n \\ \left( \frac{d}{d\vartheta} + \frac{m' \cos \vartheta - m}{\sin \vartheta} \right) P_{m,m'}^n &= i\sqrt{(n+m')(n-m'+1)} P_{m,m'-1}^n \end{aligned} \quad (B.9)$$

Применим эти соотношения для случаев  $m'=0,1,-1$ . Получим для функций Гельфанда-Виленкина:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{d\vartheta} - \frac{m}{\sin\vartheta}\right)P_{m,0}^n &= i\sqrt{n(n+1)}P_{m,-1}^n; \\
\left(\frac{d}{d\vartheta} + \frac{m}{\sin\vartheta}\right)P_{m,0}^n &= i\sqrt{n(n+1)}P_{m,+1}^n; \\
\left(\frac{d}{d\vartheta} - \frac{m - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)P_{m,1}^n &= i\sqrt{n(n+1)}P_{m,0}^n; \\
\left(\frac{d}{d\vartheta} + \frac{m + \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)P_{m,-1}^n &= i\sqrt{n(n+1)}P_{m,0}^n;
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Система уравнений (B.7) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \left[ \left( i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_1 - \frac{1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_0 \right] P_{m,1}^n = 0 \\ \left[ \frac{-1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_1 \mp k b_0 - \frac{1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_{-1} \right] P_{m,0}^n = 0 \\ \left[ \frac{-1}{r\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} b_0 + \left( -i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_{-1} \right] P_{m,-1}^n = 0 \end{cases} \tag{B.11}$$

Эти уравнения должны удовлетворяться при любых значениях  $\vartheta$ , поэтому на сферические функции можно сократить:

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{r} \frac{d}{dr} r \mp k & \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} & \mp k & \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} b_{-1} \\ 0 & \frac{-1}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} & \frac{-i}{r} \frac{d}{dr} r \mp k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

Исключив  $b_0$ , получаем

$$b_0 = \mp \frac{1}{kr} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} (b_1 + b_{-1}) \tag{B.13}$$

таким образом сведя систему уравнений к матричной системе 2-го порядка:

$$\begin{cases} \left( \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_1 \pm \frac{n(n+1)}{2kr^2} (b_1 + b_{-1}) = 0 \\ \left( \frac{-i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mp k \right) b_{-1} \pm \frac{n(n+1)}{2kr^2} (b_1 + b_{-1}) = 0 \end{cases} \tag{B.14}$$

Введём новые неизвестные функции:  $x(r) = r(b_1 + b_{-1}); y = r(b_1 - b_{-1})$ . Уравнения для этих функций получим после сложения и вычитания уравнений (B.14).

$$ix' \mp ky = 0; \quad iy' \pm \frac{n(n+1)}{kr^2} x \mp kx = 0; \quad (\text{B.15})$$

Продифференцируем первое из уравнений и подставим в него  $y'$  из второго уравнения, получим:

$$x'' + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) x = 0 \quad (\text{B.16})$$

Это уравнение Риккати-Бесселя, решения этого уравнения – сферические функции Бесселя  $z_n(kr)$ , умноженные на  $r$ :  $x = rz_n(kr)$ .

Выразим функцию « $y$ » из 1-го уравнения (B.15)  $y = \pm \frac{i}{k} x'$ . Теперь можно найти функции  $b_1, b_{-1}, b_0$ :

$$\begin{cases} rb_1 = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x \pm (i/k)x'); \\ rb_{-1} = \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(x \mp (i/k)x'); \\ rb_0 = \mp \frac{1}{kr} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} x; \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

В результате получаем вектор решения уравнения Максвелла (B.1), являющийся векторной сферической гармоникой в спиральном базисе:

$$\mathbf{F}_{\pm} = e^{-im\varphi} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{-i}{kr} \frac{d}{dr} r \mp 1 \right) \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{kr} \right) \\ P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{i}{kr} \frac{d}{dr} r \mp 1 \right) \end{pmatrix} z_n(kr) \quad (\text{B.18})$$

Для проверки правильности выразим поле диполя правой круговой поляризации:  $\text{rot}\mathbf{F}_+ - k\mathbf{F}_+ = \mathbf{e}_z \delta(r)$ .

$$n = 1; m = 0; h_1^{(2)}(kr) = \left( -1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{kr}; \quad P_{0,0}^1 = \cos \vartheta; P_{0,1}^1 = P_{0,-1}^1 = \frac{i \sin \vartheta}{\sqrt{2}}; \quad (\text{B.19})$$



$$\mathbf{F}_+ = \frac{-k}{4\pi} \begin{pmatrix} P_{0,1}^1(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - ik \right) \\ P_{0,0}^1(\cos \vartheta) \left( \frac{2i}{r} \right) \\ P_{0,-1}^1(\cos \vartheta) \left( -\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} - ik \right) \end{pmatrix} h_1^{(2)}(kr) = k \begin{pmatrix} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \left( 2 - \frac{2i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \\ \cos \vartheta \left( \frac{2}{kr} \right) \left( i + \frac{1}{kr} \right) \\ \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{(kr)^2} \right) \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}; \quad (\text{B.20})$$

Преобразуем это выражение в сферические координаты:

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\vartheta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \\ f_{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{B.21})$$

$$f_r = \left( \frac{2}{kr} \right) \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta; \quad f_\vartheta = \left( -1 + \frac{i}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta; \quad f_\varphi = \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta; \quad (\text{B.22})$$

Точное выражение через векторный потенциал:

$$\mathbf{F}_\pm = k \left\{ \pm \frac{2}{kr} \left( i + \frac{1}{kr} \right) \cos \vartheta \mathbf{e}_r \mp \left( 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \left( i + \frac{1}{kr} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \right\} \psi_{pq} \quad (\text{B.23})$$

Как видно, результаты совпадают.

### Приложение Г

Определение коэффициентов разложения поля в ряд.

Разложение поля в ряд по векторным сферическим гармоникам имеет вид:

$$\mathbf{F}_{\pm}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_n \sum_{m=-n}^n C_{m\pm}^n \mathbf{F}_{m\pm}^n \quad (\text{Г.1})$$

Для определения коэффициентов разложения рассмотрим рис. Г.1. Пусть  $S_1$  – произвольная поверхность (например, поверхность рефлектора), содержащая источники,  $S_2$  – сфера конечного радиуса  $r_0$ ,  $S_3$  – бесконечная сфера.  $V_1$  – объем между поверхностью  $S_1$  и бесконечной сферой  $S_3$ , объем  $V_2$  – между  $S_2$  и  $S_3$ . Все источники излучения находятся на поверхности  $S_1$ .

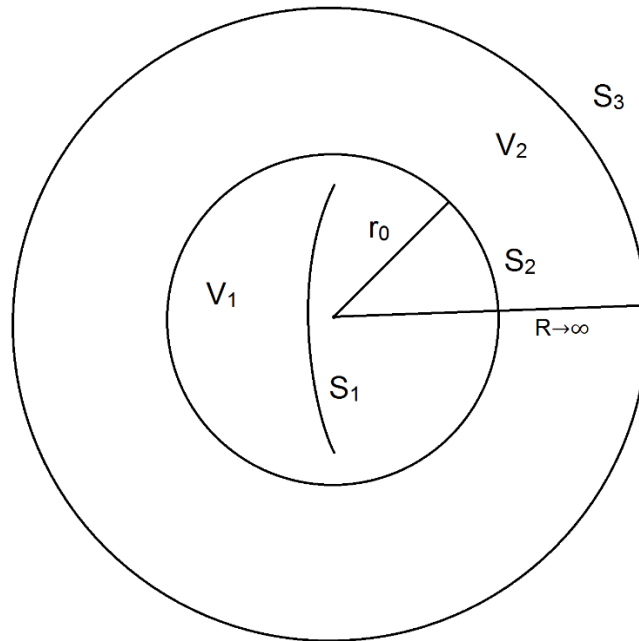


Рис. Г.1. К определению коэффициентов разложения.

#### 1) Определение коэффициентов по полю на сфере

В соответствии с теоремой эквивалентности, поле от источников  $S_1$  вне поверхности  $S_2$  может быть представлено как поле эквивалентных электрических и магнитных токов, заданных на сфере  $S_2$ . Для нахождения коэффициентов в области, внешней по отношению к сфере  $S_2$ , запишем лемму Лоренца в области  $V_2$ . Пусть вектор  $\mathbf{A}$  - это вектор Р-З правой круговой поляризации, поле которого нужно определить путём разложения по сферическим гармоникам. Вектор  $\mathbf{B}$  - это произвольная сферическая гармоника поля правой круговой поляризации, удовлетворяющая условию излучения:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}_m^n = \begin{pmatrix} F_{m,1}^n \\ F_{m,0}^n \\ F_{m,-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - ik \right) \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \left( i \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{r} \right) \\ -P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + ik \right) \end{pmatrix} h_n^{(2)}(kr) e^{-im\varphi} \quad (\Gamma.2)$$

Асимптотическое выражение этого вектора в дальней зоне имеет вид:

$$\mathbf{B} \rightarrow 2i^n \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im\varphi}; \quad (\Gamma.3)$$

Запишем Лемму Лоренца для области  $V_2$

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = \oiint_{S_3} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds \quad (\Gamma.4)$$

Форма разложения поля на бесконечной сфере

$$\mathbf{A} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{m+}^n i^n \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im\varphi} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (\Gamma.5)$$

Раскроем векторное произведение в правой части (Г.4)

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = i \oiint_{S_3 \rightarrow \infty} A_{+1} B_{+1}^* ds \quad (\Gamma.6)$$

Подставляем (Г.3) и (Г.5) в (Г.6). В таком случае выражение леммы Лоренца

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = 4i \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{m+}^n i^n P_{m,1}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} \frac{e^{-ikr}}{r} (i^n P_{m',1}^{n'}(\cos \vartheta))^* e^{im'\varphi} \frac{e^{ikr}}{r} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad (\Gamma.7)$$

Из условия ортогональности сферических функций следует, что ненулевая правая часть будет только в случае равенства индексов гармоник

$$\oiint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = 4i C_{m+}^n \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) (P_{m,1}^n(\cos \vartheta))^* \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad (\Gamma.8)$$

Применяем соотношение ортогональности (2.50), в итоге получаем:

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{16\pi i} \oiint_{S_2} ([\mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*}], \mathbf{n}) ds \quad (\Gamma.9)$$

где вектор  $\mathbf{F}$  – поле источника, вектор  $\mathbf{F}_m^n$  – векторная сферическая гармоника.

На сфере радиуса  $r_0$

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{16\pi} \oint\!\!\!\oint_{S_2} (F_{+1}F_{m,+1}^{n*} - F_{-1}F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (\Gamma.10)$$

где  $F_{+1}$  - поле от источника, пересчитанное на сферу  $S_2$ . В качестве сферических функций выбираются функции Ханкеля второго рода, удовлетворяющие условию излучения (расходящиеся волны). Раскрывая  $F_{m,\pm 1}^{n*}$ :

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{16\pi} \oint\!\!\!\oint_{S_2} \left( F_{+1} \left( P_{m,1}^n(\cos \vartheta) D_- h_n^{(2)}(kr) \right)^* + F_{-1} \left( P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) D_+ h_n^{(2)}(kr) \right)^* \right) e^{im\varphi} r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (\Gamma.11)$$

где дифференциальные операторы  $D_{\pm}$  определяются согласно (2.65).

Выражение для вектора  $\mathbf{F}$ .

$$\oint\!\!\!\oint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = -i \oint\!\!\!\oint_{S_3 \rightarrow \infty} A_{-1} B_{-1}^* ds \quad (\Gamma.12)$$

$$\oint\!\!\!\oint_{S_2} ([\mathbf{A}, \mathbf{B}^*], \mathbf{n}) ds = -4i C_{m-}^n \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \right)^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (\Gamma.13)$$

Тогда

$$C_{m-}^n = -\frac{2n+1}{16\pi} \oint\!\!\!\oint_{S_2} (F_{+1}F_{m,+1}^{n*} - F_{-1}F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (\Gamma.14)$$

Таким образом, окончательное выражение для коэффициентов разложения на сфере

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{16\pi} \oint\!\!\!\oint_{S_2} (F_{+1}F_{m,+1}^{n*} - F_{-1}F_{m,-1}^{n*}) r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (\Gamma.15)$$

где составляющие сферических гармоник  $F_{m,\pm 1}^{n*}$  определяются согласно (2.64).

2) Определение коэффициентов по полю на произвольной поверхности

Существует другой способ определения коэффициентов разложения в ряд – определение непосредственно заданным на поверхности тока источников.

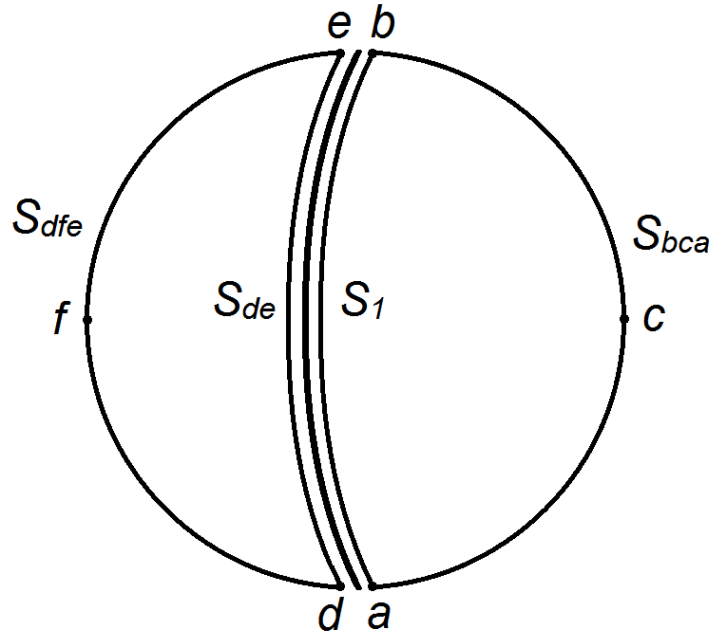


Рис. Г.2. К определению коэффициентов разложения по произвольной поверхности.

Поле на поверхности  $S_2 = S_{dfe} + S_{bca}$  может быть представлено в виде ряда (Г.1). В качестве вспомогательного поля возьмем векторную сферическую гармонику  $\mathbf{F}_m^n$  правой круговой поляризации, распространяющуюся в сторону уменьшения  $r$  (сходящаяся волна). В качестве радиальных функций берутся сферические функции Бесселя, не имеющие особенности в центре координат.

$$\mathbf{F}_m^n = \begin{pmatrix} P_{m,1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - ik \right) \\ P_{m,0}^n(\cos \vartheta) \left( i \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{r} \right) \\ -P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + ik \right) \end{pmatrix} j_n(kr) e^{-im\varphi} \quad (\text{Г.16})$$

Умножим векторно правую и левую части выражения (Г.1) на комплексно-сопряженную гармонику  $\mathbf{F}_m^{n*}$

$$\oiint_{S_2} \left( [\mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*}], \mathbf{n} \right) ds = \oiint_{S_2} \left( \left[ \sum_N C_{m+}^n \mathbf{F}_m^n, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds \quad (\text{Г.17})$$

В формуле (Г.17) в гармонику  $\mathbf{F}_m^n$  входят сферические функции Ханкеля, в  $\mathbf{F}_m^{n*}$  сферические функции Бесселя. Распишем правую часть

$$\begin{aligned} \oint\!\!\!\oint_{S_2} \left( \left[ \sum_N C_{m+}^n \mathbf{F}_m^n, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = i \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=-n}^n C_{m+}^n \left\{ P_{m,1}^{n'}(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} D_- h_n^{(2)}(kr) \left( P_{m,1}^{n'}(\cos \vartheta) D_- j_n(kr) \right)^* e^{im'\varphi} - \right. \\ \left. - P_{m,-1}^n(\cos \vartheta) e^{-im\varphi} D_+ h_n^{(2)}(kr) \left( P_{m,-1}^{n'}(\cos \vartheta) D_+ j_n(kr) \right)^* e^{im'\varphi} \right\} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \end{aligned} \quad (\text{Г.18})$$

Воспользуемся условием ортогональности

$$\oint\!\!\!\oint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = \frac{4\pi i r^2 C_{m+}^n}{2n+1} \left\{ D_- h_n^{(2)}(kr) D_+ j_n(kr) - D_+ h_n^{(2)}(kr) D_- j_n(kr) \right\} \quad (\text{Г.19})$$

Можно показать, что произведение в скобках

$$\begin{aligned} \left\{ D_- h_n^{(2)}(kr) D_+ j_n(kr) - D_+ h_n^{(2)}(kr) D_- j_n(kr) \right\} = \\ = 2k^2 \left( j_n(kr) \frac{d}{d(kr)} y_n(kr) - y_n(kr) \frac{d}{d(kr)} j_n(kr) \right) = \frac{2}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{Г.20})$$

Выражение (Г.19) с учетом (Г.20) преобразуется к следующему виду

$$\oint\!\!\!\oint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = \frac{8\pi i C_{m+}^n}{2n+1} \quad (\text{Г.21})$$

В итоге выражение для коэффициентов разложения

$$C_{m+}^n = \frac{2n+1}{8\pi i} \oint\!\!\!\oint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{F}, \mathbf{F}_m^{n*} \right], \mathbf{n} \right) ds = \frac{2n+1}{8\pi i} \oint\!\!\!\oint_{S_2} \left( \left[ \mathbf{n}, \mathbf{F} \right], \mathbf{F}_m^{n*} \right) ds = \frac{2n+1}{8\pi i} \oint\!\!\!\oint_{S_2} \left( \mathbf{J}, \mathbf{F}_m^{n*} \right) ds \quad (\text{Г.22})$$

Интегралы по замкнутым контурам, не содержащим источников (особенностей поля), равны нулю

$$\oint\!\!\!\oint_{S_{abc+S_{ba}}} = 0; \quad \oint\!\!\!\oint_{S_{dfe+S_{ed}}} = 0 \quad (\text{Г.23})$$

В таком случае исходную сферу  $S_2$  можно представить как совокупность поверхностей  $S_{abc+S_{ba}}$  и  $S_{dfe+S_{ed}}$ . Так как в соответствии в принципе физической оптики мы принимаем ток на обратной стороне рефлектора равным нулю, интеграл по сфере  $S_2$  сводится к интегралу по поверхности источника  $S_l$ . Окончательное выражение

$$C_{m\pm}^n = \pm \frac{2n+1}{8\pi i} \iint_{S_l} \left( \mathbf{J}, \mathbf{F}_{m\pm}^{n*} \right) ds \quad (\text{Г.24})$$

## Приложение Д

Вывод выражений для метода параболического уравнения.

В данном разделе будет показано, что решение уравнений Максвелла в свободном пространстве в спиральных координатах сводит векторную задачу к системе двух параболических уравнений, решаемых традиционными способами – преобразованием Фурье. Итак, ищем решение уравнения Максвелла для вектора Римана-Зильберштейна правой круговой поляризации в виде волны, бегущей в направлении оси  $Z$  с неизвестной «векторной амплитудой». Для декартовых компонент векторной амплитуды получим уравнение:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}_+ - kn\mathbf{F}_+ = 0; \quad (\text{Д.1})$$

Распишем уравнение

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x^+ & F_y^+ & F_z^+ \end{vmatrix} - kn(F_x^+ \mathbf{e}_x + F_y^+ \mathbf{e}_y + F_z^+ \mathbf{e}_z) = 0 \quad (\text{Д.2})$$

$$\left( \frac{\partial F_z^+}{\partial y} - \frac{\partial F_y^+}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x - \left( \frac{\partial F_z^+}{\partial x} - \frac{\partial F_x^+}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial F_y^+}{\partial x} - \frac{\partial F_x^+}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z - kn(F_x^+ \mathbf{e}_x + F_y^+ \mathbf{e}_y + F_z^+ \mathbf{e}_z) = 0$$

Выражаем продольную составляющую через поперечные

$$F_z^+ = \frac{1}{kn} \left( \frac{\partial F_y^+}{\partial x} - \frac{\partial F_x^+}{\partial y} \right) \quad (\text{Д.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{k} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} + kn \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

Переходим от декартовых компонент к «прямолинейным» циклическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} F_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(F_x + iF_y); \\ F_0 = F_z; \\ F_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_x - iF_y); \end{cases} \quad \begin{cases} F_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{-1} - F_{+1}); \\ F_z = F_0; \\ F_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(F_{-1} + F_{+1}); \end{cases} \quad (\text{Д.4})$$

Инвариантная запись вектора  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = F_{-1} \mathbf{e}^{-1} + F_0 \mathbf{e}^0 + F_{+1} \mathbf{e}^{+1}$ .

Прямолинейные циклические орты, подобно декартовым, не зависят от положения точки в пространстве.

$$\begin{cases} \nabla_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right); & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nabla_{-1} - \nabla_{+1}); \\ \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_0; \end{array} \right. \\ \nabla_0 = \frac{\partial}{\partial z}; & \\ \nabla_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right); & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\nabla_{-1} + \nabla_{+1}); \end{array} \right. \end{cases} \quad (\text{Д.5})$$

Система уравнений (Д.3) относительно декартовых компонент вектора амплитуды переходит в систему относительно прямолинейных (декартовых) циклических составляющих:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{i}{kn\sqrt{2}}\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)F_{+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)F_{-1}\right); \\ \frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} -F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix} + ikn\begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2ikn}\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (\text{Д.6})$$

Второе выражение в (Д.6) справедливо, только если коэффициент преломления не зависит от  $X$  и  $Y$ . В системе (Д.6) продольная составляющая выражается через поперечные, поэтому главная задача – найти поперечные составляющие.

$$i\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix} = \left[ kn\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2kn}\begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & -\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+1} \end{pmatrix}; \quad (\text{Д.7})$$

Теперь нам нужно будет переходить к криволинейным цилиндрическим координатам, в частности, к цилиндрическим циклическим координатам. Для них справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_r \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_r \\ F_\varphi \end{pmatrix}; \\ (F_{+1} \ F_{-1}) &= (F_r \ F_\varphi)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{+1} \\ \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix}; \\ (F_{+1} \ F_{-1})\begin{pmatrix} \mathbf{e}^{+1} \\ \mathbf{e}^{-1} \end{pmatrix} &= (F_r \ F_\varphi)\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

При умножении компонент векторов на орты зависимость от  $\varphi$  исчезает, и с циклическими ортами в цилиндрической системе координат можно обращаться, как с циклическими декартовыми. Совершим преобразование Фурье по пространственным переменным. Введём обозначения:



$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \iint \mathbf{F}(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \Phi(\mathbf{F}(x, y)); \\
\mathbf{F}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \iint \tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta = \Phi^{-1}(\tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta)); \\
\|\mathbf{F}(x, y)\|_{L_2} &= \|\tilde{\mathbf{F}}(\xi, \eta)\|_{L_2}
\end{aligned} \tag{Д.9}$$

При этих обозначениях дифференциальные операторы по поперечным координатам превратятся в операторы умножения на функции:

$$\begin{aligned}
\Phi(\Delta \mathbf{F}) &= -(\xi^2 + \eta^2) \tilde{\mathbf{F}}; \\
\Phi(\Delta_{-1} \mathbf{F}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi + \eta) \tilde{\mathbf{F}}; \quad \Phi(\Delta_{+1} \mathbf{F}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - \eta) \tilde{\mathbf{F}}; \\
\Phi((\Delta_{-1})^2 \mathbf{F}) &= \frac{1}{2}(i\xi + \eta)^2 \tilde{\mathbf{F}}; \quad \Phi((\Delta_{+1})^2 \mathbf{F}) = \frac{1}{2}(i\xi - \eta)^2 \tilde{\mathbf{F}};
\end{aligned} \tag{Д.10}$$

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}
\left( \frac{d}{dz} + \frac{i(\xi^2 + \eta^2)}{2k} - ik \right) \tilde{F}_{-1}^+ - \frac{i(i\xi + \eta)^2}{2k} \tilde{F}_{+1}^+ = 0; \\
\left( \frac{d}{dz} - \frac{i(\xi^2 + \eta^2)}{2k} + ik \right) \tilde{F}_{+1}^+ + \frac{i(i\xi - \eta)^2}{2k} \tilde{F}_{-1}^+ = 0; \\
\tilde{F}_0^+ = \frac{i}{k\sqrt{2}} \left( (i\xi + \eta) \tilde{F}_{+1}^+ - (i\xi - \eta) \tilde{F}_{-1}^+ \right);
\end{cases} \tag{Д.11}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}
\left( \frac{d}{dz} + \frac{i(\xi^2 + \eta^2)}{2k} - ik \right) & -\frac{i(i\xi + \eta)^2}{2k} \\
\frac{i(i\xi - \eta)^2}{2k} & \left( \frac{d}{dz} - \frac{i(\xi^2 + \eta^2)}{2k} + ik \right) \\
-\frac{i(i\xi - \eta)}{k\sqrt{2}} & \frac{i(i\xi + \eta)}{k\sqrt{2}}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{-1}^+ \\ \tilde{F}_{+1}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{F}_0^+ \end{pmatrix} \tag{Д.12}$$

В этой матрице все операторы коммутируют между собой (подобно числам), поэтому можно попытаться привести её верхний блок к диагональному виду. Для этого к матрице системы дифференциальных уравнений построим присоединённую матрицу, и их произведение даст одинаковые независимые уравнения для  $\tilde{F}_{-1}^+$  и  $\tilde{F}_{+1}^+$ :

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - (\xi^2 + \eta^2) + k^2 \right) \tilde{F}_{\pm 1}^+ = 0 \tag{Д.13}$$

У этого уравнения есть два линейно независимых решения, общее решение можно представить в следующем виде:

$$\tilde{F}_{\mp 1}^+ = C_1 e^{-z\sqrt{\rho^2-k^2}} + C_2 e^{z\sqrt{\rho^2-k^2}} \quad (\text{Д.14})$$

где  $\rho^2 \equiv \xi^2 + \eta^2$ , первое решение при  $\rho^2 > k^2$  убывает с увеличением  $z$ , а второе – с уменьшением  $z$ , при  $\rho^2 < k^2$  оба решения осциллируют.

Каждое решение определяется выбором двух произвольных постоянных. Одно условие нам известно - это начальное распределение поля в апертуре.

Гипотеза. Выбираем те из решений, которые убывают в сторону распространения по  $z$ :

$$\tilde{F}_{-1} = C_- e^{z\sqrt{\rho^2-k^2}}; \quad \tilde{F}_{+1} = C_+ e^{-z\sqrt{\rho^2-k^2}}; \quad (\text{Д.15})$$

Эти решения должны удовлетворять исходной системе. Пусть заданы начальные условия в апертуре:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{-1}^+(\xi, \eta, z) &\xrightarrow{z \rightarrow 0} C_-(\xi, \eta) = \tilde{F}_{-1}^+(\xi, \eta, 0); \\ \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, z) &\xrightarrow{z \rightarrow 0} C_+(\xi, \eta) = \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0); \end{aligned} \quad (\text{Д.16})$$

Подставим решения (Д.15) в исходную систему.

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc} \left( \frac{d}{dz} + \frac{i\rho^2}{2k} - ik \right) & -\frac{i(i\xi + \eta)^2}{2k} \\ \frac{i(i\xi - \eta)^2}{2k} & \left( \frac{d}{dz} - \frac{i\rho^2}{2k} + ik \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} C_-(\xi, \eta) e^{z\sqrt{\rho^2-k^2}} \\ C_+(\xi, \eta) e^{-z\sqrt{\rho^2-k^2}} \end{pmatrix} \xrightarrow{z=0} \\ &= \left( \begin{array}{cc} \left( \sqrt{\rho^2-k^2} + i\frac{\rho^2}{2k} - ik \right) C_-(\xi, \eta) - i\frac{(i\xi + \eta)^2}{2k} C_+(\xi, \eta) \\ i\frac{(i\xi - \eta)^2}{2k} C_-(\xi, \eta) + \left( ik - \sqrt{\rho^2-k^2} - i\frac{\rho^2}{2k} \right) C_+(\xi, \eta) \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{Д.17})$$

Условие существования нетривиального решения системы - обращение в нуль определителя матрицы:

$$\begin{pmatrix} \left( -i\left( k - \frac{\rho^2}{2k} \right) - \sqrt{\rho^2-k^2} \right) & i\frac{\rho^2}{2k} e^{-2i\varphi} \\ -i\frac{\rho^2}{2k} e^{2i\varphi} & \left( i\left( k - \frac{\rho^2}{2k} \right) - \sqrt{\rho^2-k^2} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{Д.18})$$

Вычисление определителя даёт  $\Delta = 0$ . Это означает, что нетривиальное решение существует. Система уравнений позволяет найти связь начальных значений составляющих  $\tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0), \tilde{F}_{-1}^+(\xi, \eta, 0)$

$$\tilde{F}_{-1}^+(\xi, \eta, 0) = \frac{i\rho^2 e^{-2i\varphi}}{-2k\sqrt{\rho^2 - k^2} - i(\rho^2 - 2k^2)} \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0) \quad (\text{Д.19})$$

Таким образом, если в апертуре задана главная составляющая, которой соответствует вектор Пойнтинга, направленный в сторону возрастания координаты  $z$ , то по формуле (Д.19) определяем распределение в апертуре составляющей, вектор Пойнтинга которой направлен в сторону убывания  $z$ , и далее, находим полное решение:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{+1}(\xi, \eta, z) &= e^{-z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0); \\ \tilde{F}_{-1}(\xi, \eta, z) &= \frac{-i\rho^2 e^{-2i\varphi}}{2k\sqrt{\rho^2 - k^2} + i(\rho^2 - 2k^2)} e^{z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0); \\ \tilde{F}_0^+(\xi, \eta, z) &= \frac{i\rho e^{-i\varphi}}{k\sqrt{2}} \left( ie^{-z\sqrt{\rho^2 - k^2}} - \frac{\rho^2}{2k\sqrt{\rho^2 - k^2} + i(\rho^2 - 2k^2)} e^{z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \right) \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0); \end{aligned} \quad (\text{Д.20})$$

Это точное решение задачи определения поля в пространстве по заданной главной составляющей в апертуре.

Для получения значений решения от координат  $x, y$  достаточно совершить обратное преобразование Фурье. В формуле (Д.20) использованы прямолинейные циклические координаты. Для решения задач с осесимметричной геометрией (симметричное по  $\varphi$  распределение поля) можно перейти к цилиндрическим циклическим координатам и решать задачу с помощью преобразования Ханкеля.

## Приложение Е

### Решение тестовой задачи излучения плоской апертуры.

В данном разделе будет получено решение важной задачи – задачи излучения от плоской апертуры разными методами. Задача решается с целью разработки расчетных алгоритмов на основе полученных ранее соотношений для основных методов электродинамики векторов Р-З, проверки их правильности и достоверности результатов. Будем рассматривать плоскую круглую апертуру с равномерным распределением поля как наиболее простую и показательную, однако описанный подход можно распространить на апертуру любой формы с любым законом распределения.

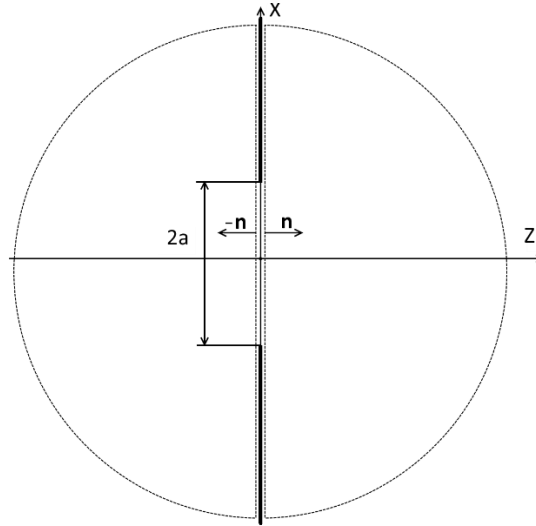


Рис. Е.1. Задача излучения апертуры.

Задачу об излучении плоской круглой апертуры с равномерным распределением поля можно свести к следующей известной задаче. Пусть на круглую диафрагму в плоском экране падает плоская волна идеальной правой круговой поляризации (рис. Е.1). Примем, что экран поглощает все падающее на него электромагнитное поле.

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) e^{-ikz}; \mathbf{H} = \frac{1}{W} [\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \left( -\frac{i}{W} \mathbf{e}_x - \frac{1}{W} \mathbf{e}_y \right) e^{-ikz} \quad (\text{E.1})$$

Такое поле соответствует волне правой круговой поляризации, распространяющейся в положительном направлении оси Z:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\pm} &= 0.5 \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \mathbf{E} \pm i\sqrt{z} \mathbf{H} \right) = 0.5 \left( \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} \pm i\sqrt{z} \left( -\frac{i}{z} \mathbf{e}_x - \frac{1}{z} \mathbf{e}_y \right) \right) e^{-ikz} = \\ &= 0.5 \left( \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} \pm \left( \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} \right) \right) e^{-ikz} = \begin{cases} \mathbf{F}_+ = \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{z}} e^{-ikz} \\ \mathbf{F}_- = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Вектор Пойнтинга направлен вдоль оси Z

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \cdot ([\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]) = -\frac{i}{2} \cdot ([\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_+^*]) = \frac{1}{2z} e^{-2ikz} \mathbf{e}_z \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{J} = [\mathbf{n}, \mathbf{F}] = i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y; \quad (\mathbf{n}, \mathbf{F}) = 0; \quad (\text{E.4})$$

Рассчитаем аналитически и численно поле на оси  $Z$ . Обозначим точку интегрирования в плоскости апертуры  $q$ , точка  $p$  – точка на оси  $Z$ . Вектор  $\mathbf{q}-\mathbf{p}$  направлен из точки интегрирования в точку расчета (рис. E.2).

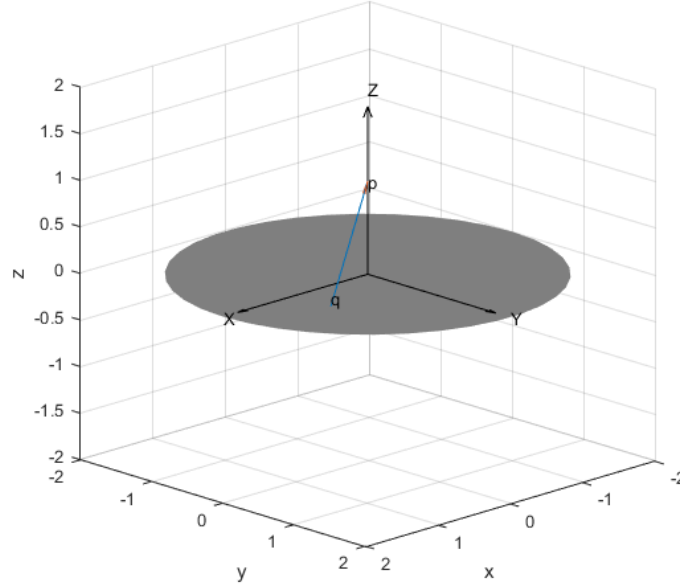


Рис. E.2. Апертура в плоскости  $XY$ . Точка  $q$  – точка интегрирования в плоскости апертуры,  $p$  – точка на оси.

В данном случае применима формула Стрэттона-Чу, так как она содержит контурный интеграл, компенсирующий разрыв поля на границе для незамкнутой поверхности. В (2.39) положим  $\mathbf{r}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0}^0 = \mathbf{r}_{p, q}^0$ , и запишем формулу для нашего случая

$$\mathbf{F}(p) = k \iint_S \left\{ \mp \mathbf{J} + i \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) ([\mathbf{J}, \mathbf{r}_{p, q}^0] - (\mathbf{n}, \mathbf{F}) \mathbf{r}_{p, q}^0) \right\} \psi_{pq} ds_q \pm i \oint_L \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \psi_{pq} \mathbf{r}_{p, q}^0 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}_q); \quad (\text{E.5})$$

$$\rho = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|; \quad \mathbf{r}_{p, q}^0 = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|}; \quad \psi_{p, q} = \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho};$$

Для точек  $p$  на оси  $Z$  и цилиндрических координат точки  $\mathbf{q} = \{r, \alpha, 0\}$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}; \quad \mathbf{r}_{p, q}^0 = \frac{\{-r \cos \alpha, -r \sin \alpha, z\}}{\rho};$$

$$[\mathbf{J}, \mathbf{r}_{p, q}^0] = -\frac{1}{\rho} [i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, r \cos \alpha \mathbf{e}_x + r \sin \alpha \mathbf{e}_y - z\mathbf{e}_z] = -\frac{\{-z, iz, -re^{-i\alpha}\}}{\rho} \quad (\text{E.6})$$

$$d\mathbf{l}_q = d(\alpha \mathbf{e}_\alpha) = a d\alpha; \quad (\mathbf{F}, d\mathbf{l}_q) = (\{1, -i, 0\}, \{-a \sin \alpha, a \cos \alpha, 0\}) d\alpha = -(a \sin \alpha + ia \cos \alpha) = -iae^{-i\alpha} d\alpha$$

Формула Стрэттона-Чу в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(p) = & k \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \{i, 1, 0\} + i \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \frac{\{z, -iz, re^{-i\alpha}\}}{\rho} \right\} \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho} r dr d\alpha + \\ & + \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{i}{k\rho_a} \right) \frac{e^{-ik\rho}}{4\pi\rho_a^2} \{a \cos \alpha, a \sin \alpha, -z\} a e^{-i\alpha} d\alpha; \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

После вычисления интеграла по  $\varphi$

$$\mathbf{F}(p) = \frac{ki}{2} \int_0^a \left\{ \{1, -i, 0\} + z \left( 1 - \frac{i}{k\rho} \right) \frac{\{1, -i, 0\}}{\rho} \right\} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} r dr + \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2+z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{4(a^2+z^2)} \{1, -i, 0\} \quad (\text{E.8})$$

Распишем  $\rho$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(p) = & \frac{ki}{2} \{1, -i, 0\} \left[ \int_0^a \frac{r e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} dr + z \int_0^a \frac{r e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2} dr - \frac{zi}{k} \int_0^a \frac{r e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr \right] + \\ & + \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2+z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{4(a^2+z^2)} \{1, -i, 0\} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Введем обозначения интегралов

$$\mathbf{F}(p) = \frac{ki}{2} \{1, -i, 0\} \left[ I_1 + zI_2 - \frac{zi}{k} I_3 \right] + \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2+z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{4(a^2+z^2)} \{1, -i, 0\} \quad (\text{E.10})$$

Произведем вычисления интегралов

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^a \frac{e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} r dr &= \left[ \begin{array}{l} r^2 = x \\ dx = 2r dr \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \frac{e^{-ik\sqrt{x+z^2}}}{\sqrt{x+z^2}} dx = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x+z^2} = x \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{x+z^2}} dx \end{array} \right] = \\ &= \int_{|z|}^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = \frac{i}{k} (e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - e^{-ik|z|}) \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$I_2 = \int_0^a \frac{e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2} r dr = \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x} dx \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^a \frac{e^{-ik\sqrt{r^2+z^2}}}{(r^2+z^2)^{3/2}} r dr &= \int_{|z|}^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} u = e^{-ikx}; du = -ike^{-ikx} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx; v = -\frac{1}{x} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{e^{-ik|z|}}{|z|} - ik \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = -\frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{e^{-ik|z|}}{|z|} - ikI_2 \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Таким образом, сумма интегралов

$$\begin{aligned}
I_1 + zI_2 - \frac{zi}{k} I_3 &= \frac{i}{k} (e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - e^{-ik|z|}) + zI_2 + \frac{zi}{k} \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{ize^{-ik|z|}}{k|z|} - zI_2 = \\
&= \frac{i}{k} \left( e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - (1 + \text{sign}(z))e^{-ik|z|} + z \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)
\end{aligned} \tag{E.14}$$

где  $\text{sign}(z)$  – кусочно-постоянная функция действительного аргумента

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z = 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases} \tag{E.15}$$

Окончательное выражение для поля на оси Z

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(p) &= -\frac{1}{2} \left[ e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - (1 + \text{sign}(z))e^{-ik|z|} + z \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}} \right] \{1, -i, 0\} + \\
&\quad + \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2+z^2}} \right) \frac{a^2 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}}{4(a^2+z^2)} \{1, -i, 0\} = \\
&= \frac{1 + \text{sign}(z)}{2} e^{-ik|z|} + \left[ -\frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{a^2}{4(a^2+z^2)} \left( 1 - \frac{i}{k\sqrt{a^2+z^2}} \right) \right] e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} \{1, -i, 0\}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

Рассчитаем поле на оси Z несколькими методами, а именно: аналитически по формуле (E.16), численно методом интегрирования Кирхгофа в формулировке теоремы эквивалентности, численно по формуле Стрэттона-Чу и методом согласования с источником. Для этого произведем триангуляцию поверхности апертуры и численно вычислим интегралы и коэффициенты разложения. Результаты расчетов для апертур разного радиуса показаны на рис. E.3. Из результатов расчета видно, что в освещённой зоне поле не сразу начинает убывать. В ближней зоне при удалении от апертуры сначала идут резкие колебания амплитуды и фазы. Число колебаний зависит от диаметра апертуры. Убывание поля на оси в освещённой зоне начинается с расстояния  $z=D^2/4\lambda$ . Как и предполагалось, формула Стрэттона-Чу дает более точный результат, чем теорема эквивалентности. Также можно заметить, что, как и было указано ранее, в методе согласования с источником ряд гармоник сходится внутри минимальной сферы, содержащей источник, т.е. радиуса  $a$  для нашего случая. Далее рассмотрим излучение круглой апертуры радиуса  $10\lambda$ . На рис. E.4 показаны графики распределения интенсивности излучения в поперечной плоскости на нескольких расстояниях  $z_0$  от апертуры. Показано изменение дифракционной картины при переходе из ближней зоны в дальнюю. Результаты идентичны данным, приведенным в [110], однако в этой работе авторами было получено распределение только для квадратной апертуры.

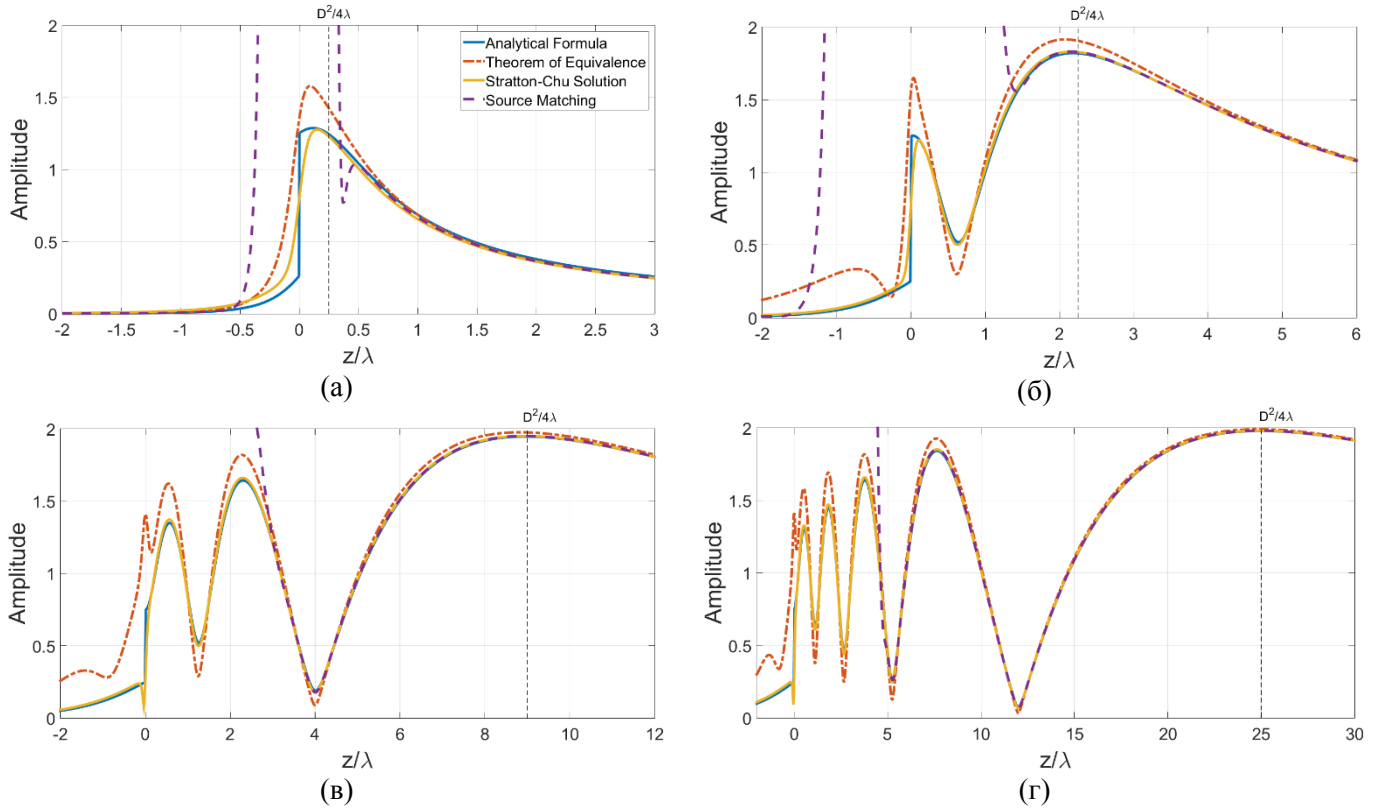


Рис. Е.3. Результаты расчета нормированной амплитуды поля на оси Z разными методами – по формуле, полученной аналитически; по теореме эквивалентности; по формуле Страттона-Чу; методом согласования с источником.  $a=\lambda/2$  (а);  $a=3\lambda/2$  (б);  $a=3\lambda$  (в);  $a=5\lambda$  (г).

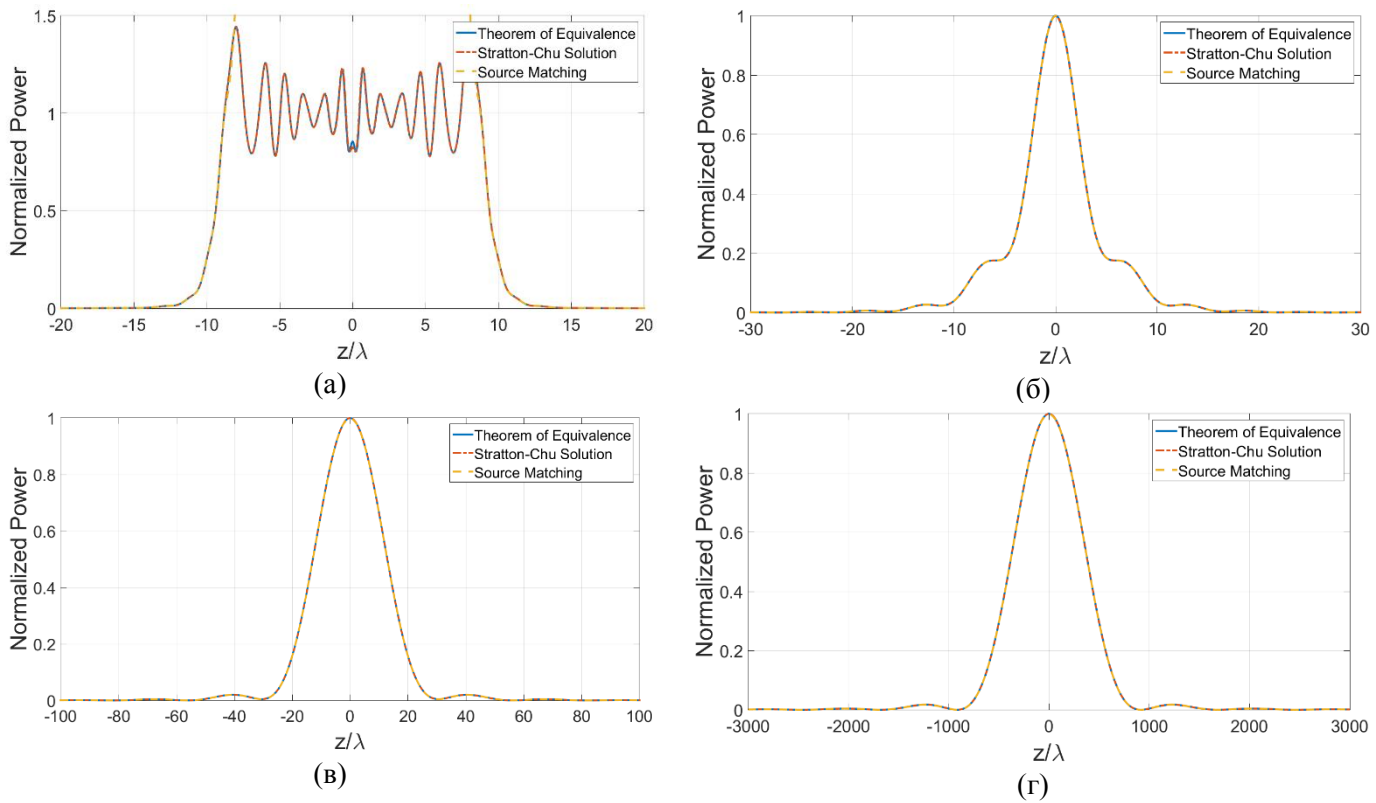


Рис. Е.4. Результаты расчета разными методами нормированной амплитуды составляющей вектора Пойнтинга  $P_z$  на оси X, перпендикулярной оси излучения Z, на разных расстояниях  $z_0$  от плоскости апертуры. Радиус апертуры  $a=10\lambda$ .  $z_0=5\lambda$  (а);  $z_0=100\lambda$  (б);  $z_0=500\lambda$  (в);  $z_0=15000\lambda$  (г).



Для демонстрации картины поля, излучаемого апертурой, рассчитаем составляющие поля на сфере и в плоскости, перпендикулярной плоскости апертуры. Вектор Пойнтинга от апертуры радиуса  $a=\lambda$  на сфере радиуса  $4\lambda$  изображен на рис. Е.5. Составляющие вектора Пойнтинга в спиральном базисе, рассчитанные по формуле Стрэттона-Чу, изображены на рис. Е.6. Из картины виден физический смысл составляющих в спиральном базисе:  $F_{+,+1}$  представляет собой волну правой круговой поляризации, распространяющуюся в направлении увеличения координаты  $r$ , это «прямая» волна;  $F_{+,-1}$  представляет собой волну правой круговой поляризации, распространяющуюся в направлении  $-r$ , это «отраженная» волна;  $F_{+,0}$  это радиальная составляющая. Радиальная составляющая вектора Пойнтинга равна разности мощностей спиральных составляющих поля, то есть полезная излучаемая мощность есть разность между мощностью «прямой» волны и «отраженной» волны. Поток мощности одной составляющей направлен наружу, а другой внутрь сферы. Таким образом, излучение от апертуры аналогично распространению гауссова пучка с перешейком в области апертуры. Сравнение модуля радиальной составляющей вектора Пойнтинга на сфере, рассчитанной разными методами, приведено на рис. Е.7.

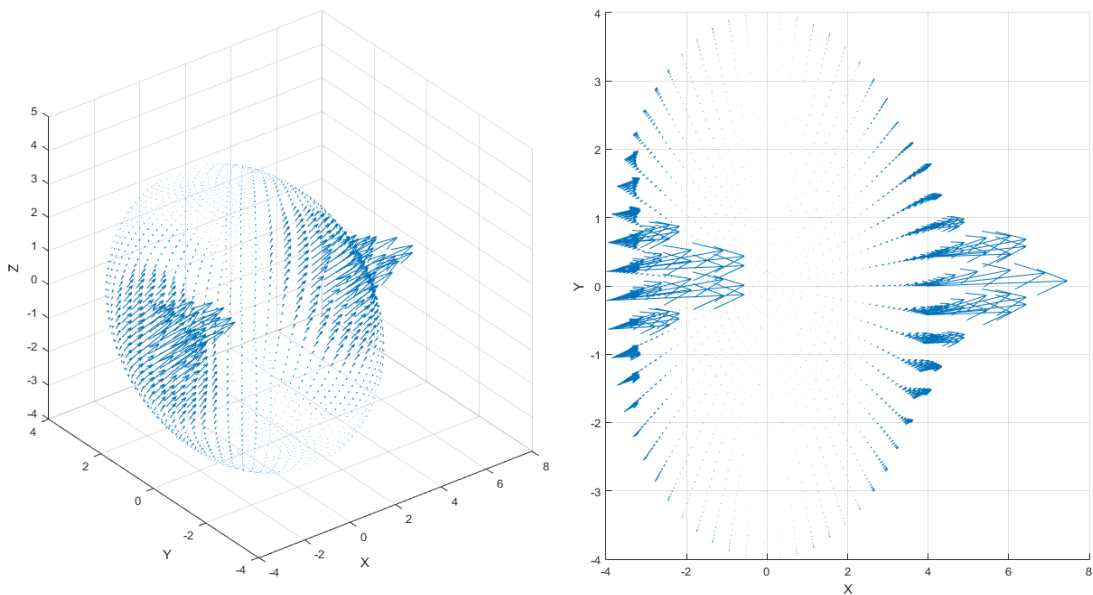


Рис. Е.5. Вектор Пойнтинга на сфере.

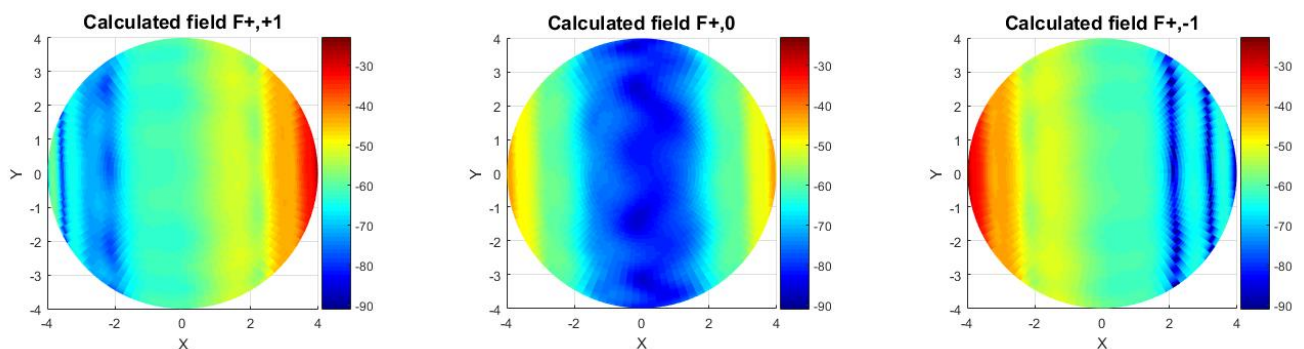


Рис. Е.6. Составляющие вектора Пойнтинга [дБ] в спиральном базисе от апертуры  $a=\lambda$  на сфере  $4\lambda$ .

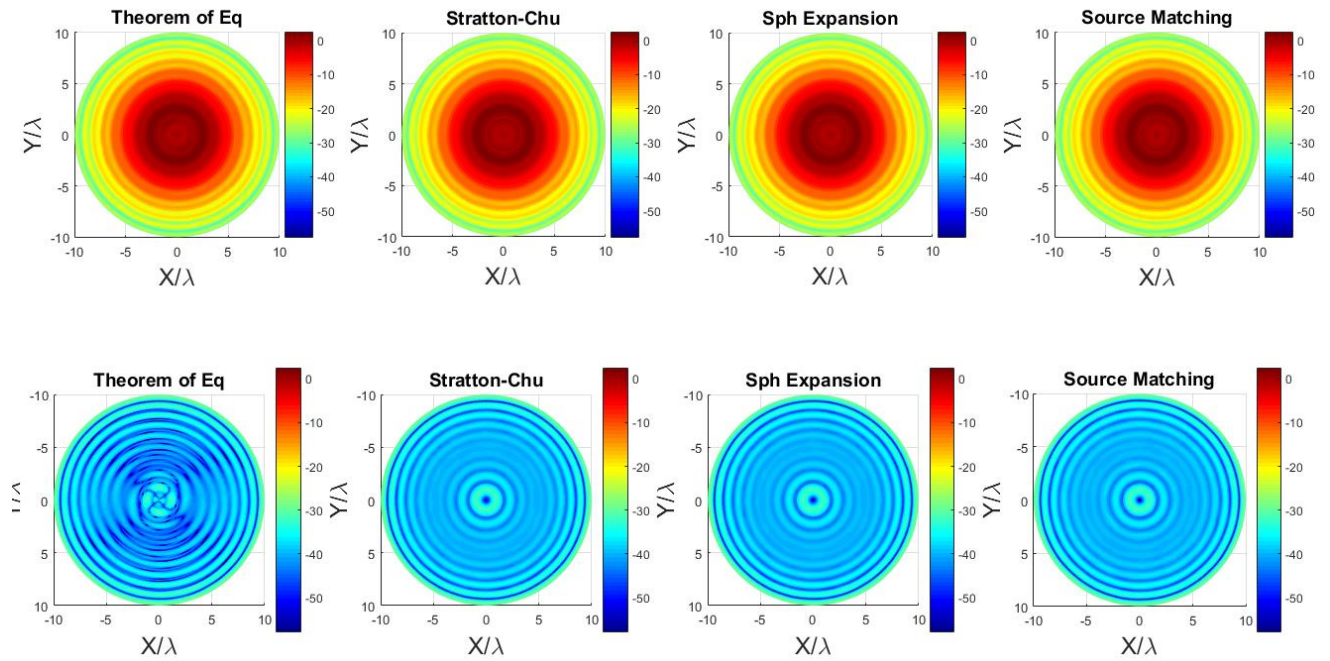


Рис. Е.7. Вектор Пойнтинга  $P_g$  на сфере в БЗ. Первый столбец – теорема эквивалентности; второй – формула Стрэттона-Чу; третий – разложение поля, полученного по формуле Стрэттона-Чу на сфере, в ряд; четвертый – метод собственных функций с расчетом коэффициентов по токам в апертуре. Верхний ряд – верхняя полусфера (сектор углов  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ ), нижний ряд – нижняя полусфера ( $90^\circ < \theta < 270^\circ$ ).

Рассчитаем также поле от апертуры в ДЗ. Аналитическое выражение

$$F(\theta) = 2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (\text{E.17})$$

Результаты расчета методами интегрирования Кирхгофа по точной формуле, по приближенной, методом согласования с источником, разложением на сфере и по аналитической формуле представлены ниже.

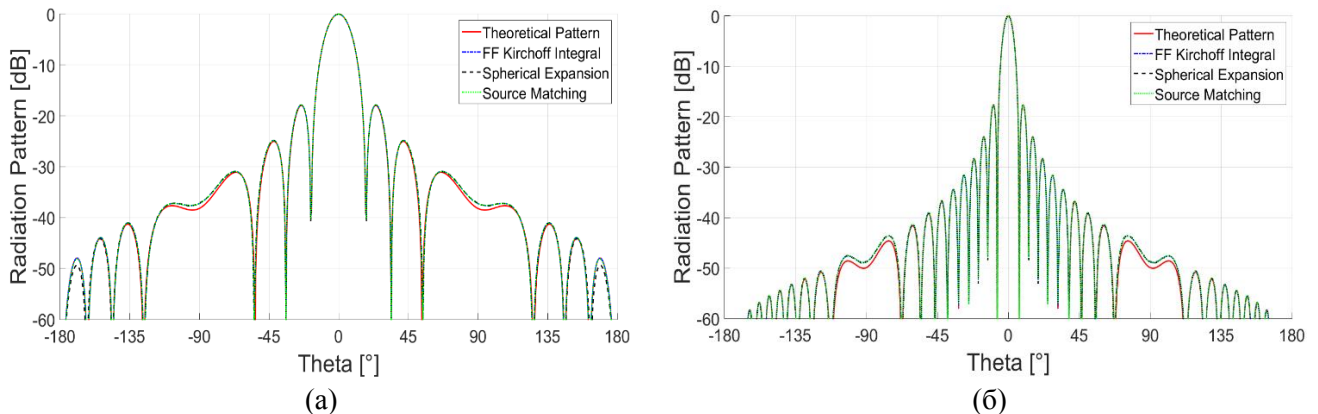


Рис. Е.8. Нормированная амплитуда поля в ДЗ. Апертура  $a=2\lambda$  (а); апертура  $a=5\lambda$  (б).

Интерес также представляет распределение поля в поперечной плоскости при удалении от апертуры. Результаты расчета для разных апертур методом согласования с источником представлены на рис. Е.9. На рисунках виден процесс изменения дифракционной картины – переход от поля в ближней зоне к излучению в дальней зоне, имеющему сферический фронт.

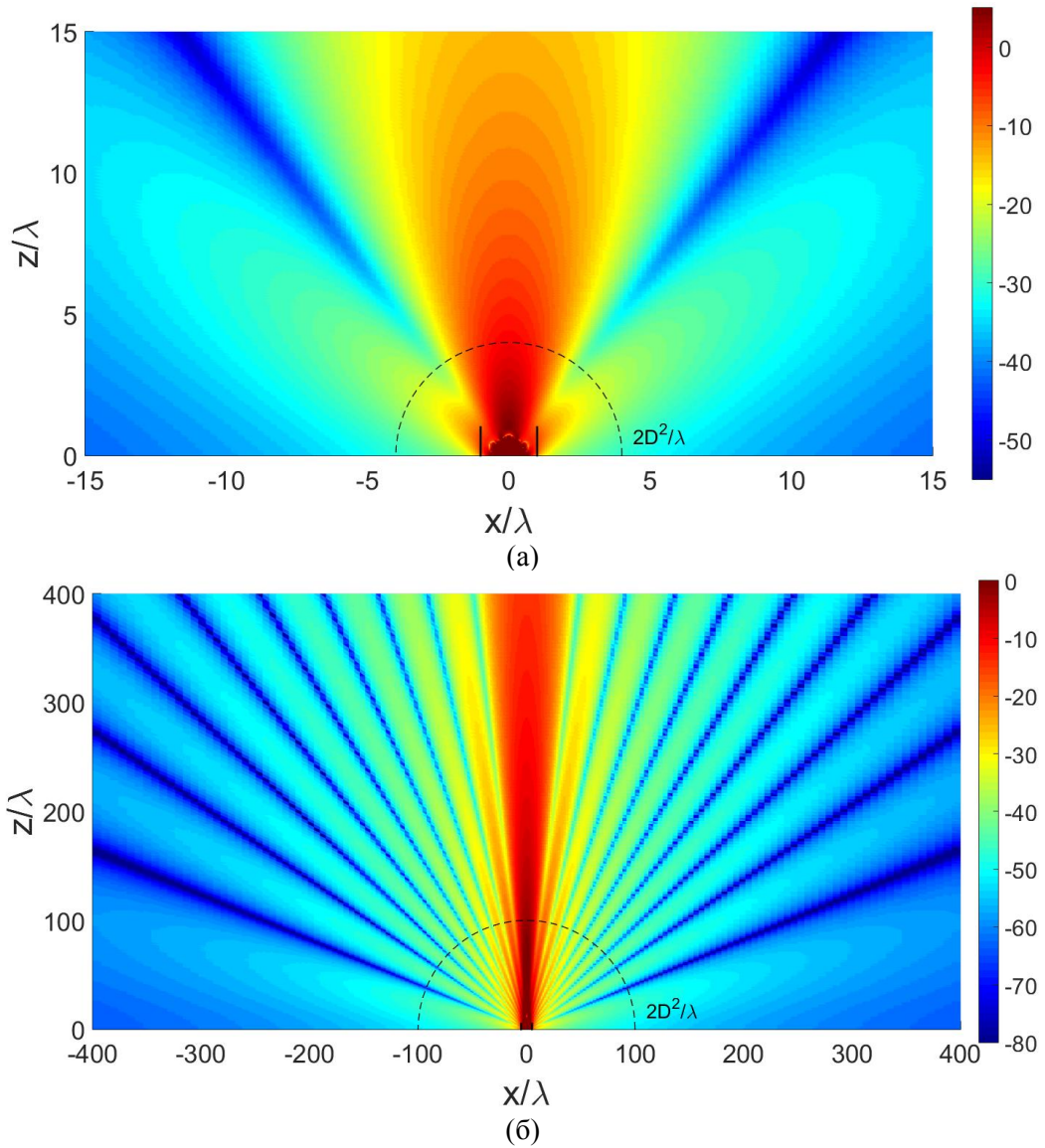


Рис. Е.9. Распределение вектора Пойнтинга  $P_r$  в поперечной плоскости, рассчитанное методом согласования с источником. Апертура  $a=\lambda$  (а); апертура  $a=5\lambda$  (б).

Впервые такие решения – методом физической оптики и разложения в ряд, были опробованы на решениях задач излучения антенн, в том числе облучателя зеркальной антенны [111, 112, 113, 114].

Расчет методом параболического уравнения.

Решим также задачу расчета поля апертуры методом параболического уравнения для векторов Римана-Зильберштейна. Точное решение задачи определения поля в пространстве по заданной главной составляющей в апертуре

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{+1}(\xi, \eta, z) &= e^{-z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0); \\ \tilde{F}_{-1}(\xi, \eta, z) &= \frac{-i\rho^2 e^{-2i\varphi}}{2k\sqrt{\rho^2 - k^2} + i(\rho^2 - 2k^2)} e^{z\sqrt{\rho^2 - k^2}} \tilde{F}_{+1}^+(\xi, \eta, 0);\end{aligned}\tag{E.18}$$

В формуле (E.18) использованы прямолинейные циклические координаты. Для решения задач с осесимметричной геометрией (симметричное по  $\varphi$  распределение поля) можно перейти к цилиндрическим циклическим координатам и решать задачу с помощью преобразования Ханкеля. Двумерное преобразование Фурье функции, имеющей вид:  $F_{+1} = e^{im\varphi} f_m^+(r)$  можно свести к преобразованию Ганкеля:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= e^{im\varphi} f(r); \quad \tilde{F}(\xi, \eta) = e^{im\vartheta} \tilde{f}(\rho); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \\ \tilde{F}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \iint F(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = i^m e^{im\vartheta} \int_0^\infty f(r) J_m(\rho r) r dr = i^m e^{im\vartheta} \tilde{f}(\rho); \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Таким образом, из-за того, что ковариантные и контравариантные компоненты связаны со сферическими так, что множитель  $e^{i\varphi}$  в одних заменяется на множитель  $e^{-i\varphi}$  в других, в интеграле осесимметричное распределение  $F_{+1}e^{+1}$  не зависит от  $\varphi$ . Поэтому преобразование Фурье превращается в преобразование Ханкеля нулевого порядка:

$$\tilde{f}(\rho) = \int_0^\infty f(r) J_0(\rho r) r dr; \quad f(r) = \int_0^\infty \tilde{f}(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho; \quad (\text{E.20})$$

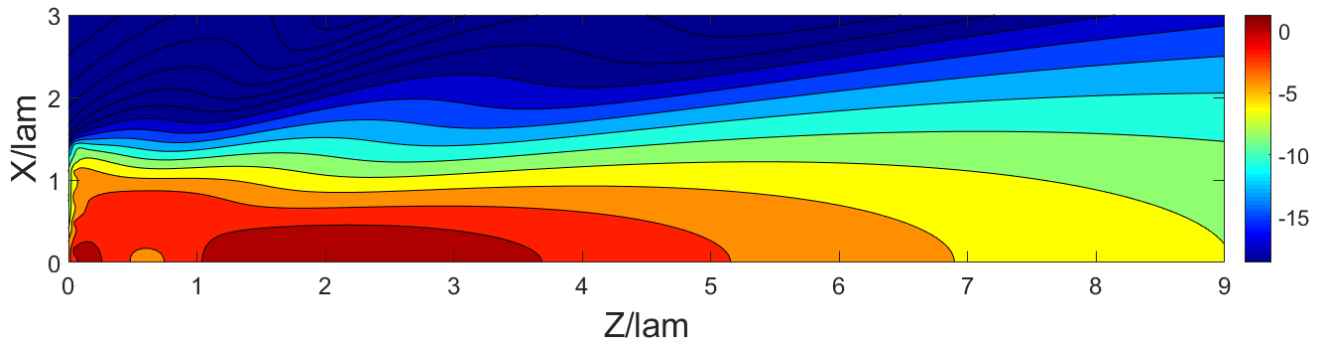
Рассмотрим равномерное распределение в апертуре. Совершим прямое преобразование Фурье

$$f_{0,0}^d = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < r < a \\ 0, & \text{при } r > a \end{cases}; \quad \tilde{f}_{0,0}^d = \frac{J_1(\rho r)}{\rho} \quad (\text{E.21})$$

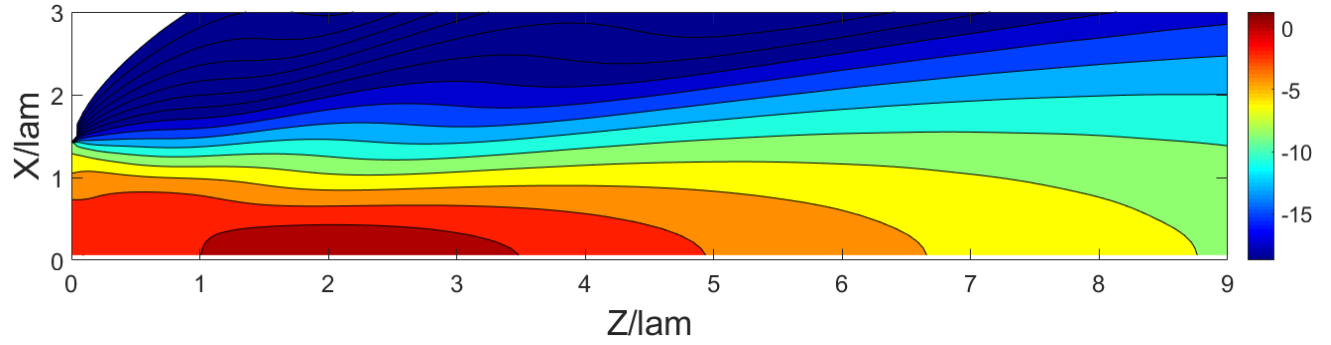
Мы будем вычислять поля с помощью алгоритма дискретного преобразования Ханкеля в MATLAB, сравнивая полученные результаты с расчетами методом физической оптики. Результаты расчетов приведены на рис. E.10.

Таким образом, главное свойство из полученного теоретически и опробованного практически метода – возможность решения строгой векторной задачи с помощью довольно простого и известного математического аппарата. Напомним, что в традиционном методе ПУ существует допущение – отбрасывается вторая производная по продольной координате, и решается скалярная задача без учета составляющей, соответствующей отраженной волне.

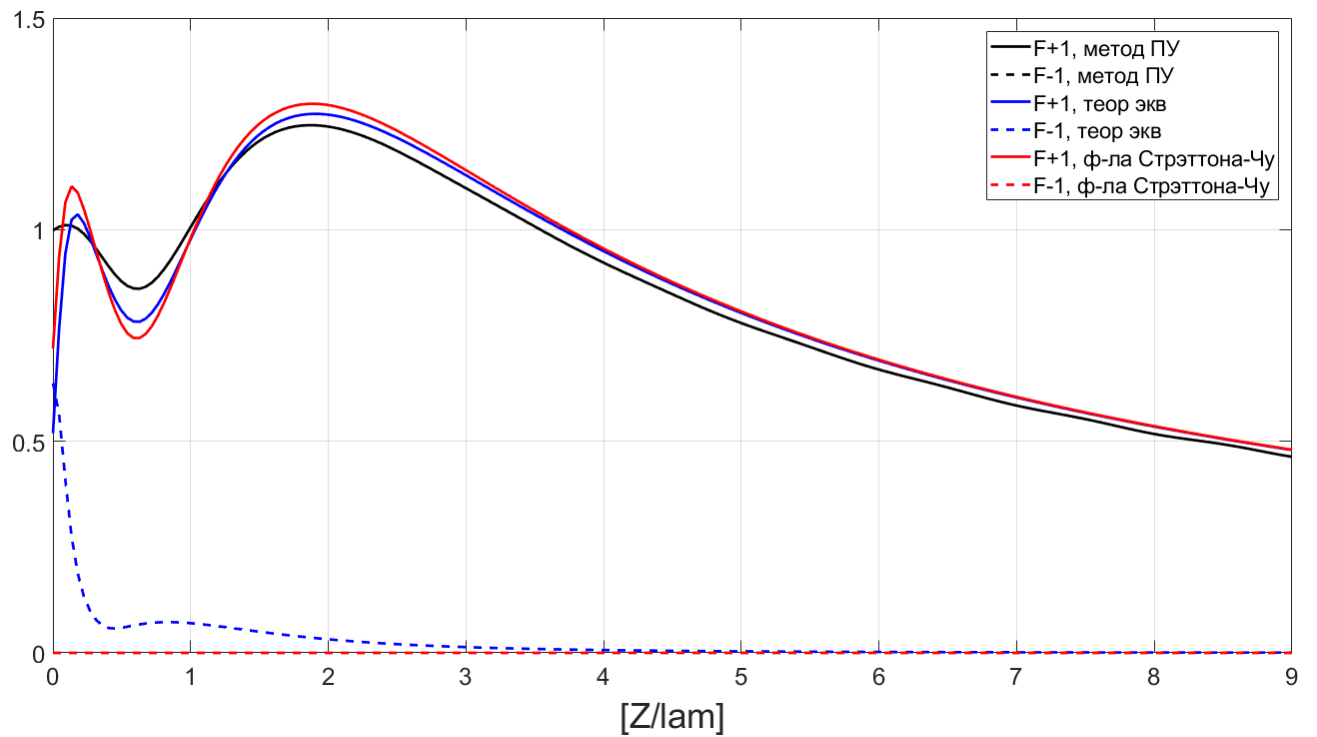
Метод ПУ эффективен в решении определенного круга задач. В данном разделе с помощью аналога метода ПУ для векторов Р-З решается простейшая задача излучения апертуры, для которой применение метода не дает каких-либо преимуществ по сравнению с другими методами. Преимущества метода и границы применимости требуют дальнейшего изучения.



(а)



(б)



(в)

Рис. Е.10. Распределение амплитуды составляющей  $F_{+,+1}$ , излученной апертурой  $a=\lambda$ . Продольная плоскость, метод ПУ (а); продольная плоскость, метод ФО (б); поле на оси (в).

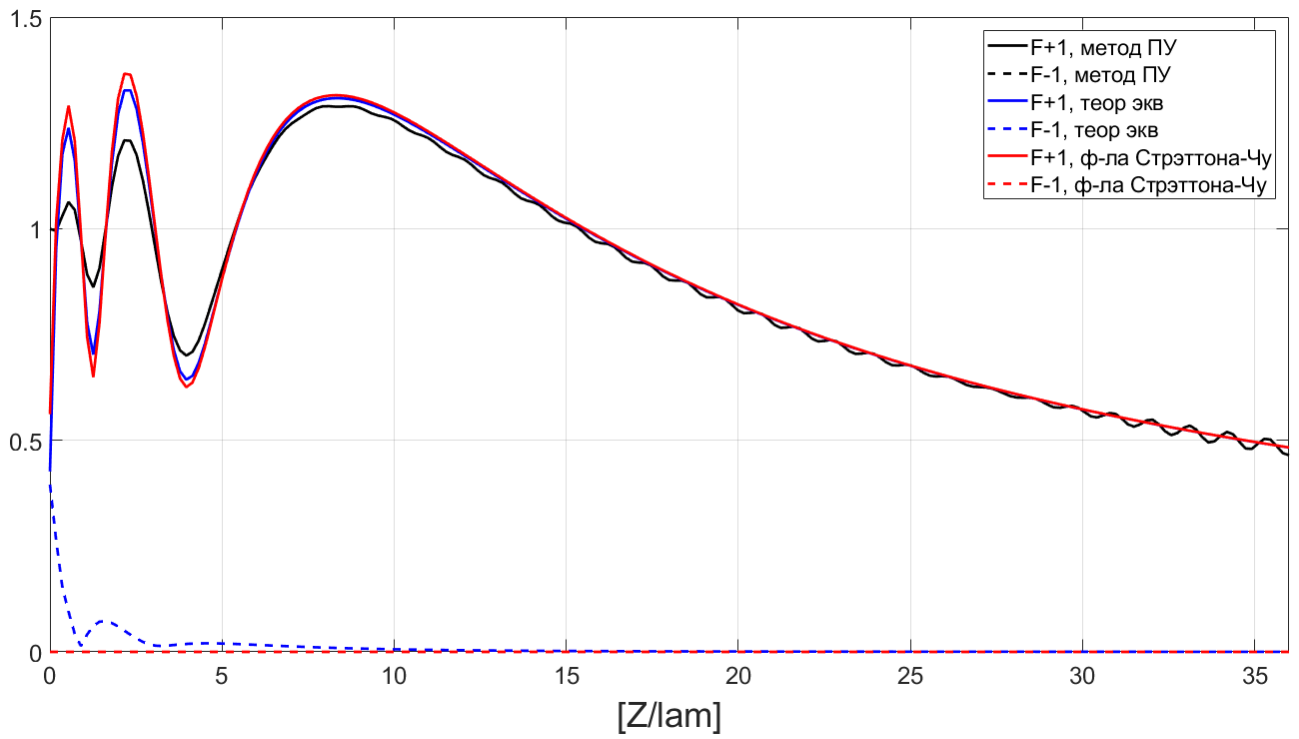
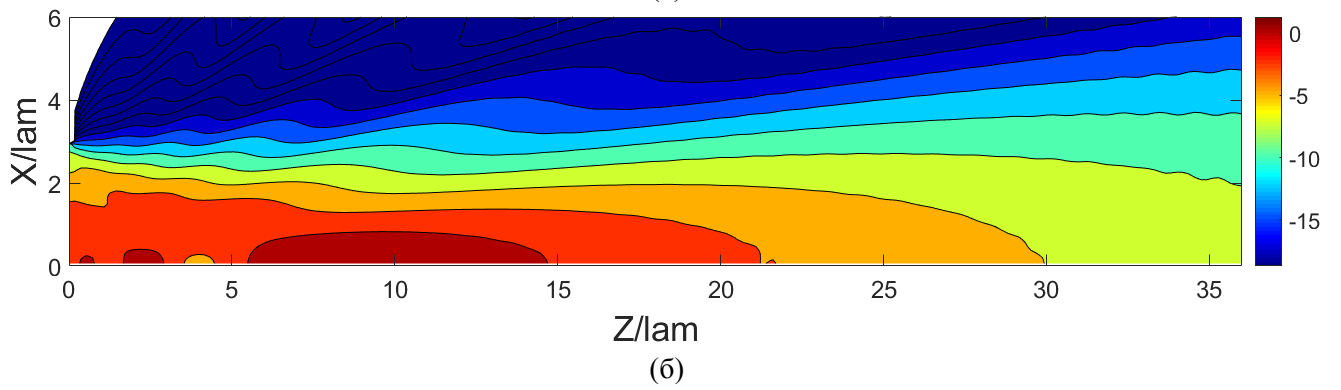
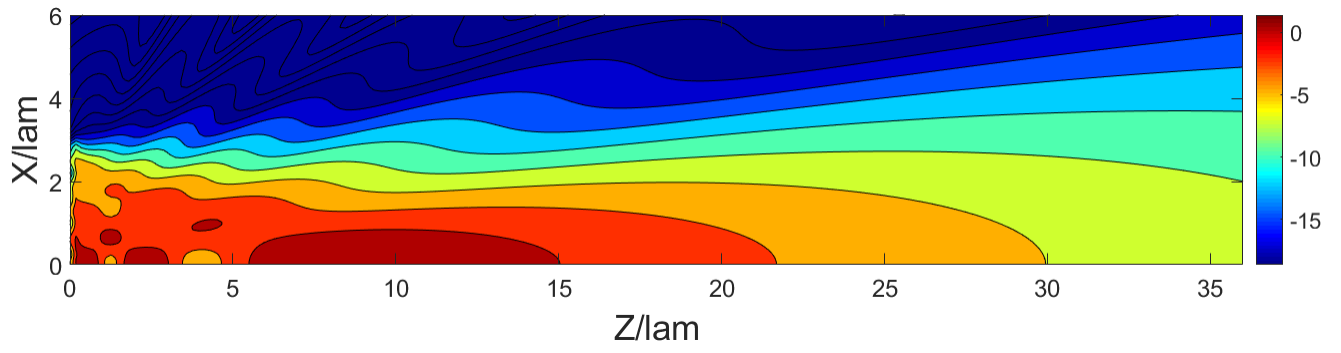


Рис. Е.11. Распределение амплитуды составляющей  $F_{+,+1}$ , излученной апертурой  $a=3\lambda$ .  
Продольная плоскость, метод ПУ (а); продольная плоскость, метод ФО (б); поле на оси (в).



### Приложение 3

Акт внедрения результатов диссертации АО «ОКБ МЭИ».

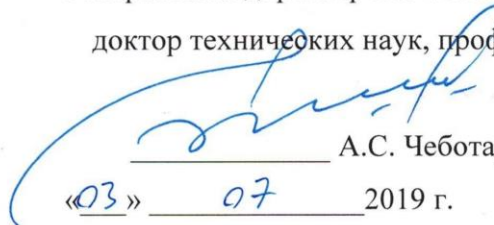
Акционерное общество  
«Особое конструкторское бюро  
Московского энергетического института»  
(АО «ОКБ МЭИ»)



**ОКБ МЭИ**  
РОССИЙСКИЕ КОСМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор АО «ОКБ МЭИ»  
доктор технических наук, профессор

  
\_\_\_\_\_ А.С. Чеботарев  
«03» 07 2019 г.

АКТ

реализации результатов диссертационной работы  
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
Бельковича Игоря Викторовича

Комиссия в составе: председателя комиссии - д.т.н., профессора Харламова Г.Ю., членов комиссии: д.т.н., доцента Жукова А.О., к.т.н., доцента Турлова З.Н., составила настоящий акт о том, что теоретические и экспериментальные исследования, проводимые в рамках диссертационной работы Бельковича Игоря Викторовича «Применение векторов Римана-Зильберштейна для расчета электромагнитных полей зеркальных антенн и лучеводов» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, реализованы при разработке перспективной антенной системы с диаметром зеркала 32 м, предназначенной для управления космическими аппаратами дальнего космоса и обеспечения проведения фундаментальных научных исследований в дальнем космосе.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ КОМИССИИ:

д.т.н., профессор


  
\_\_\_\_\_ Харламов Г.Ю.

ЧЛЕНЫ КОМИССИИ:

д.т.н., доцент

  
\_\_\_\_\_ Жуков А.О.

к.т.н., доцент

  
\_\_\_\_\_ Турлов З.Н.